译 者 序

有限元法是大型复杂结构或多自由度体系分析的有力工具，近20年来已广泛地用于工程结构、传热、流体运动、电磁等连续介质的力学分析中，并在气象、地球物理、医学等领域得到应用和发展。电子计算机的出现和发展，使有限元法在许多实际问题中的应用变成现实，并具有广阔的前景。

在我国，计算机正在各个领域得到推广应用。作为一个科学技术工作者，了解有限元法的基本知识，掌握计算机程序的编制方法和计算机的使用方法，就能使自己的工作出现飞跃。

由美国弗吉尼亚工学院和州立大学工程与力学教授J. N. Reddy所著的《有限元法概论》(1985年国际学生版)一书，是他多年来在工程、气象、地球物理、医学、数学等领域内，给学生讲授有限元课程和解决许多实际问题的基础上写成的。在本书的绪论、变分公式和近似计算方法，以及一维问题有限元分析等章节中，阐明了有限元的数学、力学基础和有限元法的基本概念与方法；在以后的章节中，进一步研究了二维问题及其它高等的问题，并提供了计算杆系结构和平面问题的三个典型的实用计算机程序。本书深入浅出，通俗易懂，是大学生、研究生以及工程技术人员学习有限元法和计算机应用技术的一本较新较好的教科书和参考书。

本书由邹仲康、吴瑞林、秦惟敏、廖双莲、陈颖初、邝美美、何益斌等同志翻译，由沈蒲生教授审校。由于我们水平所限，错误之处在所难免，欢迎批评指正。

译 者

1987年9月

作 者 序

导致写这本书的动机，来自在工程、气象、地质和地理、物理以及数学等许多领域给学生讲授多年的有限元课程。由于我是在大学和工业部门的学生和同事的一个主管和顾问，他们要求解答许多有关有限元方法的数学概念，这使我获得了经验，有助于我介绍解算许多科学研究和工程领域出现的微分方程的基本技巧。我与那些在固体力学和结构力学方面无基础知识的学生们的许多讨论，导致我决定写一本书，它应该弥补一些著作中相当不幸的缺陷。

本书为已修线性代数和微分方程的高年级大学生和一年级研究生而写。然而，材料力学、流体流量及热传导方面的额外课程（或对于所涉及的课题）应该使学生对本书所讨论的实例感到比较轻松。

在这本书中，有限元法是作为解微分方程的变分基本技巧来介绍的。以一个等效的变分方程代替由微分方程所描述的一个连续的问题，其近似解假定为近似函数ϕ_j的线性组合 $\Sigma c_j\phi_j$。参数c_j由有关的变分方程式确定。有限元方法为推导对于简单的子域的近似函数提供了一个系统的方法，用子域可以表示一个几何上复杂的域。在有限元法中，该近似函数是分段的多项式（即该多项式仅在子域上确定，该子域称为单元）。

本书采用的方法有时介乎纯数学方法和结构力学方法之间。从我作为一个工程师和自学应用数学的亲身经验，我知道，如果已知一个"公式"，但是对于这个问题及其近似性没有较深的洞察力，可能会出现多么不幸的后果。即使是最完善的理论导致的某

种准则（例如哪一种变分式是适当的，哪种单元是合乎需要的，什么是近似的特性等），没有一定的变分法的理论知识，我们就不能充分了解各个公式、有限元模型及其限制。

在变分法和有限元法的学习中，为了简便起见，有意回避高深的数学。然而，在第一章和第二章中包括起码的数学方法看来是必要的。在第二章中特别注意变分式的构成，因为这种练习在微分方程的有限元式中反复出现。本章涉及二个方面：第一，选择符合边界条件的近似函数；第二，获得用待定参数表示的代数方程的方法。因此，第二章不仅给读者准备在第三章和第四章中需要的一定的概念和方法，而且还启发他们考虑建立近似函数的系统方法，它是有限元法的主要特点。

第三章和第四章在介绍有限元方法时，我们回避传统的固体力学方法，而采用"微分方程"方法。"微分方程"方法较单个的特殊情况有更广的解释。但当要考虑特定的例子时，要阐明问题本身的基本情况。由于大量的物理问题可用二阶或四阶常微分方程来描述（第三章）或用二维拉普拉斯算子描述（第四章），我们对有限元的公式、插值函数的推导以及用这些方程式描述的问题的解给予了较大的关注。一些有代表性的例题都是取自各种工程实际，并依据热传导、流体力学和固体力学理论。由于本书是用来作为有限元法的基本课程的教科书，象非线性问题、壳体以及三维分析高等课题均将省去。

由于有限元法的实际应用最终取决于你在数字计算机上实现该方法的能力，书中设计的例题和习题引导读者用计算机实际地计算各种问题的解。第三章和第四章中提供了用计算机实现有限元法的详细论述。介绍了三个标准程序（FEM1D，FEM2D 和 PLATE），并通过几个例子来说明其应用。这些计算机程序很容易理解，因为它们都是按与书中的理论相同的思路而设计的。

书中提供了许多例题，其中大多数是将基本概念用于工程和应用科学的各个方面的具体问题。用符号■来表示这些例题的结论。在书中相当的范围内，还包含大量的习题来验证和补充对详述

概念的理解。对于希望获得本书中所研究问题更多知识的读者，在每章后列了许多参考书和研究论文。

在第一次阅读本书时，有些章节可不看（这些章节加了星号），到需要时再去读。

使用本教材作概论课程时，建议采用下列安排：

大学生		研究生	
第一章	自学	第一章	自学
第二章	2.1节（自学）	第二章	2.1节（自学）
	2.2节		2.2节
	2.3.1节—2.3.3节		2.3节
第三章	3.1节—3.4节	第三章	3.1节—3.7节
	3.6节—3.7节	第四章	4.1节—4.8节
第四章	4.1节—4.4节	第五章	学期论文
	4.7节		
	4.8.1节—4.8.4节		

由于3.5节和4.6节、3.6节和4.7节以及3.7节和4.8节之间的密切关系，它们可以一齐包括在内，还建议将3.6和3.7节（因而4.7节和4.8节）包括在3.2节之后。

作者要感谢为改进本书提出过意见和批评的所有学生和同事。作者还要感谢V. McCoy熟练地打印手稿，感谢N. S. Putcha先生和K. Chandrashekhara先生校对全文，以及感谢M. Slaughter和S. Hazleftt编辑在本书出版中的帮助和合作。

J. N. Reddy

第一章 绪 论

1-1 概述

自然界中不论是生物、地质还是力学的每一现象，实际上都可借助于物理定理，按照与各种主要量相联系的代数方程、微分方程或积分方程来描述。确定具有奇特形状的孔洞、许多加劲杆以及承受静力、热力和空气动力的一个压力容器中的应力分布，查明在海水或空气中污染物质的浓度，以及为了求解并预示形成龙卷风和雷暴雨的机理而模拟大气中的气候，这些都是许多重要实际问题中的几个例子。推导这些问题的控制方程式虽然不是十分的困难，但要用精确分析方法对它们求解却是一个棘手的任务。这时，近似分析方法提供了求解的另一种手段。在这些近似方法中，有限差分法和变分法，诸如Ritz法和Galerkin 法，在文献中都是最经常采用的。

在一个差分方程的有限差分近似式中，以差商来代替方程式中的导数，该差商包含了在域中各个网格点上解得的值。引入边界条件后解这些方程式，可得各网点处的数值。有限差分法在概念上虽然简单，但它具有一些缺点。最明显的缺点是近似解的导数不准确、沿非线性边界难于引入边界条件、几何上复杂的域难于精确表达以及不适用于非均匀和非矩形的网格。

在微分方程的变分解中，将微分方程换成一个等效的变分式，然后假定其近似解为已知的近似函数ϕ_j的组合（$\Sigma c_j\phi_j$），参数c_j按变分式确定。变分法的缺点是对于具有任意域的问题难以建立

近似函数。

有限元法由于提供了推导近似函数的系统步骤，因此它克服了变分法的困难。这个方法优于其它方法，它具有两个基本特点：第一，以一批几何上简单的子域（称为有限元）表示一个几何上复杂的域；第二，对每一个有限元运用基本的概念推导近似函数。这个概念是用一个线性的代数多项式组合来表达一个任一连续的函数。按插值理论的概念推导近似函数，因此称它为插值函数。于是有限元法可解释成是变分法的一个逐段应用（例如Ritz法和加权残数法）。其中，近似函数是代数多项式，而待定参数代表边界上和单元内部有限个预定点（称为节点）处的解答值。由插值法理论可以发现插值函数的阶数（或次数）取决于单元中节点的数目。

1-2 发展简史

用一些离散的单元代表一个给定的域，并不是有限元法的新概念。人们发现古代数学家将一个内接于圆的多边形逼近圆的周长来估算 π 值。将圆看作一个有限个边长的多边形，预测的 π 值几乎精确到40位数字。在现代，该想法存在于航空结构的分析中，例如机翼和机身都看作是许多纵梁、壳和切边的板的组合。1941年Hrenikoff 提出了所谓网格法，它将平面弹性体看成是一批杆件和梁。在一个子域上采用逐段连续函数来确定接近未知函数的是Courant (1943)的著作。Courant 使用了一组三角形单元和最小势能原理去分析St. Venant 扭转问题。尽管在Hrenikoff (1941)和Courant(1943)的著作中可以找到有限元法的肯定的关键特性，正式的有限元法的文献则应归功于 Argyris和Kelsey(1960)，以及归功于Turner、Clough、Martin和Topp(1956)。然而“有限元”这个名词是Clough于1960年第一次使用。从此以后，有限元应用的著作按指数规律地增多，现在有许多杂志主要地致力于有限元法理论的发展和应用。考察历史的发展和有限元法的基本理论，可以找到

专门致力于有限元法的介绍和应用的很多教科书（见各章末的参考文献）。文献中一些参考论文的述评和有限元法的计算机程序也列在有关文章的后面。

1-3 有限元法的基本概念

本节通过两个例题来介绍为有限元法打基础的基本概念。

1． 用三角形方程确定圆面积。

2． 确定不规则物体的质量(或重力)中心。

1-3-1 例题1

现在来考虑确定以一批三角形来表示半径为 R 的一个圆的面积。假定三角形的面积可以计算（即我们已知一个三角形的面积的方程式，见图1.1)。圆面积的近似值是用于表示圆的各三角形面积的总和。虽然这是一个很普通的例子，仍说明了有限元法的一些(不是全部)概念，我们将概述计算近似面积的步骤。为此，介绍一些用于任一问题的有限元分析的术语。

1． 有限元离散化。首先将连续的区域(即圆)看作是有限个数目 n 的子域(比方说三角形)的集合，称之为用三角形将域离散化。将每一个子域称为单元，将单元的集合称为网格。在上述情况下，我们将圆分成为5个（$n=5$)三角形的网格，这样两种离散化示于图1.1a。由于所有单元尺寸相同，称该网格是均匀的网格。

2． 单元方程。取出一个典型的单元(即三角形 T_e)，并计算其性质(即面积)。我们将引入单元的基本方程（即计算面积的方程式）来计算要求的特性。在网格1中，令单元 e 的面积为 a_e，在网格2中，令单元 e 的面积为 $\bar{a}_e$，对于单元 e 可得：

$$a_e=\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\qquad \bar{a}_e=R^2\tan\frac{\pi}{n}\tag{1.1}$$

式中，R 为圆的半径。上述方程式称为单元方程。

3． 单元方程的集合与解。将单元特性相加，可得到圆的近似面积；这个过程称为单元方程的集合。在现在的情况下，该集

合依据于简单的想法，即集合的单元的总面积等于各个单元面积的和：

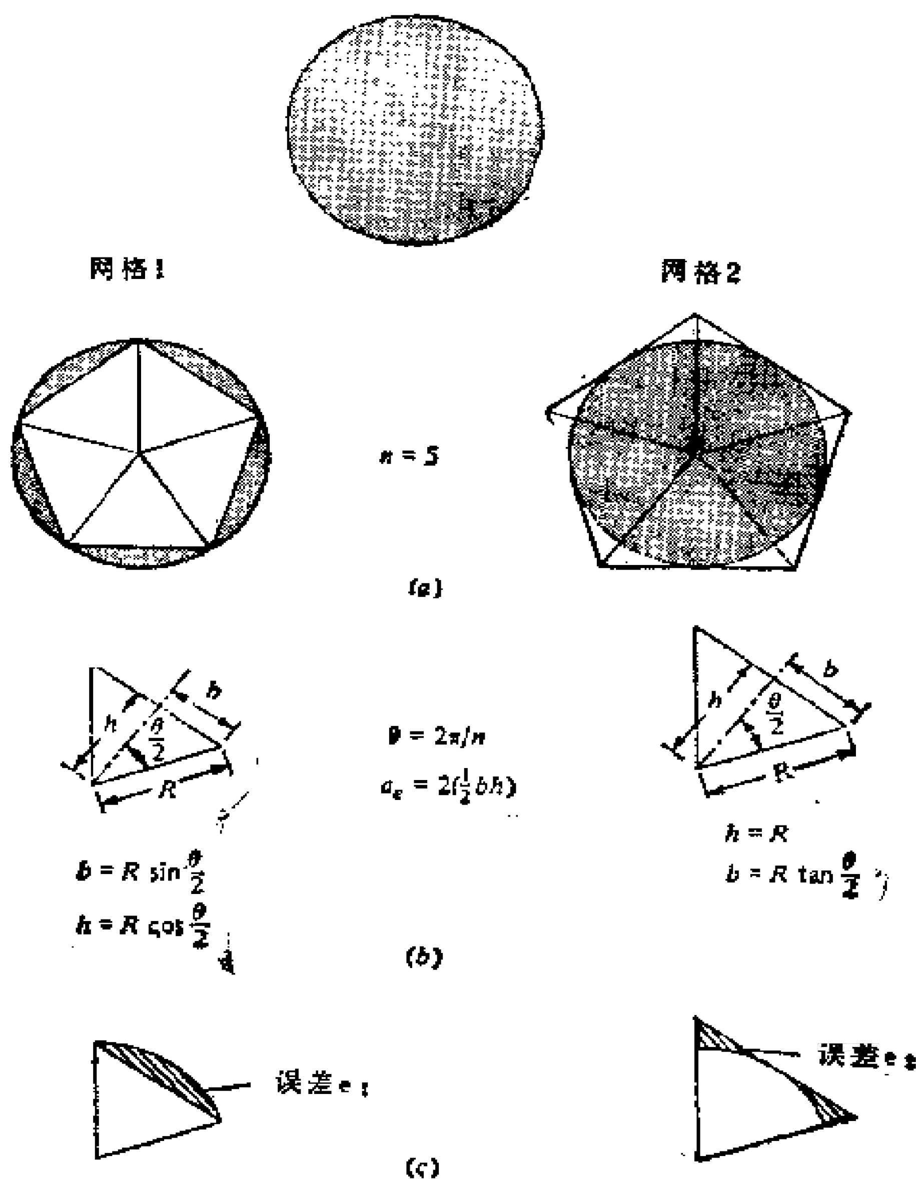


图1.1　圆的有限表示

(a) 有限元离散化；(b) 典型单元；(c) 边界的近似误差

$$A_1 = \sum_{e=1}^{n} a_e \qquad A_2 = \sum_{e=1}^{n} \bar{a}_e \tag{1.2}$$

由于网格是均匀的，在该网格中，对于每一个单元，其 a_e 和 $\bar{a}_e$ 是相等的，得

$$A_1^{(n)} = n\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \qquad A_2^{(n)} = nR^2\tan\frac{\pi}{n} \tag{1.3}$$

4．收敛性和误差估算。对于这种简单的问题我们知道其精确解，$A_0 = \pi R^2$。我们可以估计近似法中的误差，且证明当 $n \to \infty$ 时该近似解收敛于精确值。考虑典型单元 e，近似法的误差等于扇形之差：

$$e_1 = |S_e - a_e| \qquad e_2 = |S_e - \bar{a}_e| \tag{1.4}$$

式中，$S_e = \frac{1}{2}R^2\theta$ 为扇形面积。因此，对于网格1和网格2中的单元其误差为：

$$\begin{aligned} e_1 &= R^2\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) \\ e_2 &= R^2\left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

将 n 乘 e_i 得总误差（称为总的误差）：

$$\begin{aligned} E_1^{(n)} &= R^2\left(\pi - \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \pi R^2 - A_1^{(n)} \\ E_1^{(n)} &= R^2\left(n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - \pi\right) = A_2^{(n)} - \pi R^2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

现在来证明 E_1 和 E_2 随 $n \to \infty$ 而趋近于零。令 $x = \frac{2}{n}$，得

$$A_1^{(n)} = R^2\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = R^2\ \frac{\sin\pi x}{x}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_1^{(n)} = \lim_{x\to 0} R^2\ \frac{\sin\pi x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\pi R^2\ \frac{\cos\pi x}{1} = \pi R^2$$

同样　令 $y = \frac{1}{n}$，得

$$\lim_{n\to\infty} A_2^{(n)} = \lim_{y\to 0} R^2 \frac{\tan\pi y}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \pi R^2 \frac{\sec^2\pi y}{1} = \pi R^2$$

因此，当$n\to\infty$时则$E_1^{(n)}$和$E_2^{(n)}$为零（见图1.2c），收敛性得到证明。

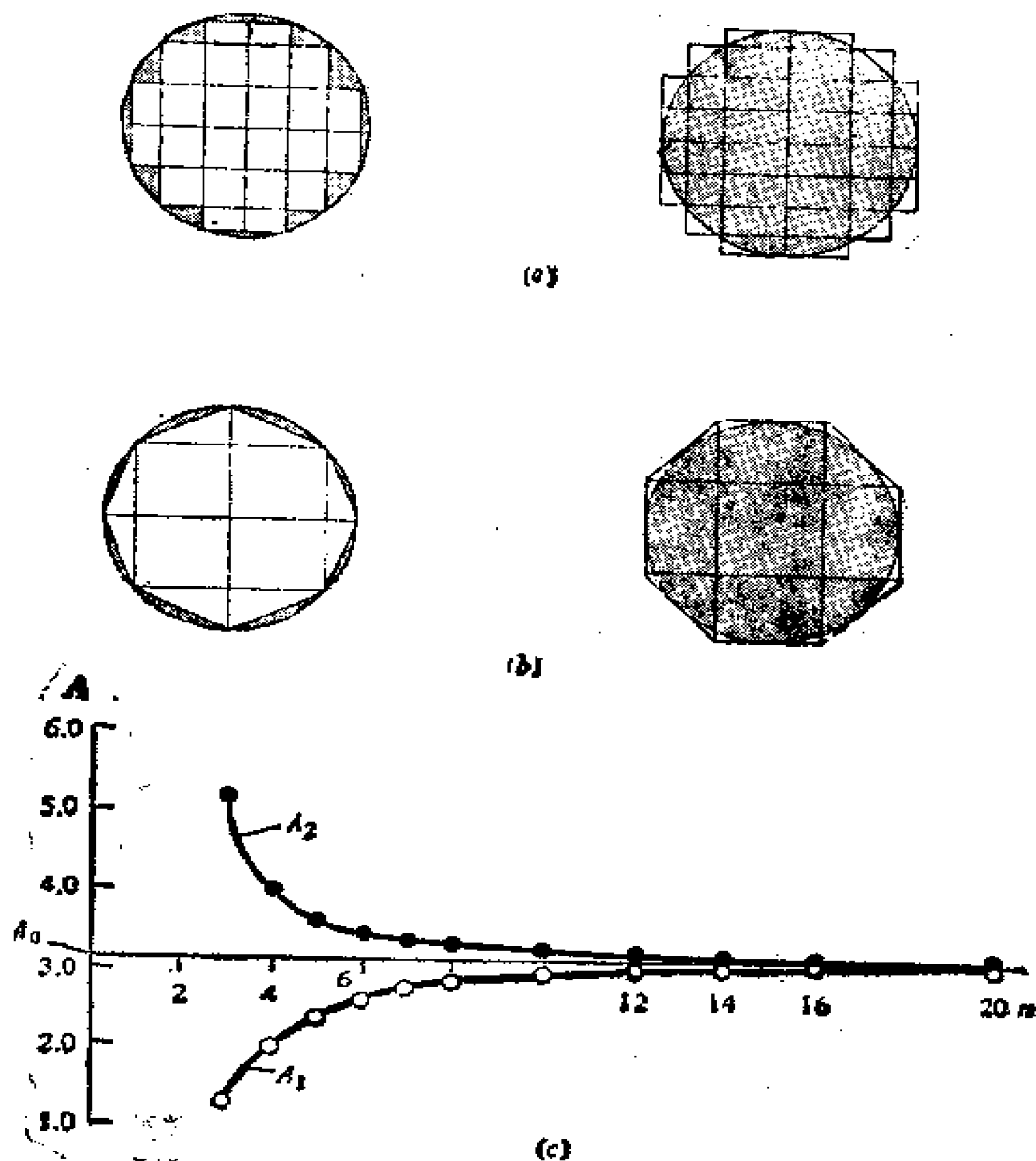


图1.2 按矩形及三角形单元的有限元离散化及解的收敛性

(a) 矩形单元网格；(b) 矩形和三角形单元网格；(c) 有限元解的收敛性

应该注意，还可采用矩形单元或三角形与矩形单元的组合，如图1.2a和b所示。在每一种情况下，近似计算的误差及其解是不同的。还应注意，单元面积的方程式采用了精确的公式。因此，在方程式的解答中不带入近似误差。对例题的进一步解释参见1-3-3节。

1-3-2 例题2

现在通过一个连续体的重心计算提供有限元概念的另一个基本例题。回顾刚体静力学基本课程可知，一个不规则质量中心（或不规则体的重心）的计算，采用通常所说的组合体的方法。在这方法中，很容易将物体分成（网格离散化）具有简单形状的几个部分（单元）。该简单形状的质量和质量中心（单元特性）很易算得。运用Varignon力矩法则（单元特性集合的基本原理；见图1.3a）可以求得整个物体的质量中心：

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\bar{X} = m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + \cdots + m_n\bar{x}_n$$

式中，$\bar{X}$为整个物体质量中心的x坐标值，m_i是第i部分的质量，$\bar{X}_i$是第i部分质量中心的x坐标值。对于整个物体质量中心的y和z坐标，有相似的表达式。对于组合线、组合面以及组合体，也有类似的关系。此时，分别用长度、面积和体积来代替其质量。

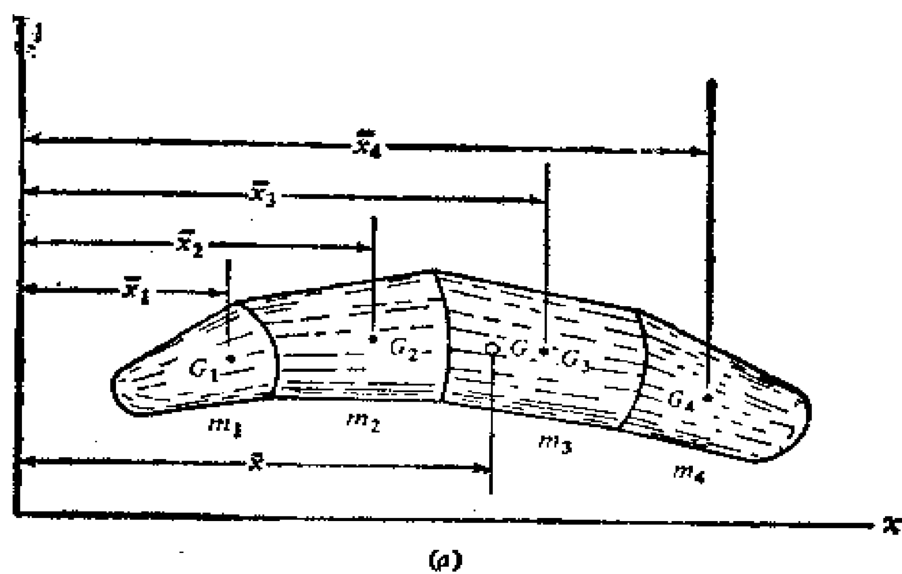
当一个给定的物体不能用简单的几何形体（单元）来表示时，可用数学方法表示其质量和质量中心，需采用近似方法求得单元的特性。作为一个例子，我们来研究求图1.3b中不规则面积（域）重心（$\bar{x}$，$\bar{y}$）的问题。该域可划分成有限个数目、宽为Δx、高为h的长条，第i个长条的面积为$A_i = \Delta x_i h_i$。由于h是长条的平均高度，因此，面积A_i是实际长条面积的近似值。应用力矩法则可求得该域重心的坐标：

$$\bar{x} = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i}$$

式中，$\bar{x}_i$和$\bar{y}_i$是第i个长条重心的坐标（对整个物体采用的坐标系）。

应该注意，近似值的精度随长条数目的增加（或长条宽度的减小）而增加。仅仅为了简单起见，在本讨论中取用矩形单元，

我们可以选用任何尺寸和任意形状的单元来近似给定的面积，以满足精度要求。



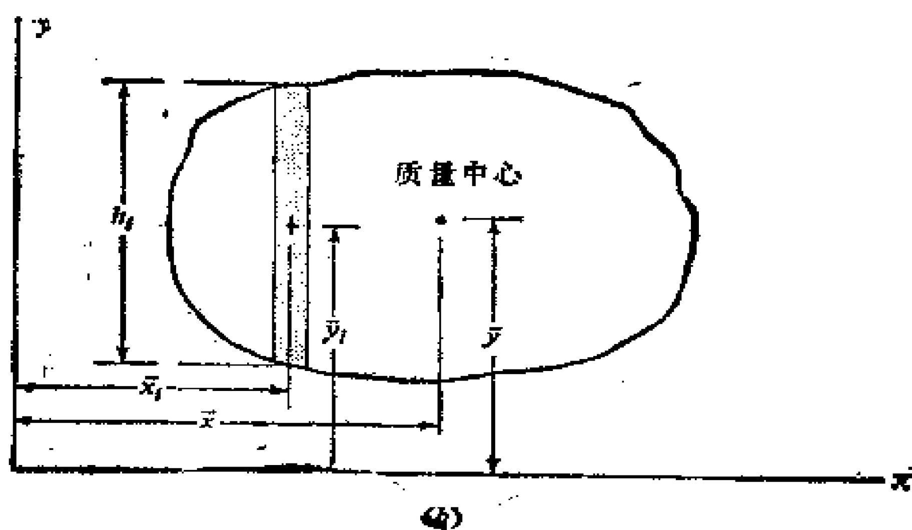


图1.3　按组合体的方法和Varignon法则计算质量中心
(a) 不规则体的质量中心；(b) 不规则面积的中心

1-3-3 例题中的若干要点

上述例题虽然说明了有限元法的基本思想，但例题的讨论中还有一些未提到或未出现的其他特性。为此有若干要点：

1.根据域的形状，我们可以将它离散成多于一种形式单元的网格。例如，在圆的近似计算中，我们可以只用矩形，也可以取用矩形和三角形的组合，如图1.2所示。应看到，一个三角形网格或三角形和矩形的组合网格比一个相应数目的矩形单元更接近圆。当然扇形单元能精确地表示一个圆。

2.在域的表示中，如果采用多于一种形式的单元，则应该将每种单元取出，研究其性质。

3.基本方程一般较上述例题中所考虑的情况要复杂，它们通常是微分方程式。在许多情况下，由于两个理由单元的方程式不能求解。第一，该方程式不可能有精确解，此时变分法起作用。第二，由于单元的集合受到一定的边界条件和初始条件的影响，由变分法得到的各个方程不能不顾其它单元独立求解。

4.有限元法中采用的近似解公式，与古典的变分法（即适于整个域的变分法）中采用的近似解公式有两点主要区别。第一，在变分法中，解u是用任意参数C_j的线性组合（$u=\sum C_j\phi_j$）来表示；而在有限元法中，解是用结点处u（也可能是它的导数）的值u_i（同时及其导数同样是可能的）的线性组合（$u=\sum u_j\psi_j$）来表示。第二，在有限元法中的近似函数是多项式，该多项式是由插值理论推导得到的。

5.单元中节点的数目和位置取决于：(a) 单元的几何形状、(b) 近似的程度（即多项式的次数）和 (c)方程或方程组的变分形式。利用将所要求的解表示为解在节点处的值的形式，可直接得到结点处的近似解。

6.在一般情况下，单元的集合是根据这样的想法，即在单元之间的边界处，解（以及还可能包括其导数）是连续的。在例题1中，因采用的是代数方程式，不存在连续性条件。

7.通常，有限元的集合受到边界条件或初始条件的影响。与

有限元网格有关的各独立方程式，只有在引入了边界条件或初始条件后方可求解。

8. 在有限元解中，有三种误差来源：(*a*) 由于域的近似性产生的误差（在例题1中仅产生此误差），(*b*) 由于解的近似方法产生的误差，以及(*c*) 由于数值计算产生的误差（即在计算机中数值的积分和舍入误差）。通常确定这些误差不是一个简单的事情。但在一定的条件下，对于一个给定的单元和问题则可以估算（见3-4节）。

9. 有限元解的精度和收敛性取决于求解的微分方程（或采用的变分式）和选取的单元。"精度"这个词指的是精确解与有限元解之间的差，"收敛性"这个词指的是随着网格中单元数目的增加的精度。收敛的性质（即单调地减小的误差或收敛于上述的精确解）取决于给定方程的形式。在例题1中，面积 A_1 从下面收敛于精确解 A_0，面积 A_2 从上面收敛于精确解 A_0（见图1.2*c*)。

10. 对于与时间有关的问题，往往按两个阶段列公式，在第一阶段，用有限元法近似表示微分方程，以得到一组与时间有关的普通微分方程式。在第二阶段，精确地求解随时间而变化的微分方程，或进一步按变分法或有限元法近似表示该方程，以获得代数方程，然后求解该代数方程的节点值。

1-4 研究现状

大多数为工学院使用而编写的有限元概论的教科书是供固体力学和结构力学的学生用的，这些教科书把有限元法作为结构分析矩阵法的一个产物进行介绍。少数把有限元法作为变分基本技术处理的教科书把变分计算和有关的近似方法或作为附录放在该书的后面，或让学生自学。本书将有限元法作为数值方法编写，该数值方法对微分方程所描述的问题，使用分段建立解的变分近似式基本原理。可使学生了解有限元概念的一般性，而不管学生的背景（工程还是应用科学)。这种观点还能使学生看到各种物理

理论共同的数学结构，从而深刻理解各种工程问题。

从有限元法基本概念的讨论中，清楚地看出，对一个给定的问题提出有限元式之前必须知道两件事：第一，应该知道如何去将问题构成变分问题；第二，应该知道如何推导与变分的问题相联系的一个代数方程组。这两个步骤对于任一给定的问题建立有限元模型都是关键的。因此，在我们着手研究有限元法及其应用之前，需要研究变分公式及与其关联的近似式。第二章研究微分方程的变分公式及其按近似变分法的解。

第三章研究有限元法在一维二次和四次微分方程中的应用。许多有限元的术语将在这一章里介绍。第四章介绍二维边值和初值问题的有限元分析。研究将限于单个二次微分方程或一组二次微分方程描述的问题。第五章的内容是高等问题的简要介绍。

参 考 文 献

有历史意义的论文

Argyris, J. H., and S. Kelsey: *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth Scientific Publications, London, 1960.

Clough, R. W.: "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis," *J. Struct. Div., ASCE, Proc. 2d Conf. Electronic Computation*, pp. 345-378, 1960.

Courant, R.: "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibratiou," *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 49, pp. 1-43, 1943.

Hrenikfof, A.: "Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method," *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, vol. 8, pp. 169-175, 1941.

Turner, M., R. Clouch, H. Martin, and L. Topp: "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *J. Aero Sci.*, vol. 23,

pp. 805–823, 1956.

参考书

Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1982).

Bathe, K. J., and E. L. Wilson: *Numerical Methods in Ftnite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1976).

Becker, E. B., G. F. Carey, and J. T. Oden: *Finite Elements, an Introduction*, vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1981).

Brebbia, C. A., and J. J. Connor: *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers*, Butterworths, Loudon (1975).

Cheung, Y. K., and M. F. Yeo: *A Practical Introduction to Finite Element Analysis*, Pitman, London, (1979).

Chung, T. J.: *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, Mc-Graw-Hill, New York(1978).

Ciarlet, P. G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam(1978).

Connot, J. C., and C. A. Brebbia: *Finite Element Techniques for Fluid Flow*, Butterworths, London(1976).

Cook, R. D.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley, New York(1974); 2d ed. (1981).

Desai, C. S.: *Elementary Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1979).

Desai, C. S., and J. F. Abel: *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold, New York(1972).

Fenner, R. T.: *Finite Element Methods for Engineers*, Macmillan, London(1975).

Gallagher, R. H.: *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1975).

Hinton, E., and D. R. J. Owen: *Fintte Element Programming*, Academic Press, London(1977).

Hinton, E., and D. R. J. Owen: *An Introduction to Finite Elememt Computations*, Pineridge Press, Swansea, U. K. (1979).

Huebner, K. H.: *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley-Interscience, New Yock (1975).

Irons, B. M., and S. Ahmad: *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Chichester, U. K. (1979).

Martin, H. C., and G. F. Carey: *Introduction to Finite Element Analysis-Theory and Application*, McGraw-Hill, New York (1973)

Mitchell, A. R., and R. Wait: *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, John Wiley, London(1977).

Nath, B.:*Fundamentals of Finite Elements for Engineers*, Athlone Press, London(1974).

Norrie, D. H., and G. de Vries: *The Finite Element Method: Fundamentals and Applications*, Academic Press, New York (1973).

Norrie, D, H., and G. de Vries: *An Introduction to Finite Element Analysis*, Academic Press, New York(1978).

Oden, J. T.: *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York(1972).

Oden, J. T., and J. N. Reddy: *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, Wiley-Interscience, New York (1976).

Owen, D. R. J., and E. Hinton: *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, Swansea, U. K. (1980).

Pinder, G. F., and W. G. Gray: *Finite Elements in Subsurface Hydrology*, Academic Press, New York (1977).

Rao, S. S.: *The Finite Element Method in Engineering*, Pergamon Press, Oxford(1982).

Robinson, J.: *Integrated Theory of Finite Element Methods*, John Wiley, London(1973).

Rockey, K. C., H. R. Evans, D. W. Griffiths, and D. A. Nethercot: *Finite Element Method—A Basic Introduction*, Crosby Lock-

wood, London(1975).

Segerlind, L. J.: *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley, New York(1976).

Strang, G., and G. Fix: *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1973).

Taylor, C., and T. J. Hughes: *Finite Element Programming of the Navier Stokes Equation*, Pineridge Press, Swansea, U, K, (1980).

Tong, P., and J. N. Rossettos, *Finite Element Method: Basic Technique and Implementation*, MIT Press, Cambridge, Mass. (1977).

Wachspress, E. L.: *A Rational Finite Element Basic*, Academic Press, New York(1975).

Zienkiewicz, O. C.:*The Finite Element Method*, 3d expanded and revised ed., McGraw-Hill, London(1977).

Zienkiewicz, O, C., and Y. K. Cheung: *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, London(1967).

文献介绍

Akin, J. E., D. L. Fenton, and W. C. T. Stoddart: "The Finite Element Method—A Bibliography of Its Theory and Applications,"EM 72-1, Department of Engineering Mechanics, University of Tennessee, Knoxville, Tenn. (1972).

Norrie, D. and G. de Vries: *Finite Element Bibliography*, IFI/Plenum, New York(1976).

Singhal, A. C.: "775 Selected References on the Finite Element Method and Matrix Methods of Structural Analysis," Report S-12, Civil Engineering Department, Laval University, Quebec, Canada(1969).

Whiteman, J. R.:"A Bibliography for Finite Element Methods," TR/9, Department of Mathematics, Brunel University, Oxbridge (1972).

有限元软件介绍

Belytschko, T.:"A Survey of Numerical Methods and Computer

Programs for Dynamic Structural Analysis," *Nuclear Engineering and Design* 23-23, 23-24(1975).

Fredriksson, B., and J. Mackerle, "Suuctural Mechanics Finite Element Computer Programs, Surveys and Availability," LiTH-IKP-R-054, Linkoping Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, Division of Solid Mechanics, Linkeping, Sweden(1975, revised in 1976).

Marcal, P. V., ed., *On General Purpose Finite Element Computer Programs*, ASME Special Publication, American Society of Mechanical Engineers, New York(1970).

Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis" in *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, J. T. Oden, R. W. Clough, and Y. Yamamoto, eds., UAH Press, Huntsville, Ala. (1972), pp. 517-528.

Noor, A. K., "Survey of Computer Programs for Solution of Nonlinear Structural and Solid Mechanics Problems," *Computers and Structures*, 13, pp. 425-465(1981).

Pilkey, W., K. Saczalski, and H. Sehaeffer, eds., *Structural Mechanics Computer Programs, Surveys, Assessments and Availability*, The University Press of Virginia, Charlottesville(1974).

Zukas, J. A., G. H. Jonas, K. D. Kimsey, J. J. Misey, and T. M. Scherrick, "Three-Dimensional Impact Simulations: Resources and Results," in *Computer Analysis of Large-Scale Structures*, K. C. Park and R. F. Jones, Jr., eds., AMD vol. 49, American Society of Mechanical Engineers, New York(1981), pp. 35-63.

第二章　变分公式及其近似式

2-1　若干辅助性概念和公式

2-1-1　概述

有限元法是变分法的分段应用。因此，我们研究变分法。在微分方程的变分解中，有两个基本步骤：

1．使一个已知的微分方程成为变分式。

2．用变分法，如 Ritz 法、Galerkin 法或其他方法求近似解。

本研究中采用“变分公式”这一术语意味着是弱公式，在这个弱公式中，通过交换试函数和因变量之间的导数而将给定的微分方程变成等效的积分形式。对于大多数线性问题，弱公式与二次泛函$I(u)$的最小值是等效的，在固体力学问题中，该二次泛函称为总势能。与普通函数最小值的必要条件相似，二次泛函的最小值的必要条件是它对因变量的一次导数(或一次变分)为零。由变分计算可知，函数的最小值是微分方程的真实解。这个事实激励我们去研究一个给定微分方程的变分公式。

在变分法中，一个已知问题的因变量用适当选择的函数的线性组合$u=\Sigma c_j\phi_j$近似表示。参数c_j是由函数u使得泛函$I(u)$为最小而确定的(或者使u满足问题的弱公式)。

一个给定的微分方程的变分式有一些容易求得近似解的有兴趣的特征。我们通过一个例题来加以说明。

研究求下列微分方程的解的问题：

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[b(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right]+f(x)=0 \quad 当 0<x<L \tag{2.1}$$

其端部条件(或边界条件)为：

$$w(0)=\frac{dw}{dx}(0)=0 \qquad \left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\bigg|_{x=L}=M_0$$
$$\left[\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x=L}=0 \tag{2.2}$$

这个方程式出现在诸如梁的弹性弯曲的研究中。此时，w表示梁的横向挠度，L是梁的总长度，$b(x)>0$是梁的抗弯刚度（即由弹性模量和惯性矩而得），$f(x)$是横向分布荷载，M_0是弯矩（见图2.1a)。解w称为问题的因变量。所有其他事先已知的量（L,b,f,M_0)称为该问题的数据。

当$b(x)$和$f(x)$为x在$(0,L)$内的连续函数时，我们说数据是平滑的，在此情况下，该问题有W，且不仅在$(0,L)$内的每一点x上满足微分方程(2.1)，而且在边界点上满足边界条件(2.2)。作为一个例题，我们来研究b和f是不为零的常数的情况，则可得到方程(2.1)和(2.2)的精确解为：

$$w(x)=\frac{2M_0-fL^2}{4b}x^2+\frac{fL}{6b}x^3-\frac{f}{24b}x^4 \tag{2.3}$$

因而在区域$(0,L)$的每一个点上，解w和它四阶以内的导数都是确定的(即是它们存在且是单调的)。

在大多数实际情况下，问题中所给定的数据并不是平滑的(即在域内不是处处连续的)。例如抗弯刚度可能不连续(即在用不同材料做的组合梁及阶形变截面梁的情况)，或横向荷载f不连续。假定(见图2.1b)：

$$f(x)=f_0H(a-x) \tag{2.4}$$

且$b(x)$是连续的。其中，$H(a-x)$代表海氏阶函数，

$$H(a-x)=\begin{cases}1 & x<a\\ 0 & x>a\end{cases} \tag{2.5}$$

此时，在$x=a$处解(即w)的四阶导数不存在(即它不是单值)。因

此，方程式(2.1)和(2.2)的精确解w在经典的意义上(即w在域的所有点上必须满足微分方程2.1)不存在。当w和它的导数在端点$x=0$和$x=L$之间的点上已给定时，还会遇到类似的困难。

以试函数v乘方程式(2.1)，它是二次可微分的，并满足下列条件：

$$v(0)=\frac{dv}{dx}(0)=0$$

用分部法对第一项积分两次，且使用边界条件(2.2)，得到变分式(见例2.3)：

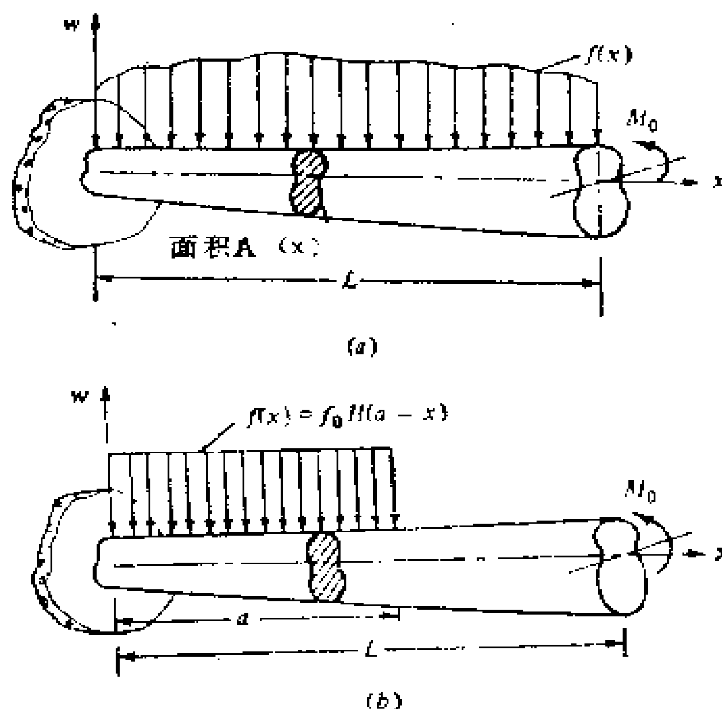


图2.1 数据连续和不连续的问题(H是Heaviside阶函数)
(a)作用连续荷载的悬臂梁A；(b)作用不连续荷载的悬臂梁A

$$0=\int_0^L b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}dx+\int_0^L vf\,dx-\frac{dv}{dx}(L)M_0 \qquad (2.6)$$

试函数v可看作是w中的一个变量，它符合边界条件(2.2)。方程式(2.6)称为与方程式(2.1)和(2.2)有关的弱的、广义的或变分的方程式。w称为方程式(2.1)的弱的、广义的或变分的解。无论何

时，经典的解存在，它与问题的弱解一致。也就是说，变分方程(2.6)与方程(2.1)等效。用公式表示变化地问题，降低了解的连续要求（w仅需微分两次），同时在变分问题(2.6)中，包括方程式(2.2)中第二对边界条件。在方程式(2.6)中，用$\frac{1}{2}$乘含v和w的表达式，并设$v=w$，可得问题的二次泛函，该泛函代表梁的总

$$I(w)=\int_0^L\left[\frac{1}{2}b\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+wf\right]dx-\frac{dw}{dx}(L)M_0 \quad (2.7)$$

势能。应该注意，不是所有的微分方程都容许列出泛函方程式。另一方面，我们不需要二次泛函去建立一个有限元模型。

在本章中，我们的目的是说明变分公式以及与各种边值和初值问题有关的近似式的基本步骤。为此，我们介绍必要的术语符号。

2-1-2 符号

习惯上常用重音标号（或撇号）表示一个变量的函数的导数：

$$f'(x)\equiv\frac{df(x)}{dx} \qquad f''(x)\equiv\frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad (2.8)$$

如此等等。

用适当的下标表示几个变量函数的偏导数：

$$F_x(x,y,z)\equiv\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}$$
$$F_{xy}(x,y,z)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right] \quad (2.9)$$

如此等等。

如果n个变量的函数有直至第m次的偏导数，且这些偏导数在域Ω中是连续的，则可以说该函数在域Ω内是$C^m(\Omega)$阶。对于直角坐标，总是使用字母x和y。

2-1-3 边值问题和初值问题

域和边界 大多数分析的目的是确定称为因变量的未知函数，这些未知函数满足在一个给定域或范围内的一组微分方程式，

也满足在域的边界上的一些边界条件。域是空间的一群点，它们具有这样的性质，即假定P是该域中的一个点，则所有与P充分接近的点都属于该域。这个性质意味着域仅仅由内部的各点组成。如果域中的任意两个点能为一条完全位于该域内的线来连接，则我们说该域是凸域和简单连接域。域的边界是一组这样的点，每一个这样的点的任何相邻点，可能属于该域，也可能不属于该域。从域的定义中我们应该注意，所有边界上的点并不属于该域。在本研究中，我们还将讨论多重连接的域（见图2.2）。我们将符号Ω表示任意一个域，以Γ表示它的边界。

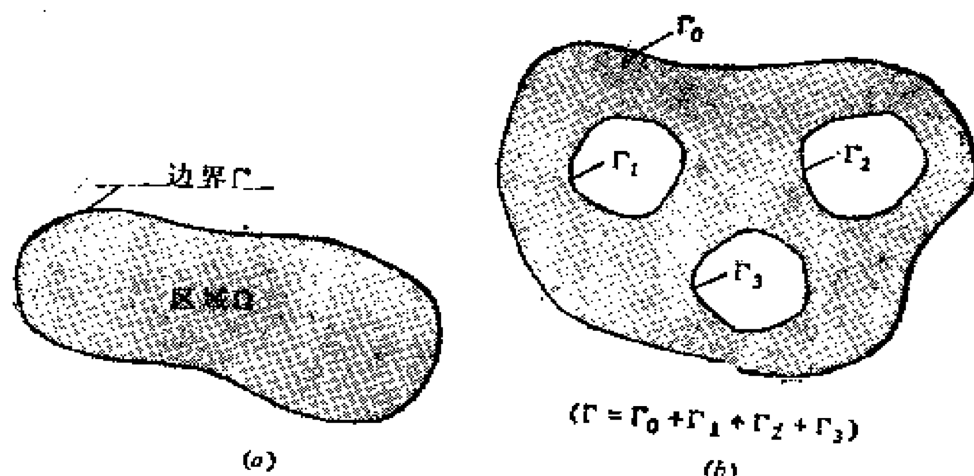


图2.2　具有二维边界的简单连接和多重连接域

(*a*)简单连接域；(*b*)多重连接域($\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$)

当因变量是某一自变量（例如x）的函数，该域为一条线段（即一维），且该域的端点称为边界点。一维问题是不难找到的，该问题中，自内部的点至终点因变量以致它的导数均被指定（如连续梁的弯曲）。当因变量是两个自变量（x和y）的函数时，该域（二维的）是一个面（往往为一个平面），其边界是包围该域的封闭曲线。若自变量数目为3，则该域为三维的（即一个体积），其边界是包围体积的面。因此，如果我们求解索的横向挠度或叶片的热传导问题时，该挠度或温度必须在一个区间，例如$(0,L)$的确定，其中，L为域的长度。若我们求解平面弹性轴对称圆柱体构件的扭转或经

过有对称轴管的气流问题，则在一个平面域内其位移、应力函数或速度必须确定。

如果因变量甚至它的导数在边界要求取定值，微分方程认为是描述边界值问题。初值问题在因变量甚至其导数开始时（即在 $t=0$）就是给定问题。初值问题一般是与时间有关的问题。下面给出边值和初值问题的例子。

边值问题

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)=f \quad 当\begin{cases}0<x<1\\ \Omega=(0,1)\end{cases} \tag{2.10}$$

$$u(0)=d_0 \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=1}=g_0 \tag{2.11}$$

初值问题

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2}+au=f \quad 当0<t\leqslant T. \tag{2.12}$$

$$u(0)=u_0 \qquad \frac{du}{dt}(0)=v_0 \tag{2.13}$$

边值和初值问题

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\rho\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t) \quad 当\begin{cases}0<x<1\\ 0<t\leqslant T_0\end{cases} \tag{2.14}$$

$$u(0,t)=d_0(t) \qquad \left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=1}=g_0(t)$$
$$u(x,0)=u_0(x) \tag{2.15}$$

方程式(2.11)中的条件称为边界条件，而在方程式(2.13)中的条件称为初始条件。当特定值（即d_0，g_0，u_0和v_0）不为零时，这些条件称为非齐次条件；相反则称为齐次条件。如$u(0)=d_0$是一个非齐次的边界条件，而有关的齐次边界条件是$u(0)=0$。

这组特定量（如，a，g_0，d_0，ρ，u_0和v_0）称为问题的数据。微分方程中右边的f为零时称为齐次微分方程。确定常数值λ的问

题为：

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)=\lambda u \quad 当0<x<1$$

$$u(0)=0 \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=1}=0 \tag{2.16}$$

称它为与微分方程(2.10)有关的特征值问题。λ值为特征值。

所谓微分方程的经典(或精确)解，是指同样满足微分方程(即经典解足以按方程式的要求可微分的）和特定的边界条件和初始条件的函数。所谓微分方程的变分解，是指与变分问题有关的解。也就是说，变分解不足以满足微分方程的可微性，但它足以满足一个与微分方程等效的变分方程的可微性。

2-1-4 梯度和发散定理

在微分方程的变分式中，时常采用分部积分。在二维情况中，熟知的分部积分如有梯度和发散定理。在本节中，我们推导几个对将来应用有用的恒等式。

设f和g是单变量$C^4(a,b)$类型的足以可微的函数，由分部积分得：

$$\int_a^b \frac{df}{dx}g\,dx=-\int_a^b f\frac{dg}{dx}dx+f(b)g(b)-f(a)\,g(a)$$

$$\int_a^b \frac{d^2f}{dx^2}g\,dx=-\int_a^b \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx+\frac{df}{dx}(b)g(b)-\frac{df}{dx}(a)g(a)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left[C(x)\frac{d^2f}{dx^2}\right]g\,dx &= -\int_a^b \frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{d^2f}{dx^2}\right]\frac{dg}{dx}dx+\frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{d^2f}{dx^2}\right]g\bigg|_{x=a}^{x=b}\\ &=\int_a^b C(x)\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2g}{dx^2}dx+\left[\frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{d^2f}{dx^2}\right]g-C(x)\frac{d^2f}{dx^2}\frac{dg}{dx}\right]_{x=a}^{x=b}\end{aligned} \tag{2.17}$$

式中，$C(x)$是$C^2(a、b)$类型函数。

令∇和∇^2分别代表三维空间的梯度算子和Laplace算子：

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.18}$$

式中，$\hat{\mathbf{i}}$，$\hat{\mathbf{j}}$和$\hat{\mathbf{k}}$分别代表沿x，y和z(成直角）坐标的单位基本矢量，若$F(x,y,z)$和$\mathbf{G}(x,y,z)$是$C^1(\Omega)$类型的函数，则下列梯度定理和发散定理成立。

梯度定理

$$\int_\Omega \mathrm{grad}(F)dxdydz \equiv \int_\Omega \nabla F dxdydz = \oint_\Gamma \hat{\mathbf{n}}F ds \tag{2.19a}$$

$$\int_\Omega\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial F}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial F}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial F}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$$= \oint_\Gamma\left(\hat{\mathbf{i}}n_x + \hat{\mathbf{j}}n_y + \hat{\mathbf{k}}n_z\right)Fds$$

发散定理

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{G})dx\,dydz \equiv \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{G}dx\,dy\,dz = \oint_\Gamma \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{G}ds$$

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \tag{2.19b}$$

$$= \oint_\Gamma\left(n_xG_x + n_yG_y + n_zG_z\right)ds$$

式中，点表示矢量的标量积，$\hat{\mathbf{n}}$表示域Ω的表面Γ的法向单位矢量，n_x，n_y和n_z（G_x，G_y和G_z）是$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{G})$的正交分量，而表面积分上的圆圈表示它在边界的整个表面上的积分。单位矢量$\hat{\mathbf{n}}$的方向余弦n_x，n_y和n_z可写成：

$$n_x = \cos(x,\hat{\mathbf{n}}) \quad n_y = \cos(y,\hat{\mathbf{n}}) \quad n_z = \cos(z,\hat{\mathbf{n}})$$

式中，$\cos(x,\hat{\mathbf{n}})$是指正的x方向与单位矢量$\hat{\mathbf{n}}$之间夹角的余弦。

下面的等式可以采用梯度定理和发散定理推出，这些等式在后面将是有用的。假定F和G是三维域Ω中确定的标量函数，则有

$$\int_{\Omega}(\nabla F)G\,dx\,dy\,dz = -\int_{\Omega}(\nabla G)F\,dx\,dy\,dz + \oint_{\Gamma}\hat{\mathbf{n}}FG\,ds$$

$$\int_{\Omega}\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial F}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial F}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial F}{\partial z}\right)G\,dxdydz = -\int_{\Omega}\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial G}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial G}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial G}{\partial z}\right)F\,dxdydz + \oint_{\Gamma}\left(\hat{\mathbf{i}}n_x+\hat{\mathbf{j}}n_y+\hat{\mathbf{k}}n_z\right)FG\,ds \tag{2.20a}$$

$$-\int_{\Omega}(\nabla^2 F)G\,dxdydz = \int_{\Omega}\nabla F\cdot\nabla G\,dxdydz - \oint_{\Gamma}\frac{\partial F}{\partial n}G\,ds \tag{2.20b}$$

式中，$\partial/\partial n$表示标准的导数算子：

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla = n_x\frac{\partial}{\partial x}+n_y\frac{\partial}{\partial y}+n_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.21}$$

2-1-5 泛函

我们在后面要考虑下列形式的积分表达式〔例如，见方程式(2.7)中的$I(w)$〕

$$I(u) = \int_a^b F(x,u,u')\,dx \tag{2.22}$$

式中，被积函数$F(x,u,u')$是自变量x，u和$\frac{du}{dx}$的一个给定函数。积分值$I(u)$取决于u，因此符号$I(u)$是恰当的。然而对于一个给定的u，$I(u)$表示一个标量。我们将使用泛函这个词来描述由积分定义的函数，这些函数的自变量本身也是函数。不严格地说，泛函是“函数的函数”。在数学上，泛函是将u变换成标量$I(u)$的算子I。对于所有使$I(u)$有意义的方程组$u(x)$，称为泛函的域空间。在标记I之下，所有函数u的图象集合称为泛函$I(u)$的范围。按定义，一个泛函的范围是实数场的子集。

对于任一标量α和β以及自变量u和v，当且仅当符合下列关系

式时，泛函$I(u)$称为u的线性函数：

$$I(\alpha u+\beta v)=\alpha I(u)+\beta I(v)$$

如果泛函$B(u,v)$在它的自变量u和v的每一个中为线性，则认为它是双线性的。

由方程式(2.6)中的最后两项得到一个线性型式的实例。

$$I(v)=-\int_0^L vf dx+\frac{dv}{dx}(L)M_0$$

由方程式(2.6)中的第一项得到一个双线性型式的实例，

$$B(v,w)=\int_0^L b\frac{dv}{dx}\ \frac{dw}{dx}dx$$

按上述定义的观点，我们可改写方程(2.6)为下列形式：

$$B(v,w)=I(v)\quad 对任意v$$

*2-1-6　变分符号

研究函数$F=F(x,u,u')$。对于自变量x的一个任意固定值，F取决于u和u'。u中的变化αv称为u的变分，用δu表示

$$\delta u=\alpha v\quad \alpha=\text{constant}$$

算子δ称为变分符号，函数u的变分δu表示在因变量为一个固定值时函数$u(x)$中容许的变化。如果在一个点上（通常是在边界上）给定u，由于给定值可能变化，则u的变分为零。因此，函数u的变分应满足在u的边界条件下的齐次形式。在u是给定的点上，u的变分δu变为零。且它在别的地方是随机的，即δu是一个虚拟变化。与u中的变化（即u变为$u+\alpha v$）相联系，在F中有一个变化。与两个变量的函数的全微分类似，在u处F的第一次变分按下式确定

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \tag{2.23}$$

它可以由

$$\frac{\delta F}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{F(x,u+\alpha v,u'+\alpha v')-F(x,u,u')}{\alpha}\right]$$

将$F(x,u+\alpha v,u'+\alpha v')$展开成$\alpha$幂得出。注意第一次变分式即方程式(2.23)和$F$的全微分式

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial u'}du' \tag{2.24}$$

的相似性。当u变为$u+\delta u$时，由于x不是变化的，$dx=0$，δF和dF之间的相似性变得明显。亦即δ相当于对因变量的微分算子的作用。很容易证明和、积、除、乘方等等的变分定律与相应的微分定理是十分相似的。例如，当$F_1=F_1(u)$和$F_2=F_2(u)$，则

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \delta(F_1\pm F_2)=\delta F_1\pm\delta F_2\\
&2.\quad \delta(F_1F_2)=F_2\delta F_1+F_1\delta F_2\\
&3.\quad \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right)=\frac{F_2\delta F_1-F_1\delta F_2}{F_2^{\,2}}\\
&4.\quad \delta(F_1)^n=n(F_1)^{n-1}\delta F_1
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

此外，变分算子可与微分算子和积分算子交换：

$$\frac{d}{dx}(\delta u)=\frac{d}{dx}(\alpha v)=\alpha\frac{dv}{dx}=\alpha v'=\delta u'=\delta\left(\frac{du}{dx}\right) \tag{2.26a}$$

$$\delta\int_a^b u(x)dx=\int_a^b\delta u(x)dx \tag{2.26b}$$

作为泛函变分的例子，我们来研究方程式(2.7)中的二次式，得：

$$
\begin{aligned}
\delta I(w)&=\delta\int_0^l\left[\frac{b}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+wf\right]dx-\delta\left[\frac{dw}{dx}(L)\right]M_0\\
&=\int_0^l\left[b\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)\delta\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)+\delta wf\right]dx-\frac{d\delta w}{dx}(L)M_0\\
&=\left\{\int_0^L\left(b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}+vf\right)dx-\frac{dv}{dx}(L)M_0\right\}\alpha
\end{aligned}
$$

上式在最后一个步骤中将$\delta w=\alpha v$代入进去。最后一个方程式，除了α的常数倍数外，与方程式（2.6）是完全相同的。因此，在方程式（2.7）中的二次泛函的第一次变分方程式与（2.6）中的弱形式是等效的。

2-2　边值问题的变分公式

2-2-1　动机

促使考虑边值问题变分式的动机来自这样一个事实，即变分

的近似法（例如Ritz法，Galerkin 法，最小二乘法，排列法或一般的加权残数法）是根据实际问题的变分（或弱的）论点。由于有限元法在任何变分法中是建立要求分段应用的近似函数的一个方法，因此需要研究微分方程的变分公式。除上述原因外，在一般方法中，变分式还是简便的。边界条件分为自然边界条件和基本边界条件，它们在近似函数的推导中起关键作用。

我们在本节的主要目的是建立一个给定微分方程的变分式，并将与方程式有关的边界条件分类。

2-2-2 变分（或弱）公式

假设要求我们找下列二维的偏微分方程的变分公式：

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0 \quad 在\Omega中 \qquad (2.27a)$$

边界条件为：

$$\frac{\partial F}{\partial u_x}n_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}n_y=\hat{q} \quad 在\Gamma_1上 \quad u=\hat{u} \quad 在\Gamma_2上 \qquad (2.27b)$$

式中，$F=F(x,y,u,u_x,u_y)$；Γ_1和Γ_2互不相连，其和是总的边界，$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$；$u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$等等，以及$n_x$和$n_y$是垂直于边界的单位矢量的方向余弦。

方程式（2.27）描述大多数二维二次边值问题的一般公式。下面（见目录2-2）我们将举几个方程式(2.27）的例题。在讨论方程式（2.27）的变分式之前，先研究函数F的例子。

例题2.1 作为方程式（2.27）的一个特殊情况，考虑F按下式给定的情况：

$$F=\frac{1}{2}\left[k_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+k_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]-Qu$$

它出现在沿x和y方向热传导系数分别为k_1和k_2，热量为Q的一个二维介质热传导的研究中。有

$$\frac{\partial F}{\partial u}=-Q \quad \frac{\partial F}{\partial u_x}=k_1\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial u_y}=k_2\frac{\partial u}{\partial y}$$

方程式（2.27）变成Fourier热传导方程式，有关的边界条件分别为：

$$-Q-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \text{在}\Omega$$

$$\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)n_x+\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)n_y=\hat{q} \quad \text{在}\Gamma_1\text{上} \quad u=\hat{u} \quad \text{在}\Gamma_2\text{上}$$

式中，$\hat{q}$指在边界的Γ_1部分规定的热通量，$\hat{u}$是在边界的Γ_2部分给定的温度。

返回到方程式（2.27）的变分公式，在这个公式化中，我们概括出三个基本步骤。第一步包括以一个试函数v乘该方程式（乘等式一边的所有项），且在该问题的域上对乘积积分：

$$0=\int_{\Omega}v\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right]dxdy \qquad (2.28)$$

假定试函数满足方程式（2.27b）中第二个边界条件的齐次形式，该试函数可看作是u的变分。此外，v是一个任意的连续函数。注意在方程式（2.28）中的积分式与我们开始的微分方程具有相同的阶次的导数。尽管Galerkin法最初是用积分式去寻求近似解，但是在Galerkin法的大多数应用中，我们采用弱公式。

第二步包括由自变量u到试函数v的微分式变换以及变分式允许的边界条件类型的辨别。显然，$\partial F/\partial u_x$包含$u_x=\partial u/\partial x$，$\partial F/\partial u^y$包含$u_y=\partial u/\partial y$（还可能包含$u$，$u_x$和$u_y$的乘积）。因此，希望将对$x$和$y$的偏微分变换为对$v$的微分，使最终的表达仅包括$u$和$v$的一阶导数。微分形式中$u$变换到$v$的目的，是要均衡对$u$和$v$的连续性要求，注意这一点是很重要的。这将导致在变分问题中对解u的连续性要求比在原始方程中的要弱一些。在微分的变换过程中，我们得到边界项，它确定在解中（自然的或基本的）边界条件的性质。

对于（2.28）方括号内的第二项和第三项，采用方程式（2.20）的型式（等式组成的形式），可得：

$$0=\int_{\Omega}\left[v\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right]dxdy$$

$$-\oint_{\Gamma} v\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}n_y\right)ds \qquad (2.29)$$

此处我们将自然边界条件和基本边界条件相等。作为一般的法则，v的给定系数及它在边界积分中的导数构成自然边界条件，因而

$$\frac{\partial F}{\partial u_x}n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}n_y = \hat{q} \quad 在\Gamma_1上$$

是方程式（2.27b）中的自然边界条件。对与边界积分中任意函数v相同形式的因变量所作的规定，构成基本的边界条件。在目前的情况下，仅v（不是它的导数）在边界积分中出现。因此，给定的u是基本的边界条件。

鉴于上述边界条件的分类，我们现在可重申试函数的边界条件。试函数应如同方程式（2.27）要求的是可微的，并满足给定的基本边界条件的齐次式。

边界条件的分类在传统的变分法和有限元法中都是有用的。如同下面将要看到的，包括在问题的基本边界条件中的变量为初始变量，而包括在自然边界条件中的变量为次变量。初始变量是连续的，而次变量在一个问题中可能是不连续的。

公式的第三步即最后一步是，用给定的边界条件简化边界项，以及当存在：

$$0 = \int_{\Omega}\left(v\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)dxdy - \int_{\Gamma_1} v\hat{q}ds$$

$$-\int_{\Gamma_1} v\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}n_y\right)ds \qquad (2.30)$$

列出有关的二次泛函数的等式。

由方程式(2.29)将边界项分为两项，一项与Γ_1有关，另一项与Γ_2有关，且将自然边界条件代入第一项，可得公式(2.30)。由于Γ_2上$v=0$(与$\delta_u=\delta\quad\hat{u}=0$等效)，第二项为零，得

$$0 = \int_{\Omega}\left(v\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)dxdy$$

$$-\int_{\Gamma_1} v\,\hat{q}\,ds \qquad (2.31)$$

如果F与u是线性关系，比如说$\frac{\partial F}{\partial u}=f(x,y)$，采用包含$u$和$v$或仅包含$v$的公式给出与方程式(2.31)的弱公式有关的双线性的和线性的公式，它们分别为：

$$B(v,u)=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)dxdy \tag{2.32}$$

$$l(v)=-\int_{\Omega}vfdxdy+\int_{\Gamma_1}v\hat{q}\,ds$$

由于u所要求的连续性，由基本方程中的C^2降低为变分方程中的C^1，对于方程式(2.31)，"弱公式"这个名词是恰当的。公式(2.31)形式的方程式形成近似变分法的基础，因此也形成有限元法的基础。

无论何时，泛函B(·,·)是双线性的和对称的，$B(u,v)=B(v,u)$和$L(v)$是线性的。与方程式(2.31)的变分式有关的二次泛函，由下式（见Reddy和Rasmussen，1982）可得到：

$$I(u)=\frac{1}{2}B(u,u)-L(u) \tag{2.33}$$

现在我们考虑在一维和二维的微分方程中几个有代表性的例题，并建立它们的变分方程式。这些例题在有限元法的学习中是有重要意义的。

例题2.2 考虑微分方程

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)-cu+x^2=0$$

$$\text{对于}\ 0<x<1 \tag{2.34}$$

边界条件为

$$u=0 \qquad a\frac{du}{dx}(1)=1 \tag{2.35}$$

已知$f=-x^2$，　$\hat{q}=1$和$\hat{u}=0$。

按照上面概括的建立变分关系的步骤，得（对于试函数v）

$$0=\int_0^1 v\left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)-cu+x^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left(a\frac{dv}{dx}\ \frac{du}{dx} - cvu + vx^2 \right) dx - \left(va\frac{du}{dx} \right)\Big|_0^1 \qquad (2.36)$$

由边界项可知，u的规定是基本的边界条件，而$a\dfrac{du}{dx}$的规定是自然边界条件。因为在$x=1$处$a\dfrac{du}{dx}=1$，而在$x=0$处 $v=0$（因为此处u是给定的），我们可得变分式

$$0 = \int_0^1 \left(a\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} - cvu \right) dx + \int_0^1 vx^2 dx - v(1) \qquad (2.37a)$$

$$0 = B(v,\ u) - l(v) \qquad (2.37b)$$

式中

$$B(v,\ u) = \int_0^1 \left(a\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} - cvu \right) dx$$

$$\mathbf{L}(\ v\ ) = -\int_0^1 vx^2 dx + v(1) \qquad (2.38)$$

由于 $B(\cdot,\cdot)$ 是双线性的和对称的，$L(\cdot)$ 是线性的，由方程式(2.33)我们可以计算二次泛函，

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[a\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - cu^2 + 2ux^2 \right] dx - u(1) \qquad (2.39)$$

方程式(2.34)类型的方程式出现在弹性基础上($c\neq 0$)，缆索的挠度的研究中，或出现在叶片的热传导($c=0$)的研究中。在前者中，u指横向挠度，c是基础的模量，a是缆索的拉力。二次泛函的前两项表示弹性应变能，最后一项表示分布力经过位移u所作的功。

另一个受方程式（2.10）控制的实际问题的例题示于表2.1中。

下面的例题说明一维四阶微分方程的变分公式。

例题2.3 考虑四阶微分方程及方程式(2.1)和(2.2)中的边界条件，由于该方程式包含一个四阶微商，为了相等地分配因变量 w 和试函数v之间的导数，我们应该用分部积分法将它积分两次。

表2.1 几个一维二次方程式的例题

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)=f,\qquad 对于 0<x<L$$

基本的边界条件：$u|_{x=0}=d_0$；自然的边界条件：$\left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L}=g_0$

范围	初始变量 u	a	源项 f	次变量 g_0
1.缆索的横向挠度	横向挠度	缆索的拉力	横向分布荷载	轴向力（一般未知）
2.一杆的轴向变形	纵向位移	EA E＝模量 A＝横截面面积	杆表面上摩擦力或接触力	轴力
3.沿叶片在热交换器中的热传导	温度	热传导率	热源	热流量
4.通过管道的流	流体静压力	$\pi D^4/128\mu$ D＝直径 μ＝粘度	流源（一般为零）	流率
5.在不变的压力梯度F通过一个沟槽的不可压缩的层流	速度	粘度	压力梯度	轴向应力
6.通过可渗透介质的流	流的高差	渗透系数	流体流量	渗出量
7.静电力	静电势	介电常数	电荷密度	电通量

$$0=\int_0^L v\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)+f\right]dx$$

$$=\int_0^L\left[\left(-\frac{dv}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)+vf\right]dx+\left[v\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_0^L$$

$$=\int_0^L\left[b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}+vf\right]dx+$$

$$+\left[v\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)-\frac{dv}{dx}b\frac{d^2w}{dx^2}\right]\Bigg|_0^L \tag{2.40}$$

由最后一行得出w和dw/dx的规定构成基本的（几何的或静力的）边界条件，而$(d/dx)(bd^2w/dx^2)$（剪力）和bd^2w/dx^2（弯矩）的规定构成自然的（或动力的）边界条件。此时，指定的基本边界条件是：

$$w(0)=\frac{dw}{dx}(0)=0$$

因此，要求

$$v(0)=\frac{dv}{dx}(0)=0$$

自然边界条件是

$$\left[\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x=L}=0 \qquad 和 \qquad \left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=L}=M_0$$

得

$$0=\int_0^L\left[b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}+vf\right]dx-\frac{dv}{dx}\Bigg|_{x=L}M_0 \tag{2.41}$$

或

$$B(v,\ w)=l(v) \tag{2.42}$$

式中

$$B(v,\ w)=\int_0^L b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}dx$$

$$l(v)=-\int_0^L vfdx+\frac{dv}{dx}\Bigg|_{x=L}M_0 \tag{2.43}$$

如一般所知道的梁的总势能的二次形式为

$$I(w)=\int_0^L\left[\frac{b}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+wf\right]dx-\frac{dw}{dx}\Bigg|_{x=L}M_0 \tag{2.44}$$

对于四阶的问题应注意，基本的边界条件不仅包含有因变量，还包含有它的一阶导数。如前所指出的，在任一边界点上，仅有两个边界条件中的一个可被规定。例如，在一个边界点上规定w，则在同一点上不能再规定$(dw/dx)(bd^2w/dx^2)$（剪力）；反之亦然。类似的评述适用于dw/dx和bd^2w/dx^2。此时应注意，w和dw

$/dx$是初始变量，$(d/dx)(bd^2w/dx^2)$和bd^2w/dx^2是次变量。

下面的例题和二维二次微分方程有关。应该注意在例题中使用的自然边界条件的特殊形式。

例题2.4 考虑由直线AB，BC，CD，DF，EF，GH和HA(见图2.3)围成的二维域Ω中的稳定热传导，其控制方程式为：

$$-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=0 \text{ 在}\Omega\text{内} \tag{2.45}$$

式中，k为该域中材料的传导系数。要求建立该方程式的弱公式或变分公式。

如前面已述方法，有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega\left[-vk\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\right]dxdy \\ &= \int_\Omega k\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdy-\oint_\Gamma vk\left(\frac{\partial T}{\partial x}n_x+\frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)ds \end{aligned} \tag{2.46}$$

按照边界条件的类型，可将边界Γ分成四段(见图2.3)：

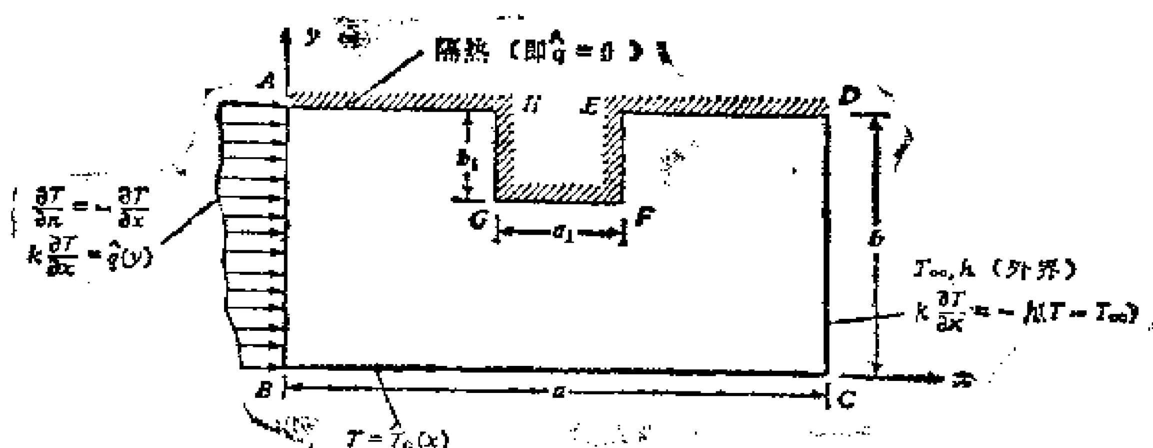


图2.3　在二维域中的热传导和对流热传导

$$\begin{aligned} &\Gamma_1=AB \text{（规定的传导率，}\hat{q}(y)\text{）} \quad n_x=-1,\ n_y=0 \\ &\Gamma_2=BC \text{（规定的温度，}\hat{T}_0(x)\text{）} \quad n_x=0,\ n_y=-1 \\ &\Gamma_3=CD \text{（对流的边界，}T_\infty\text{）} \quad n_x=1,\ n_y=0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$\Gamma_4 = DEFGHA$ （隔热边界，$\frac{\partial T}{\partial n}=0$）

使用边界信息，方程式(2.46)中的边界积分可简化如下（注意在Γ_2上$v=0$）：

$$\oint_{\Gamma} v\left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)ds = -\int_{\Gamma_1} v\cdot\hat{q}ds + \int_{\Gamma_2} 0\cdot\left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)ds$$

$$-\int_{\Gamma_3} v[h(T-T_\infty)]ds + \int_{\Gamma_4} v\cdot 0ds$$

$$= -\int_0^b v(0,\ y)\hat{q}(y)dy$$

$$-h\int_0^b v(a,\ y)[T(a,\ y)-T_\infty]dy$$

(2.48)

我们得其弱公式，

$$0 = \int_\Omega k\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdy + \int_0^b v(0,\ y)\hat{q}(y)dy$$

$$+h\int_0^b v(a,\ y)[T(a,\ y)-T_\infty]dy \qquad (2.49)$$

集中与v和T有关的项到$B(\cdot,\cdot)$中，那些仅与v有关的项，则集中到$l(\cdot)$中。可将方程式(2.49)写成下列形式：

$$B(v,\ T)=l(v) \qquad (2.50)$$

式中

$$B(v,\ T) = \int_\Omega k\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdy$$

$$+h\int_0^b v(a,\ y)T(a,\ y)dy$$

$$l(v) = -\int_0^b v(0,\ y)\hat{q}(y)dy + h\int_0^b v(a,\ y)T_\infty dy$$

(2.51)

二次泛函为：

$$I(T)=\frac{k}{2}\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_0^b T(0,\ y)\hat{q}(y)dy$$

$$+h\int_0^b \frac{1}{2}[T^2(a,\ y)+2T(a,\ y)T_\infty]dy \qquad (2.52)$$

表2.2　Poisson方程 $-\nabla\cdot(k\nabla u)=Q$的几个例题

自然边界条件：$k\frac{\partial u}{\partial n}+h(u-u_\infty)=q$，基本边界条件：$u=\hat{u}$

应用范围	初始变量 u	材料常数 k	源变量 Q	次变量 q，$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$
热传导	温度T	传导率k	热源 Q	热流q〔由传导率k $(\partial T/\partial n)$ 和热对流 $h(T-T_\infty)$ 而来〕
理想流的非旋流	流线函数 ψ	密度ρ	物质量 σ（一般为零）	速度：$-\frac{\partial\psi}{\beta x}=v$ $\frac{\partial\psi}{\partial y}=u$
	速度势ϕ	密度ρ	物质量 σ（一般为零）	$\frac{\partial\phi}{\partial x}=u$，$\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$
地下水流	压头ϕ	渗透率k	补充量 Q（或抽吸，$-Q$）	渗出量q $q=k\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 速度：$u=-k\frac{\partial\phi}{\partial x}$ $v=-k\frac{\partial\phi}{\partial y}$
等截面构体的扭转	应力函数ϕ	$k=\frac{1}{G}$，G = 剪切模量	$Q=2\theta$ θ = 每单位长度扭转角	$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\tau_{zy}$ $\frac{\partial\phi}{\partial y}=\tau_{zx}$ τ_{zx}，τ_{zy}是剪应力
静电学	标电位ϕ	介电常数 ε	电荷密度 ρ	位移动量密度 D_x
静磁学	磁场势能 ϕ	导磁率 μ	电荷密度 ρ	磁流密度 B_x
弹性薄膜的横向挠度	横向挠度 u	$k=T$ T = 薄膜中的拉力	横向分布荷载	法向力q

应该注意，在上述例题中，边界的积分分别沿y和x轴去确定，这是因为边界平行于x轴或y轴。

式(2.45)类型的方程式还出现在其他工程领域内。表2.2列有几个出现方程式(2.45)的物理问题的例题。 ■

本节最后一个例题与二维空间中一对共轭的偏微分方程有关。

例题2.5 考虑下列一对偏微分方程：

$$\left.\begin{aligned}C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+f=0\\ C_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+g=0\end{aligned}\right\}\text{在}\Omega\text{中} \qquad (2.53)$$

其边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}n_x+C_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y=\hat{s}\\ C_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x+C_{22}\frac{\partial v}{\partial y}n_y=\hat{t}\end{aligned}\right\}\text{在}\Gamma_1\text{上}$$

$$\left.\begin{aligned}u=\hat{u}\\ v=\hat{v}\end{aligned}\right\}\text{在}\Gamma_2\text{上} \qquad (2.54)$$

象这样的方程式出现在平面弹性问题的研究中。

在本例题中，有两个因变量和两个自变量。我们要建立该方程式的变分公式。先从下式着手

$$0=\int_\Omega \xi\left[C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+f\right]dxdy$$

$$0=\int_\Omega \zeta\left[C_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+g\right]dxdy \qquad (2.55)$$

式中，ξ和ζ为试函数，它们分别满足u和v的齐次的基本边界条件。采用积分等式(2.20)得

$$0=-\int_\Omega\left[C_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\xi f\right]dxdy+$$

$$+\oint_{\Gamma}\xi\left[C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}n_x+C_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y\right]ds \quad (2.56a)$$

$$0=-\int_{\Omega}\left[C_{12}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+C_{22}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-\zeta g\right]dxdy$$

$$+\oint_{\Gamma}\zeta\left[C_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x+C_{22}\frac{\partial v}{\partial y}n_y\right]ds \quad (2.56b)$$

由边界积分得出，u和v的规定构成基本的边界条件，边界积分下方括号内表达式的规定，构成该问题的自然边界条件。在Γ_1上利用u和v的自然边界条件和在Γ_2上利用ξ和ζ的齐次基本边界条件得变分式（在Γ_2上$\xi=\zeta=0$）

$$\int_{\Omega}\left[C_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dxdy$$

$$=\int_{\Gamma_1}\xi\hat{s}ds+\int_{\Omega}\xi fdxdy$$

$$\int_{\Omega}\left[C_{12}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+C_{22}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\int_{\Gamma_1}\zeta\hat{t}ds+\int_{\Omega}\zeta gdxdy \quad (2.57)$$

将方程式（2.56a和b）中的表达式相加并将系数合并，可得与该问题有关的双线性和线性泛函：

$$B((\xi,\zeta),(u,v))=\int_{\Omega}\left[C_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right.$$

$$+C_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\left.+C_{22}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy$$

$$l((\xi,\zeta))=\int_{\Omega}(\xi f+\zeta g)dxdy+\int_{\Gamma_1}(\xi\hat{s}+\zeta\hat{t})ds \quad (2.58)$$

■

习　　题

对于下列微分方程和有关的边界条件，建立微分的陈述（即弱形式和何时有可能的二次泛函）：

2.1　一维热传导或热对流

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+f=0 \quad \text{对于} 0<x<1$$

$$u(0)=0 \quad a\frac{du}{dx}+h(u-u_\infty)=q \quad \text{在} x=1 \text{时}$$

式中，a和f是x和h，u_∞的函数，q为常数。

2.2 弹性地基上的梁

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)+kw+f=0 \quad \text{对于} 0<x<L$$

$$w=b\frac{d^2w}{dx^2}=0 \quad \text{在} x=0, L \text{时}$$

式中，b和f是x的函数，k为常数。

2.3 一非线性方程

$$-\frac{d}{dx}\left(u\frac{du}{dx}\right)+f=0 \quad \text{对于} 0<x<1$$

$$\frac{du}{dx}(0)=0 \quad u(1)=\sqrt{2}$$

2.4 有一个弹簧端的杆的纵向变形(特征值问题)

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+\lambda u=0 \quad \text{对于} 0<x<L$$

$$u(0)=0 \quad \left(a\frac{du}{dx}+ku\right)\bigg|_{x=L}=0$$

2.5 梁的大变形弯曲

$$-\frac{d}{dx}\left\{a\left[\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]\right\}+P=0 \quad \text{对于} 0<x<L$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2v}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left\{a\frac{dv}{dx}\left[\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]\right\}+f=0$$

$$u=v=0 \text{在} \ x=0, \ L \text{时}$$

$$\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=0}=0 \qquad \left(b\frac{d^2v}{dx^2}\right)\bigg|_{x=L}=M_0$$

式中，a，b，P和f是x的函数，M_0为一个常数。

2.6 二阶方程

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+f=0$$

在Ω中，$u=u_0$在Γ_1上

$$\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)n_x+\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)n_y=t_0$$

在Γ_2上

式中，$a_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2)$，f是二维域Ω中位置(x, y)的给定函数。u_0和t_0是边界Γ的区段Γ_1和Γ_2上的已知函数。

2.7 二维粘性不可压缩流的Navier-Stokes方程（压力—速度表达式）

$$\left.\begin{aligned}&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\text{在}\Omega\text{中}$$

$$\left.\begin{aligned}u=u_0\\v=v_0\end{aligned}\right\}\text{在}\Gamma_1\text{上}$$

$$\left.\begin{aligned}&\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y\right)-\frac{1}{\rho}Pn_x=\hat{t}_x\\&\nu\left(\frac{\partial v}{\partial x}n_x+\frac{\partial v}{\partial y}n_y\right)-\frac{1}{\rho}Pn_y=\hat{t}_y\end{aligned}\right\}\text{在}\Gamma_2\text{上}$$

2.8 粘性不可压缩流体的二维流（线函数—涡流公式）

$$\left.\begin{aligned}-\nabla^2\psi-\zeta=0\\-\nabla^2\zeta+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\text{在}\Omega\text{中}$$

假定必要边界条件给定为零。

在习题2.9至2.11中，建立与时间有关问题的变分公式（提示：将方程式中的时间导数看成是微分方程中源项部分）。

2.9

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+b\frac{\partial u}{\partial t}=f\quad\text{对于}0<x<1$$

$$u(0,t)=0\qquad\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=1}=T_0\quad u(x,0)=u_0$$

式中，a，b和f是坐标x和时间t的函数。

2.10

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f\quad\text{对于}0<x<L$$

$$u(0,t)=0\qquad\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0\qquad\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\bigg|_{x=L}=M_0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\bigg|_{x=L}=P\qquad u(x,0)=u_0\qquad\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0$$

式中，a,b和f是坐标x和时间t的函数，M_0，P，u_0和v_0为常数。

2.11

$$-k\nabla^2 u+\rho\frac{\partial u}{\partial t}=f \quad 在\Omega中$$

$$u=0在\Gamma_1中 \quad k\frac{\partial u}{\partial n}=t \quad 在\Gamma_2 \quad u=u_0在t=0时$$

式中，k，ρ和t为常数，f是Ω中坐标 (x,y)的给定函数。

2-3 近似的变分法

2-3-1 概述

本节中我们的目的是研究近似的变分法，包括 Ritz 法，Galerkin法，Petrov-Galerkin法，最小二乘法和配点法。所有这些方法都是寻找适当近似函数的线性组合形式的近似解。由近似解满足弱公式或在研究中使方程式二次泛函为最小，求出线性组合中的参数。在选择近似函数方面，各种方法彼此不同。

本节的主要目的是介绍若干传统的变分法。有限元法利用变分法来列子域（称为单元）的独立方程式。正如我们在第三和第四章中将会看见的，有限元法中近似函数的选择，与传统的变分法中是不同的。

2-3-2 Ritz法

考虑求解u的变分问题，如

$$B(v,\ u)=l(v) \tag{2.59}$$

对于足可微分的v，它满足u的基本边界条件的齐次式。当泛函 B 为双线性和对称的且l是线性的时，则方程式(2.59) 中的问题等效于使二次泛函为最小

$$I(u)=\frac{1}{2}B(u,u)-l(u) \tag{2.60}$$

Ritz法对方程式 (2.59) 寻找下列有限级数形式的近似解

$$u_N=\sum_{j=1}^{N}c_j\phi_j+\phi_0 \tag{2.61}$$

式中，常数c_j称为Ritz系数，按方程式(2.59)对于$v=\phi_i$成立($i=$

1, 2, …, N) 来选择:

$$B\left(\phi_i, \sum_{j=1}^{L} c_j\phi_j+\phi_0\right)=l(\phi_i) \quad i=1,2,\cdots,N \qquad (2.62)$$

若B是双线性的，有

$$\sum_{j=1}^{N} B(\phi_i, \phi_j)c_j=l(\phi_i)-B(\phi_i,\phi_0) \qquad (2.63)$$

上式是N个常数c_j情况下的N个线性代数方程组。矩阵系数 $b_{ij}=B(\phi_i, \phi_j)$的列（和行）必须是线性无关的，以使方程（2.63）中的系数矩阵能求逆。

对于对称的双线性形式，可将Ritz法看作是求方程式（2.61）形式的解，在该方程式中，由使相应于对称双线性形式的二次泛函即方程式(2.60)中的泛函$I(u)$为最小来确定其参数。根据方程式(2.61)，用u_N代替u代入方程式并积分之后，泛函$I(u)$ 成为参数$c_1, c_2\cdots\cdots$ 的一个普通（二次）函数。对于$I(c_1, c_2, \cdots, c_N)$的极小值，必要的条件是它对每一个参数的偏导数为零:

$$\frac{\partial I(c_j)}{\partial c_1}=0, \qquad \frac{\partial I(c_j)}{\partial c_2}=0,\cdots, \quad \frac{\partial I(c_j)}{\partial c_N}=0 \quad (2.64)$$

因此，有N个包含N个未知数$c_j(c_j=1, 2,\cdots,N)$的线性代数方程。对于线性对称的双线性形式，这些方程式正好与方程式（2.63）中的相同。当然，如$B(\cdot,\cdot)$不是对称的，则不能得到二次泛函。也就是说，方程(2.63)较方程式（2.64）更为一般，且当$B(\cdot,\cdot)$为双线性和对称时，它们是相同的。本研究的许多有趣的问题中，都将有对称的双线性形式。

再回到方程式(2.61）中的Ritz近似式，我们列出近似函数$\phi_i(i=1, 2,\cdots, N)$和ϕ_0所要求的性质。所选择的ϕ_0要满足该问题所规定的基本边界条件。若规定的基本边界条件均为齐次的，则$\phi_0=0$。由于ϕ_0满足规定的基本边界条件，我们要求$\phi_i(i=1, 2, \cdots, N)$ 满足基本边界条件的齐次式，以便在规定的基本边界条件的点上，$u_N=\phi_0$。由于ϕ_i符合齐次基本边界条件，选$v=\phi_i$与试函数的要求是一致的。除上述要求外，还要求ϕ_i符合下列条件：

1．a．ϕ_i应使$B(\phi_i, \phi_j)$较好确定且不为零〔即如同双线性形式$B(\cdot, \cdot)$所要求的足够地可微分〕。

b．ϕ_i最低限度应符合该问题基本边界条件的齐次形式。

2．对于任一N，$\{\phi_i\}_{i=1}^N$以及$B(\phi_i, \phi_j)$的列（和行）同时是线性无关的。

3．$\{\phi_i\}$是完整的。 (2.65)

对于线性问题，上述对近似函数的要求随N值增加保证Ritz法解收敛于精确解。收敛性的含义如下：

$$I(u_N) \geqslant I(u_M) \quad 对于N \leqslant M \tag{2.66}$$

对任一值N，前面计算的矩阵系数b_{ij}和列矢量$F_i = l(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0)$的元素仍然不改变，而且还应加上原有的系数重新计算行和列。下面我们考虑几个Ritz法应用的实例。

例题2.6 考虑例题2.2的微分方程($a \doteq c = 1$)：

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \quad 对于0 < x < 1 \tag{2.67}$$

我们考虑两组边界条件：

第一组：$u(0) = 0 \quad u(1) = 0$

第二组：$u(0) = 0 \quad u'(1) = 1$ (2.68)

第1组 双线性泛函和线性泛函为：

$$B(v, u) = \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} - vu\right)dx \quad l(v) = -\int_0^1 vx^2 dx \tag{2.69}$$

由于两种边界条件[$u(0) = u(1) = 0$]是基本的类型，我们必须按N个参数的Ritz近似法选择ϕ_i，以符合条件$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$。我们选下列函数：$\phi = 0$，和

$$\phi_1 = x(1-x), \ \phi_2 = x^2(1-x), \ \cdots, \ \phi_N = x^N(1-x) \tag{2.70}$$

应该指出，若选如函数$\phi_1 = x^2(1-x)$，$\phi_2 = x^3(1-x)$，等等，则违背了(2.65)条件中的第3条要求，因为它们不能用来形成精确解的线性项x。作为一条规则，我们必须从选最低次的允许

函数开始。

对眼前的问题，N个参数的Ritz解为

$$u_N = c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x) + \cdots + c_N x^N(1-x) \tag{2.71}$$

将上述表达式代入变分问题$B(v, u) = l(v)$，得

$$\int_0^1 \left[\frac{d\phi_i}{dx}\left(\sum_{j=1}^{N} c_j \frac{d\phi_j}{dx}\right) - \phi_i\left(\sum_{j=1}^{N} c_j\phi_j\right)\right] dx = -\int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

或

$$\sum_{j=1}^{N} B(\phi_i, \phi_j) c_j = l(\phi_i) \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.72}$$

计算系数$b_{ij} \equiv B(\phi_i, \phi_j)$和$l_i \equiv l(\phi_i)$，得

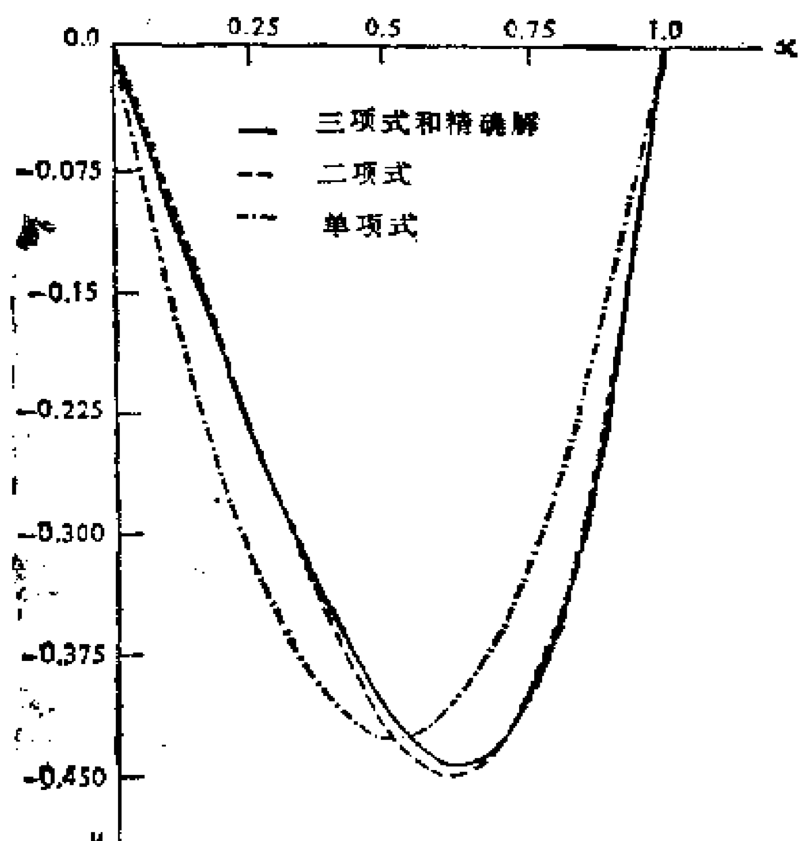


图2.4 方程式(2.74)的精确解与Ritz解(2.71)的比较方程式(2.67)的$N = 1, 2$和3及$u(0) = u(1) = 0$

$$b_{ij}=\int_0^1\{[ix^{i-1}-(i+1)x^i][jx^{j-1}-(j+1)x^j]$$
$$-(x^i-x^{i+1})(x^j-x^{j+1})\}dx$$
$$=\frac{2ij}{(i+j)[(i+j)^2-1]}$$
$$-\frac{2}{(i+j+1)(i+j+2)(i+j+3)}$$
$$l_j=-\int_0^1 x^2(x^i-x^{i+1})dx=-\frac{1}{(3+i)(4+i)} \qquad (2.73)$$

该情况下的精确解为：

$$u(x)=\frac{\sin x+2\sin(1-x)}{\sin 1}+x^2-2 \qquad (2.74)$$

Ritz系数值以及Ritz 解与精确解的比较示於表2.3和图2.4。

表2.3　方程的Ritz解和精确解的比较

$-\frac{d^2u}{dx}-u+x^2=0$　对于$0<x<1$　$u(0)=u(1)=0$

Ritz系数⁺	x	Ritz 解 $(-10u)$			精确解
		$N=1$	$N=2$	$N=3$	
$N=1$:	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$C_1=-0.1667$	0.1	0.1500	0.0885	0.0954	0.0955
$N=2$:	0.2	0.2667	0.1847	0.1890	0.1890
$C_1=-0.0813$	0.3	0.3500	0.2783	0.2766	0.2763
$C_2=-0.1707$	0.4	0.4000	0.3590	0.3520	0.3518
$N=3$:	0.5	0.4167	0.4167	0.4076	0.4076
$C_1=-0.0952$	0.6	0.4000	0.4410	0.4340	0.4342
$C_2=-0.1005$	0.7	0.3500	0.4217	0.4200	0.4203
$C_3=-0.0702$	0.8	0.2667	0.3486	0.3529	0.3530
	0.9	0.1500	0.2115	0.2183	0.2182
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

+　四个参数的Ritz解与精确解直至小数点后四位都是相同的。

采用方程式(2.64)[代替方程式(2.63)]可得相同的结果。有：

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2-u^2+2x^2u\right]dx$$

$$I(c_j)=\frac{1}{2}\int_0^1\Big[\Big(\sum_{j=1}^{N}c_j\frac{d\phi_j}{dx}\Big)^2-\Big(\sum_{j=1}^{N}c_j\phi_j\Big)^2$$

$$+2x^2\Big(\sum_{j=1}^{N}c_j\phi_j\Big)\Big]dx \tag{2.75}$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=0=\int_0^1\Big[\frac{d\phi_i}{dx}\Big(\sum_{j=1}^{N}c_j\frac{d\phi_j}{dx}\Big)-\phi_i\Big(\sum_{j=1}^{N}c_j\phi_j\Big)$$

$$+\phi_i x^2\Big]dx\equiv\sum_{j=1}^{N}b_{ij}c_j-l(\phi_i)$$

式中

$$b_{ij}=\int_0^1\Big(\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}-\phi_i\phi_j\Big)dx\quad l(\phi_i)=-\int_0^1 x^2\phi_i dx \tag{2.76}$$

第2组 对于第2组边界条件，其双线性形式如同方程式(2.69)所给出的是相同的。线性式为：

$$l(v)=-\int_0^1 vx^2dx+v(1) \tag{2.77}$$

在这种情况下，所选择的 ϕ_i 仅符合基本边界条件 $\phi_i(0)=0$。下述 ϕ_i 的选择会遇到下列要求：

$$\phi_i=x^i \tag{2.78}$$

系数 b_{ij} 和 l_i 为：

$$b_{ij}=\int_0^1(ijx^{i+j-2}-x^{i+j})dx=\frac{ij}{i+j-1}-\frac{1}{i+j+1}$$

$$l_i=-\int_0^1 x^{i+2}dx+1=-\frac{1}{i+3}+1 \tag{2.79}$$

在目前情况下，精确解为：

$$u(x)=\frac{2\cos(1-x)-\sin x}{\cos 1}+x^2-2 \tag{2.80}$$

Ritz 解与精确解的比较列于表2.4。

例题2.7 一根悬臂梁，在单位长度的集度为 f 的均匀横向荷载和端弯矩 M_0 作用下，考虑求该梁横向挠度的问题（见例题2.3），

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)+f=0 \quad 对于\begin{cases}0<x<L\\ EI>0\end{cases} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}&w(0)=\frac{dw}{dx}(0)=0 \qquad \left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\Big|_{x=L}=M_0\\ &\left[\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x=L}=0\end{aligned} \tag{2.82}$$

使用变分式（2.42）和（2.44）：$B(v,\ w)=l(v)$，我们现在来求一个N个参数的Ritz解，式中：

$$\begin{aligned}&B(v,\ w)=\int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}dx\\ &l(v)=\int_0^L -fvdx+M_0\frac{dv}{dx}\Big|_{x=L}\end{aligned} \tag{2.83}$$

表2.4　方程式的 Ritz 解与精确解的比较

$$-\frac{d^2u}{dx^2}-u+x^2=0 \qquad 对于0<x<1 \qquad u(0)=0 \quad \frac{du}{dx}(1)=1$$

Ritz 系数⁺	Ritz 解 u				精确解
	x	$N=1$	$N=2$	$N=3$	
$N=1$:	0	0.0	0.0	0.0	0.0
$C_1=1.125$	0.1	0.1125	0.1280	0.1271	0.1262
$N=2$:	0.2	0.2250	0.2529	0.2518	0.2518
$C_1=1.295$	0.3	0.3375	0.3749	0.3740	0.3742
$C_2=-0.1511$	0.4	0.4500	0.4938	0.4934	0.4934
$N=3$:	0.5	0.5625	0.6097	0.6099	0.6112
$C_1=1.283$	0.6	0.6750	0.7226	0.7234	0.7244
$C_2=-0.1142$	0.7	0.7875	0.8324	0.8337	0.8340
$C_3=-0.02462$	0.8	0.9000	0.9393	0.9407	0.9402
	0.9	1.0120	1.043	1.044	1.043
	1.0	1.125	1.144	1.144	1.144

＋　四个参数的Ritz解与精确解直至小数点后四位都是相同的。

我们选代数坐标函数ϕ_i，它符合基本边界条件$\phi_i(0)=\phi_i'(0)=0$。用下式表示w和v：

$$w_N(x)=\sum_{j=1}^{N}c_j\phi_j \quad v=\phi_i=x^{i+1} \tag{2.84}$$

当f=常数时，将方程式(2.84)代入方程式(2.83)，得：

$$b_{ij}=\int_0^L EI(i+1)ix^{i-1}j(j+1)x^{j-1}dx$$

$$=\frac{EIij(i+1)(j+1)(L)^{i+j-1}}{i+j-1}$$

$$l(\phi_i)=\frac{-f(L)^{i+2}}{i+2}+M_0(i+1)(L)^i \tag{2.85}$$

对于$N=2$(两个参数的解)的情况，有：

$$EI(4Lc_1+6L^2c_2)=-\frac{fL^3}{3}+2M_0L$$

$$EI(6L^2c_1+12L^3c_2)=-\frac{fL^4}{4}+3M_0L^2 \tag{2.86}$$

对c_1和c_2求解，得：

$$c_1=-\frac{5fL^2-12M_0}{24EI} \quad c_2=\frac{fL}{12EI} \tag{2.87}$$

和

$$w_2(x)=\frac{12M_0-5fL^2}{24EI}x^2+\frac{fL}{12EI}x^3 \tag{2.88}$$

对于三个参数($N=3$)的解，得矩阵方程

$$EI\begin{bmatrix}4 & 6L & 8L^2\\ 6L & 12L^2 & 18L^3\\ 8L^2 & 18L^3 & \frac{144}{5}L^4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-fL^2/3+2M_0\\ -fL^3/4+3M_0L\\ -fL^4/5+4M_0L^2\end{Bmatrix} \tag{2.89}$$

上式的解与精确解一致

$$w(x)=\frac{2M_0-fL^2}{4EI}x^2+\frac{fL}{6EI}x^3-\frac{f}{24EI}x^4 \tag{2.90}$$

例题2.8 考虑一个二维域中的Poisson方程：

$-\nabla^2T=1$在$\Omega=\{(x,\ y):0<(x,\ y)<1\}$

$T=0$在边缘$x=1$和$y=1$

$$\frac{\partial T}{\partial n}=0\text{在边缘}x=0\text{和}y=0 \tag{2.91}$$

双线性和线性泛函为

$$B(v,\ T)=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdy$$

$$l(v)=\int_0^1\int_0^1 vdxdy \tag{2.92}$$

对于一个几个参数的Ritz近似值，我们选用下组近似函数（当然，还有许多其他选择）：

$$\phi_i=\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2}\cdot\cos\frac{(2i-1)\pi y}{2}\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2.93}$$

附带说说，ϕ_i也符合该问题的自然边界条件。而选择$\phi_i=\sin(i\pi x)\cdot\sin(i\pi y)$满足基本边界条件，它是不充分的，因为在边缘$x=0$和$y=0$处解不等于零，不能用它来求问题的解答。

在方程(2.92)中，采用方程(2.93)的ϕ_i可计算系数矩阵b_{ij}和矢量l_i，得

$$b_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_i^2}{2} & \text{若}i=j\\[2ex] \dfrac{\alpha_i^2\alpha_j^2}{2(\alpha_i^2-\alpha_j^2)^2} & \text{若}i\neq j\end{cases} \tag{2.94}$$

$$l(\phi_i)=\frac{1}{\alpha_i^2}\qquad \alpha_i=(2i-1)\frac{\pi}{2}$$

该问题的精确解为

$$T(x,\ y)=\frac{1}{2}\left\{(1-y^2)+\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos[(2n-1)\pi y/2]\cosh[(2n-1)\pi x/2]}{(2n-1)^3\cosh(2n-1)\pi/2}\right\} \tag{2.95}$$

单参数和两个参数的Ritz解为

$$T_1=\frac{32}{\pi^4}\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2} \tag{2.96}$$

$$T_2 = 0.3283988\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2} + 0.001976\cos\frac{3\pi x}{2}\cos\frac{3\pi y}{2} \tag{2.97}$$

在区域的中心处上述解较精确解分别差9.3%和0.54%。

如果采用代数多项式，可选$\phi_1=(1-x)(1-y)$或$\phi_1=(1-x^2)\times(1-y^2)$，二者均符合其（齐次的）基本边界条件。而选$\phi_1=(1-x)(1-y)$则不满足该问题的自然边界条件。当选$\phi_1=(1-x^2)(1-y^2)$时，单参数的Ritz解为

$$T_1(x, y)=\frac{5}{16}(1-x^2)(1-y^2) \tag{2.98}$$

在域中心处的T，所得的值为0.17578，与精确解比较，其误差为2.94%。

2-3-3 加权残数法

回顾与微分方程(2.27)有关的积分式(2.28)。注意，我们总可以写出一个微分方程的积分式，而不管该方程式是线性的还是非线性的(对因变量而言)。可是，当所考虑的方程式为非线性的时候，不总是可能建立一个对称的变分式和有关的泛函。尽管Ritz法也可用于非线性问题，它只限于选择试函数用在近似法中。加权残数法是Ritz法的一个推广，其中，试函数可从一组独立的函数中选定。而且当它不能构成弱形式时，可采用加权残数法近似表示方程式的积分式。由于该积分式不包括问题的自然边界条件，应符合问题的边界条件来选择近似函数，另一方面，试函数可选独立的近似函数。这种灵活性对于某些非线性问题来说是一个优点。

本节中，我们首先讨论一般的加权残数法，然后考虑大家熟悉的专有名字(例如Galerkin法、最小二乘法等)的一些特定情况。尽管本著作中对加权残数法用得不多，但是，了解这个方法，对于读者在他的工作中遇到的一些非线性问题建立公式是有益的。

考虑算子方程式

$$Au = \text{在}\Omega\text{中} \tag{2.99}$$

式中，A是一个对于未知因变量u起作用的算子（线性或非线性），它通常是一个微分算子，f是一个已知的位置函数。现提供这种算子的几个例子如下：

$$
\begin{aligned}
&1.\ Au = -\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)\\
&2.\ Aw = \frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\\
&3.\ Au = -\frac{d}{dx}\left(u\frac{du}{dx}\right)\\
&4.\ Au = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\\
&5.\ A(u,\ v) = u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

对于任何标量α和β以及因变量u和v，当且仅当算子A符合下列关系

$$A(\alpha u+\beta v)=\alpha Au+\beta Av \tag{2.101}$$

时，我们将它称为线性算子。容易证明，除开方程式(2.100)中例3和例5的算子外，所有这些算子都是线性算子。当算子不满足(2.101)的条件时，我们说它是非线性算子。

我们不仅要求函数u(即解)要满足算子方程(2.99)，还要求满足与算子有关的边界条件。至此，从所考虑的例题中，与方程式(2.100)的例1、2和例4确定的算子有关的边界条件是显而易见的。

在加权残数法中，解u是用与Ritz法差不多相同的方法按下式近似地表示。

$$u_N=\phi_0+\sum_{j=1}^{N}c_j\phi_j \tag{2.102}$$

式中，ϕ_0必须满足该问题的所有规定的边界条件（如所有规定的边界条件是齐次的，则$\phi_0=0$），和ϕ_j应满足方程式(2.65)的条件。除了对ϕ_j的连续性要求是与方程式(2.99)的要求相同外，ϕ_j还应符合规定的边界条件的齐次式。如同很快将要看到的，当算子

有可能是一个弱公式(如在Ritz法中)，可放弃连续性的要求。

将近似式(2.102)代入算子方程式(2.99)，得到残数（即方程式中的误差）

$$E = A(u_N) - f \neq 0 \quad (2.103)$$

一旦选定 ϕ_0 和 ϕ_j，E 仅仅是自变量和参数 c_j 的一个函数。在加权残数法中，设近似式的加权残数的积分（在整个域上）为零来确定其参数：

$$\int_\Omega \psi_i(x, y)E(x, y, c_j)dxdy = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, N \quad (2.104)$$

式中，ψ_i 是加权函数（通常它与近似函数 ϕ_i 不同）。显然，$\{\psi_i\}$ 应是一个线性独立的集〔否则由方程式(2.104)所得到的方程式将不是线性独立的，因此它无解〕。

对方程式(2.104)的仔细检查表明，方程式(2.28)和方程式(2.104)是同等的，有 $v = \psi_i$。也就是说，加权残数法使用方程式的加权积分式去求解。如果算子容许，我们可以将解的微分式变换成加权函数，从而取消近似函数的连续性要求。

当算子 A 是线性的时，方程式(2.104)可简化成下式

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\int_\Omega \psi_i A(\phi_j) dxdy \right) c_j = \int_\Omega \psi_i [f - A(\phi_0)] dxdy$$

或

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} c_j = f_i \quad (2.105)$$

注意，系数矩阵〔A〕是不对称的

$$A_{ij} = \int_\Omega \psi_i A(\phi_j) dxdy \neq A_{ji} \quad (2.106)$$

有时我们还将加权残数法(当 $\psi_i \neq \phi_i$)归属于Petrov-Galerkin法。当选择不同的 ψ_i 时，该方法有不同的名称。

Galerkin法　当 $\psi_i = \phi_i$ 时，加权残数法是熟知的Galerkin法。当算子是一个线性偶次可微分算子时，Galerkin法归属为Ritz法(因为微分的一半可变换成加权函数)，所得的系数矩阵是对称的。

最小二乘法 最小二乘法寻求式（2.102）形式的解，并按残数（2.103）的平方的积分的极小值来确定常数c_j：

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\int_\Omega E^2(x,y,c_j)dxdy=0$$

或
$$\int_\Omega \frac{\partial E}{\partial c_i}Edxdy=0 \tag{2.107}$$

方程式（2.107）与方程式（2.104）的比较表明，$\psi_i=\partial E/\partial c_i$。若$A$是一个线性算子，则方程式（2.107）变为：

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int_\Omega A(\phi_i)A(\phi_j)dxdy\right)c_j$$
$$=\int_\Omega A(\phi_i)[f-A(\phi_0)]dxdy \tag{2.108}$$

该式给出对称的系数矩阵（但要求微分的阶次与算子方程的阶次相同）。

配点法 配点法根据域Ω中N个选择的点$x^i=(x^i,y^i)$（$i=1,2,\cdots,N$）处方程式中的残数恒等于零的要求，为方程式（2.99）寻求式（2.102）形式解u_N：

$$E(x^i,y^i,c_j)=0, \qquad i=1,2\cdots,N \tag{2.109}$$

为获得一个良好条件的方程组并最终获得一个精确解，选择点x^i是很关键的。可以证明，配点法是在$\psi_i=\delta(x-x^i)$时方程式(2.104)的特殊情况，式中，$\delta(x)$是Dirac δ函数。

$$\int_\Omega f(x)\delta(x-\xi)dxdy=f(\xi) \tag{2.110}$$

Courant法 所谓的Courant法兼有Ritz法和最小二乘法的基本概念（对于线性算子方程式）。该方法用使修正的二次泛函达到极小值的方法来求式（2.102）形式的近似解u_N。

$$I_P(u_N)=I(u_N)+\frac{\gamma}{2}\|Au_N-f\|^2 \tag{2.111}$$

式中，$I(u)$是A为线性时与$Au=f$有关的二次泛函，γ是罚参数（预先指定的）。显然，这个论断仅仅对允许有泛函的算子方程式是有意义的，然而，该方法要求进行艰巨的运算，它使收敛性更好[即是当$N\to\infty$时，有$I_P(u_N)=I(u)$]。

我们应该立即注意，Courant 方法正是在流体流动问题中采用的罚法。此时，条件 $Au-f=0$ 可认为是约束［见Reddy 和 Rasmussen (1982)］。

例题2.9 我们希望求解例题2.6中具有第 2 组边界条件的微分方程。那里选择的近似函数不会满足下列条件：

$$\frac{d\phi_i}{dx}(1)=0 \qquad i=1,2,\ldots$$

对于加权残数法，我们选ϕ_0和ϕ_i ($i=1,2$)为：

$$\phi_0=x \qquad \phi_1=x(2-x) \qquad \phi_2=x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right) \quad (2.112)$$

残数为：

$$E=-\frac{d^2}{dx^2}\left(\phi_0+\sum_{i=1}^{N}c_i\phi_i\right)-\left(\phi_0+\sum_{i=1}^{N}c_i\phi_i\right)+x^2 \tag{2.113}$$

Petrov-Galerkin法 我们选加权函数ψ_i为

$$\psi_1=x \qquad \psi_2=x^2 \tag{2.114}$$

则

$$\int_0^1 xEdx=0 \qquad \int_0^1 x^2Edx=0$$

或

$$\frac{7}{12}c_1+\frac{13}{60}c_2-\frac{1}{12}=0 \quad \frac{11}{30}c_1+\frac{1}{15}c_2-\frac{1}{20}=0 \tag{2.115}$$

解c_i($c_1=103/682$, $c_2=-15/682$)，得解

$$u_{PG}=1.302053x-0.173021x^2-0.014663x^3 \tag{2.116}$$

Galerkin法 取$\psi_i=\phi_i$，得

$$\int_0^1 x(2-x)Edx=0 \qquad \int_0^1 x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right)Edx=0$$

或

$$\frac{4}{5}c_1+\frac{11}{30}c_2-\frac{1}{30}=0 \quad \frac{17}{90}c_1-\frac{3}{35}c_2-\frac{19}{180}=0 \tag{2.117}$$

因此，解变成（其$c_1=1571/5210$, $c_2=-2954/5210$）：

$$u_G=1.60307x-0.86853x^2+0.37799x^3 \tag{2.118}$$

最小二乘法 取$\psi_i=\partial E/\partial c_i$，有

$$\int_0^1 (2-2x+x^2)Edx=0 \quad -\int_0^1\left(2-4x+x^2-\frac{2}{3}x^3\right)Edx=0$$

或 $$\frac{28}{15}c_1-\frac{7}{10}c_2-\frac{13}{60}=0 \quad -\frac{47}{90}c_1+\frac{49}{35}c_2+\frac{19}{180}=0 \qquad (2.119)$$

公式（2.67）的最小二乘近似值为（其$c_1=17346/169932$，$c_2=-6342/169932$）

$$u_L=1.204152x-0.139396x^2+0.02488x^3 \qquad (2.120)$$

配点法 选择点$x=\frac{1}{3}$和$x=\frac{2}{3}$作为配置点，计算这些点上的残数，并令他们为零：

$$E\left(\frac{1}{3}\right)=0: \quad 117c_1-61c_2=18$$

$$E\left(\frac{2}{3}\right)=0: \quad 90c_1+34c_2=18 \qquad (2.121)$$

其解为（$c_1=-1710/9468$，$c_2=486/9468$）

$$u_c=1.3612x-0.12927x^2-0.03422x^3 \qquad (2.122)$$

四种近似解与式（2.80）精确解的比较列于表2.5中。对于这个例题，Petrov-Galerkin法得到更准确的解。

表2.5 具有$u(0)=0$，$u'(1)=1$ 的方程式(2.67)的变分解与精确解的比较

x	u_{exact}	u_{PG}	u_G	u_l	u_c
0.1	0.1262	0.1285	0.1512	0.1191	0.1348
0.2	0.2513	0.2536	0.2889	0.2355	0.2668
0.3	0.3742	0.3754	0.4130	0.3494	0.3958
0.4	0.4943	0.4941	0.5264	0.4610	0.5216
0.5	0.6112	0.6096	0.6316	0.5703	0.6440
0.6	0.7244	0.7221	0.7308	0.6777	0.7628
0.7	0.8340	0.8317	0.8262	0.7831	0.8777
0.8	0.9402	0.9384	0.9201	0.8876	0.9887
0.9	1.0433	1.0424	1.0148	0.9890	1.0954
1.0	1.1442	1.1437	1.1125	1.0533	1.1977

如果没有数学分析，虽然要推断出一个方法较另外的方法更

精确是困难的，但下述综合的意见可说明各种方法的关系。当已知的微分方程式许可一个对称的弱公式时，Ritz法（且 Galerkin 法可转化为Ritz法）可以简化ϕ_i的选择。对于非线性问题，对于因变量的可微分性变弱，即使二次式不存在，Ritz-Galerkin 法也是适宜的。用最小二乘法研究非残性问题比其它方法要做很多的工作。况且对于最小二乘法中的参数形成高次方程式。由两个或两个以上方法结合的近似法（例如最小二乘法和配点法），也被用于相信可以得到更精确的解的问题中。在这个概论性的教材中，不打算讨论这些高等概念。

*2-3-4 与时间有关的问题

在与时间有关的（非稳定的）问题中，假定方程（2.61）的待定参数C_i为时间的函数，而假定ϕ_i取决于空间坐标。这导致按两个步骤求解，这两个步骤均使用近似法。在与时间有关问题的求解中，首先考虑空间近似，再考虑时间（或类似时间）近似。这样一个过程一般称为半离散近似法（在空间）。如同前面几节所讨论的，在空间的半离散变分近似法得到一组时间的普通微分方程，它还要再近似以得到一组代数方程式。与时间有关的问题的空间近似法，对于包含一阶时间导数的方程式，导致下列形式（不考虑空间大小）的一个时间的矩阵微分方程：

$$[A]\left\{\frac{\partial c}{\partial t}\right\}+[B]\{c\}=\{P\} \tag{2.123}$$

而对于含有二阶时间导数的方程式，有

$$[A]\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\right\}+[B]\{c\}=\{P\} \tag{2.124}$$

式中

$$A_{ij}=\int_{\Omega}\phi_i\phi_j dxdy \tag{2.125}$$

以下段落中我们讨论对于一阶和二阶时间导数的近似方案。

一阶(时间)导数的近似式 考虑下列形式的矩阵（微分）方程式

$$[A]\{\dot{c}\}+[B]\{c\}=\{P\} \qquad 对于 0<t\leqslant T_0 \qquad (2.126)$$

式中，$[A]$,$[B]$和$\{P\}$是已知的矩阵，$\{c\}$是待定参数的列矩阵。$\{c\}$上的点表示对时间t的微分。方程式（2.126）对于任意时间$t>0$是成立的。

我们引入一个近似的θ族，它是用下面的两个时间间隔上变量值的线性插值，来近似表示两个相邻时间间隔上因变量时间导数的加权平均值：

$$\theta\{\dot{c}\}_{n+1}+(1-\theta)\{\dot{c}\}_n=\frac{\{c\}_{n+1}-\{c\}_n}{\Delta t_{n+1}}$$

$$对于 0\leqslant\theta\leqslant 1 \qquad (2.127)$$

式中，$\{\cdot\}_n$指时间 $t=t_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i$ 时包含的量值，$\Delta t_n=t_n-t_{n-1}$是第n个时间间隔。如果将时间间隔$[0,T_0]$划分得相等，则$t_n=n\Delta t$。由方程式（2.127），通过选择θ值，可得到一些熟知的不同方案：

$$\theta=\begin{cases}0 & 向前差分(\text{Euler})方案 \quad 有条件的稳定\\ \frac{1}{2} & \text{Grank-Nicolson} 方案 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 无条件的稳定 \\ \frac{2}{3} & \text{Galerkin}法 \\ 1 & 向后差分方案 \quad 有条件的稳定\end{cases}$$

$$(2.128)$$

在方程式（2.126）中，对于时间 t_n 和 t_{n+1}，采用近似式（2.127），可得

$$[A]\{c\}_{n+1}=[A]\{c\}_n+\theta\Delta t_{n+1}(\{P\}_{n+1}-[B]\{c\}_{n+1})$$
$$+(1-\theta)\Delta t_{n+1}(\{P\}_n-[B]\{c\}_n)$$

$$(2.129)$$

重新整理各项，将$\{c\}_{n+1}$用$\{c\}_n$表示，得

$$([A]+\theta\Delta t_{n+1}[B])\{c\}_{n+1}=[[A]-(1-\theta)\Delta t_{n+1}[B]]\{c\}_n$$
$$+\Delta t_{n+1}[\theta\{P\}_{n+1}+(1-\theta)\{P\}_n]$$

或 $$[\hat{A}]\{c\}_{n+1}=[\hat{B}]\{c\}_n+\{P\}_{n,n+1}\equiv\{\hat{P}\}_{n,n+1} \qquad (2.130)$$

式中

$$[\hat{A}] = [A] + \theta\Delta t_{n+1}[B]$$
$$[\hat{B}] = [A] - (1-\theta)\Delta t_{n+1}[B] \quad (2.131)$$

由对矩阵$[\hat{A}]$求逆，可得用时间t_n时的解表示的$t = t_{n+1}$时的解。当$t=0$时，由问题的初始条件其解是已知的，且可用方程式(2.130)来求$t=\Delta t_1$时的解。由于全部时间上列矢量$\{P\}$已知，进一步也就可知道$\{P\}_{n+1}$。

必须指出，如取用较小的时间间隔，我们可指望更好的结果。但实际上，我们愿取尽可能大的时间间隔，以便减少计算费用。较大的时间间隔除了会降低解的精确度外，可能带来一些缺点，数学上导致解的波动。因而，时间间隔上限的估计是很有用的。如果下列方程的最小特征值λ不是负值，稳定性的分析表明，数值方案(2.130)是稳定的（即没有无限制的波动）。

$$\det([\hat{B}] - \lambda[\hat{A}]) = 0 \quad (2.132)$$

更准确地说，有

没有波动的稳定	$0<\lambda<1$	
波动的稳定	$-1<\lambda<0$	(2.133)
不稳定	$\lambda<-1$	

可以证明，Crank–Nicolson法和Galerkin法是稳定的方法（数字的波动可能发生，但它们永远不会成为不稳定的）。

例题2.10 考虑一维偏微分方程（它可能出现在一维热传导问题中）：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0<x<1 \quad (2.134)$$

其边界条件为：

$$u(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \quad (2.135)$$

且初始条件为：

$$u(x,0) = 1.0 \quad (2.136)$$

式中，u是因变量，t为时间，x是独立坐标。

首先，我们建立准变分的表达，其中，时间是固定的（任选

的时间），按一般步骤有

$$0=\int_0^1 v\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(v\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \tag{2.137}$$

由于$x=1$处的齐次自然边界条件及$x=0$处给定的基本边界条件，边界项等于零。

考虑下列形式的两个参数的（半离散）Ritz近似式

$$u(x,t)=\phi_0(x)+\sum_{j=1}^{2}c_j(t)\phi_j(x) \tag{2.138}$$

其中 $\phi_0=0$，$\phi_1=x$和$\phi_2=x^2$。将方程式（2.138）代入方程式（2.137），得

$$\int_0^1\left[\phi_i\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{dc_j}{dt}\phi_j\right)+\sum_{j=1}^{2}c_j\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\right]dx=0 \tag{2.139}$$

$$[A]\{\dot{c}\}+[B]\{c\}=\{0\}$$

式中 $A_{ij}=\int_0^1\phi_i\phi_j dx \qquad B_{ij}=\int_0^1\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx \qquad i,j=1,2$

(2.140)

进行上述的积分，得

$$\frac{1}{60}\begin{bmatrix}20 & 15\\ 15 & 12\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{Bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{2.141}$$

这就完成了空间的半离散化。

方程式(2.141）可求得精确解（如采用拉普拉斯变换法）或近似解（如采用上述瞬时近似法或近似变分法）。在任何情况下，我们应知道c_i的初始条件。因为按现有的近似，初始条件$u(0,x)=1$不可能完全满足[因为 $1=c_1(0)x+c_2(0)x^2$意味着$c_1(0)=0$，$c_2(0)=0$而不满足该条件]，我们只好用一个近似法例如Galerkin法来求初始值$c_i(0)$。

在初始条件下，近似的残数为

$$E=u(x,0)-1=xc_1(0)+x^2c_2(0)-1 \tag{2.142}$$

采用Galerkin法（用最小二乘法可得到同样的结果）

$$\int_0^1 [xc_1(0) + x^2 c_2(0) - 1] x dx = 0$$
$$\int_0^1 [xc_1(0) + x^2 c_2(0) - 1] x^2 dx = 0 \tag{2.143}$$

可得(近似的)初始条件

$$c_1(0) = 4 \qquad c_2(0) = -\frac{10}{3} \tag{2.144}$$

按精确方法，我们可解具有初始条件（2.144）式的常微分方程(2.141)。使用Laplace变换法，可得

$$s[A]\{\bar{c}\} - [A]\{c(0)\} + [B]\{\bar{c}\} = \{0\} \tag{2.145}$$

式中，s是Laplace变换中的变量，$\bar{c}_i$表示c_i的Laplace变换：

$$\bar{c}_i = \int_0^\infty e^{-st} c_i(t) dt \tag{2.146}$$

得

$$\begin{bmatrix} 20s+60 & 15s+60 \\ 15s+60 & 12s+80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 20 \end{Bmatrix} \tag{2.147a}$$

和 $$\bar{c}_1 = \frac{12s+240}{3s^2+104s+240} \qquad \bar{c}_2 = -\frac{10s+120}{3s^2+104s+240} \tag{2.147b}$$

求逆后得

$$c_1(t) = 1.6408 e^{-32.1807t} + 2.3592 e^{-2.486t}$$
$$c_2(t) = -(2.265 e^{-32.1807t} + 1.068 e^{-2.486t}) \tag{2.148}$$

如果用近似的θ族，则得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \Delta t\theta & \frac{1}{4} + \Delta t\theta \\ \frac{1}{4} + \Delta t\theta & \frac{1}{5} + \frac{4\Delta t\theta}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}_{n+1}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - (1-\theta)\Delta t & \frac{1}{4} - (1-\theta)\Delta t \\ \frac{1}{4} - (1-\theta)\Delta t & \frac{1}{5} - \frac{4(1-\theta)\Delta t}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}_n$$

(2.149)

当选择θ和Δt值时，可求得用$t=n\Delta t$时c_i表示的$t=(n+1)\Delta t$的解c_i。初始条件由方程式（2.144）给出。

表2.6表示按方程式(2.148)和方程式(2.149) 给定的c_i所得近似解与下列解析解的比较：

$$\theta(x,t)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x}{\lambda_n} \qquad \lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

(2.150)

表2.6 例题2.10的近似解与解析解（$\Delta t=0.05$）的比较

t	x	解析解	Ritz—Laplace 解	Ritz—Galerkin 解 $\theta=\frac{2}{3}$	Ritz—Galerkin 解 $\theta=\frac{1}{2}$
0.2	0.5	0.5532	0.5555	0.5610	0.5548
	1.0	0.7723	0.7814	0.7913	0.7814
0.4	0.5	0.3356	0.3376	0.3441	0.3372
	1.0	0.4745	0.4777	0.4868	0.4771
0.6	0.5	0.2049	0.2054	0.2113	0.2045
	1.0	0.2897	0.2906	0.2989	0.2900
0.8	0.5	0.1251	0.1249	0.1297	0.1246
	1.0	0.1769	0.1767	0.1836	0.1763
1.0	0.5	0.0764	0.0760	0.0797	0.0757
	1.0	0.1080	0.1075	0.1127	0.1071
1.2	0.5	0.0466	0.04626	0.0489	0.0460
	1.0	0.0659	0.00654	0.0692	0.0652
1.4	0.5	0.0285	0.0281	0.0300	0.0406
	1.0	0.0402	0.0398	0.0425	0.0396

二阶时间导数的瞬时近似法 在结构动力学问题中，运动方程式含有因变量的二阶时间导数。该方程式的半离散（空间）近似结果为下列形式的矩阵微分方程

$$[A]\{\ddot{c}\}+[B]\{c\}=\{F\} \qquad 0<t<t_0 \qquad (2.151)$$

有几种近似方案适用时间导数。最常用的一种方案是

Newmark直接积分法。在Newmark直接积分法中，一次时间导数$\{\dot{c}\}$和函数（时间的）$\{c\}$本身在第$(n+1)$个时间间隔（$\Delta t_1=\Delta t_2=\cdots=\Delta t$）用下列表达式近似：

$$\{\dot{c}\}_{n+1}=\{\dot{c}\}_n+[(1-\alpha)\{\ddot{c}\}_n+\alpha\{\ddot{c}\}_{n+1}]\Delta t$$

$$\{c\}_{n+1}=\{c\}_n+\{\dot{c}\}_n\Delta t+\left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{c}\}_n+\beta\{\ddot{c}\}_{n+1}\right](\Delta t)^2 \tag{2.152}$$

式中，α和β是控制方案的精确性和稳定性的参数，下标n表示在第n个时间间隔（即在时间$t=t_n$时）计算的解。已知选择$\alpha=\frac{1}{2}$和$\beta=\frac{1}{4}$以便得到无条件的稳定（在线性问题中）方案，该方案相当于等平均加速度法。$\alpha=\frac{1}{2}$和$\beta=\frac{1}{6}$的情况相当于线性加速度法。

重新整理方程式（2.151）和（2.152）得

$$[\hat{A}]\{c\}_{n+1}=\{\hat{F}\}_{n,n+1} \tag{2.153}$$

式中

$$\begin{aligned}[\hat{A}]&=[B]+a_0[A]\\ \{\hat{F}\}&=\{F\}_{n+1}+[A](a_0\{c\}_n+a_1\{\dot{c}\}_n+a_2\{\ddot{c}\}_n)\end{aligned} \tag{2.154}$$

一旦$\{c\}$在$t_{n+1}=(n+1)\Delta t$时的解已知，$\{c\}$在t_{n+1}时的一阶和二阶导数（速度和加速度）可按下式计算[重新整理方程式(2.152)的表达式]

$$\begin{aligned}\{\ddot{c}\}_{n+1}&=a_0(\{c\}_{n+1}-\{c\}_n)-a_1\{\dot{c}\}_n-a_2\{\ddot{c}\}_n\\ \{\dot{c}\}_{n+1}&=\{\dot{c}\}_n+a_3\{\ddot{c}\}_n+a_4\{\ddot{c}\}_{n+1}\end{aligned} \tag{2.155}$$

$$a_0=\frac{1}{\beta\Delta t^2}\quad a_1=a_0\Delta t\quad a_2=\frac{1}{2\beta}-1$$

$$a_3=(1-\alpha)\Delta t\quad a_4=\alpha\Delta t$$

对于给定的一组初始条件$\{c\}_0$，$\{\dot{c}\}_0$，和$\{\ddot{c}\}_0$。随时间的增加，我们可以反复地解方程式（2.153），求出任一时间$t>0$的列矢量$\{c\}$和它的时间导数。

几种解释为选择时间间隔和判断初始条件是合适的。尽管Newmark法是无条件的稳定（即对任何Δt值，解是稳定的，然而

它可能是不精确的)，有一种方法去确定Δt值是有帮助的，对该Δt值，其解也是精确的。下列公式可计算时间增量：

$$\Delta t = \frac{T_{min}}{\pi} \tag{2.156}$$

式中，T_{min}是与近似问题有关的最小自振周期。Δt 还可按特征值问题求，它的最小特征值。

$$\text{小于}1. \quad (a_0[A] - \lambda[\bar{A}])\{u\} = 0 \tag{2.157}$$

$\{\dot{c}\}$的初始值通常不可能从问题的说明中得出，在这种情况下，我们可以利用方程式(2.151)，当$t=0$时去计算$\{\dot{c}\}$。

例题2.11 考虑端部固结的等截面梁的动力问题（即非稳定横向运动)。无量纲形式的运动方程如下

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{对于} 0 < x < 1 \text{和} t > 0 \tag{2.158}$$

其边界条件为：

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad x = 0, 1; \quad t > 0 \tag{2.159}$$

其初始条件为：

$$w = \sin\pi x - \pi x(1-x) \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad 0 < x < 1, t = 0 \tag{2.160}$$

在上述问题中，应该注意所有边界条件呈基本的型式。因此，按Galerhin法或Ritz法选择近似函数的标准相同。下述近似函数符合边界条件：

$$\phi_1 = 1 - \cos 2\pi x, \phi_2 = 1 - \cos 4\pi x, \cdots, \phi_n = 1 - \cos 2n\pi x \tag{2.161}$$

半离散近似法的结果为

$$\sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \left(\frac{d^2 c_j}{dt^2} \phi_i \phi_j + c_j \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) dx = 0$$

或

$$[A]\{\ddot{c}\} + [B]\{c\} = 0 \tag{2.162}$$

式中

$$A_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j dx \qquad B_{ij} = \int_0^1 \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \tag{2.163}$$

我们考虑一个单参数(N=1)的近似式的特殊情况，得

$$A_{11}=\frac{3}{2} \qquad B_{11}=\frac{(2\pi)^4}{2} \tag{2.164}$$

且方程式(2.162)变为 $(k^2=B_{11}/A_{11})$

$$\frac{d^2c_1}{dt^2}+k^2c_1=0 \qquad k=\frac{(2\pi)^2}{\sqrt{3}}=22.7929 \tag{2.165}$$

该方程式的精确解为

$$c_1=a\sin kt+b\cos kt \tag{2.166}$$

式中，a和b是由初始条件确定的常数，在初始值w和$\partial w/\partial t$中，残数为

$$\begin{aligned} R_1^0&=w(x,0)-\sin\pi x+\pi x(1-x)\\ &=c_1(0)(1-\cos 2\pi x)-\sin\pi x+\pi x(1-x)\\ R_2^0&=\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)-0=\frac{dc_1}{dt}(0)(1-\cos 2\pi x)\end{aligned} \tag{2.167}$$

按$\phi_1=1-\cos\pi x$时的残数，用Galerkin法，得

$$c_1(0)=0.1107 \qquad \frac{dc_1}{dt}(0)=0 \tag{2.168}$$

上式给出$a=0$，$b=0.1107$。因此求得解为：

$$w(x,t)=0.1107(1-\cos 2\pi x)\cos 22.7929t \tag{2.169}$$

如用Newmark直接积分去解初始条件为方程式(2.168)的微分方程(2.165)，可得：

$$\hat{A}_{11}=\frac{(2\pi)^4}{2}+\frac{3a_0}{2} \qquad \hat{F}_1(0)=0.1661a_0-57.5105a_2 \tag{2.170}$$

且对于$\alpha=\frac{1}{2}$和$\beta=\frac{1}{4}$，有$a_0=4/(\Delta t)^2$。然后，随时间增加，我们需要重复解方程式(2.153)。

对于不同时间间隔用方程式(2.169)和Newmark法给出中点位数(为时间的函数)的数字结果，示于表2.7中(亦可见图2.5)。

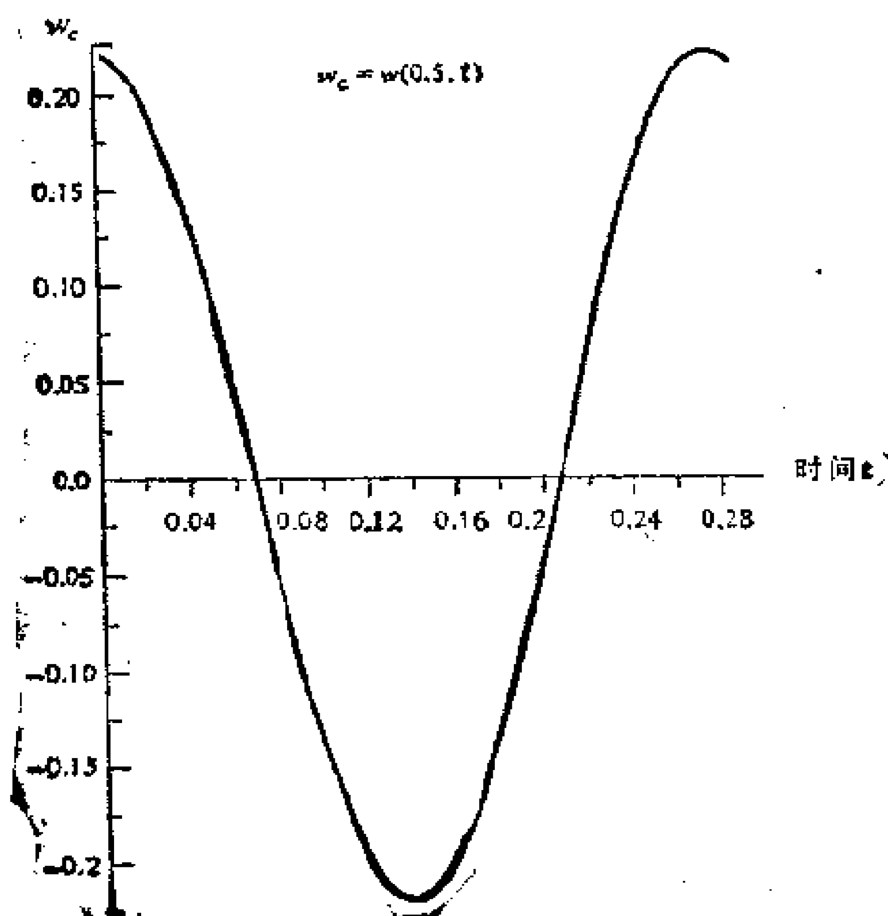


图2.5　非零初始条件的固端梁的中点位移与时间关系曲线（例题2.11）

我们对以上所讨论的时间近似法作两点说明来结束本节的讨论。首先，应该注意，这里所讨论的半离散近似法不应用于波传播问题，因为在这样的问题中，我们不能分离解的空间部分和瞬时部分。其次，我们指出，对于给定的离散模型，稳定的标准取决于采用的变分公式。对于本课题的补充说明，读者可查阅本章末的文献。

我们通过对传统的变分法进行一些评论来结束本章的讨论。这里所做的大多数讨论可用于本研究中讨论其他方法。

2-3-5　几个要点（备注）

以上各节中介绍的传统的变分方法（如Ritz法，Galerkin法、最小二乘法等）提供了求物理问题近似解的简单方法。该法所包

表2.7　例题2.11与时间有关问题的解的比较

t	按空间的Galerkin法，按时间的Newmark的积分			按空间的Galerkin法，按时间的精确解
	$\Delta t=0.01$	$\Delta t=0.005$	$\Delta t=0.0025$	
0.02	0.19898	0.19884	0.19877	0.19879
0.04	0.13626	0.13574	0.13550	0.13558
0.06	0.04595	0.04498	0.04468	0.04455
0.08	−0.05367	−0.05495	−0.05550	−0.05534
0.10	−0.14242	−0.14368	−0.14421	−0.14406
0.12	−0.20233	−0.20312	−0.20347	−0.20336
0.14	−0.22126	−0.22116	−0.22113	−0.22113
0.16	−0.19587	−0.19411	−0.19355	−0.19374
0.18	−0.12992	−0.12750	−0.12640	−0.12677
0.20	−0.03816	−0.03490	−0.03343	−0.03392
0.22	0.06133	0.06482	0.06637	0.06586
0.24	0.14840	0.15132	0.15261	0.15219
0.26	0.20542	0.20699	0.20767	0.20744
0.28	0.22083	0.22046	0.22028	0.22032

含的公式和计算的效果没有怎么与其他许多方法如有限差分法和有限元法进行比较。而且，所获得的近似解是域中位置的连续函数（与分段连续函数或仅在离散点已知的函数是不同的）。

从实际的观点来看，变分法的主要缺点是难于选择近似函数，这样就妨碍了它们与传统的有限差分法的竞争。此外，没有建立它们的系统的步骤。当域的几何和边界条件很复杂时，选择的过程也变得困难。如果函数不是从被解（完整性）方程式的子域空间中选择，则最后得到的解要么为零，要么是错误的。例如，对于一根长度为 L 的悬臂梁的一维 Ritz 解，我们选 $\phi_1=1-\cos(2\pi x/L)$，由于在 $x=L$ 处（位移极小）ϕ_1 为零，因此最后得到的解是错误的。当函数满足问题的基本边界条件 $[w(0)=w'(0)=0]$ 时，它不能用来表示 $x=L$ 处为非零的解。一个适宜的选择可为 $1-\cos(\pi x/L)$。因而，缺乏合适近似函数的选择方法，最后得到的解是不能接受的。对于一个给定的方程式，由于近似函数的

选择与边界条件不一致，我们不能使步骤自动化。

上述讨论表明，变分法可为求得近似解提供一个有效的手段，假如我们能找到一个途径去系统地建立近似函数，对几乎任何几何形状，近似函数仅取决于被解的微分方程，而不取决于该问题的边界条件。后一个特性能够使我们对于一类特定问题（在这一类型中的每一个问题仅在数据上与其他的问题不同）提出计算机程序，即通用计算机程序。对于一个几何复杂的域，由于必须建立函数，看来（请回想确定一个不规则物体的质量中心时组合法的讨论）应将域表示成（或近似为）简单几何形状的集合，对于该简单的几何形状，近似函数的建立变得比较简单。

以下几章中要讨论的有限元法正是根据这些想法。在有限元法中，由几何上简单的形状（单元）的集合来表示（离散化）一个给定的域，且在集合的每一单元上，用任何一种变分法建立控制方程式。对于每一个（典型的）单元利用其基本边界条件（给定值是因变量或它的导数的未知数）来系统地产生近似函数。通过引入单元间边界交点处因变量的连续条件，将这些单元联系在一起。通过对有限元法的这些简要的定性描述（或预习），我们将转入第三章的讨论。

习　题

2.12　计算下列N个参数的Ritz方程式的系数矩阵和等式右边的项：

$$-\frac{d}{dx}\left[(1+x)\frac{du}{dx}\right]=0 \qquad 0<x<1$$

$$u(0)=0 \qquad u(1)=1$$

采用代数多项式的近似函数，详细叙述$N=2$时的结果并计算Ritz系数。

2.13　求习题2.12中方程式的两个参数的Ritz近似式的三角函数。

2.14　对于下列方程式（与承受均布荷载的简支梁$f=f_0$有关的方程式）的N个参数的Ritz法近似值，按下述要求建立方程式：

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)+f_0=0 \qquad 0<x<L$$

$$w=EI\frac{d^2w}{dx^2}=0 \qquad 在x=0,L处$$

(a) 采用代数多项式

(b) 采用三角函数

将两个参数的Ritz解与精确解进行比较。

2.15 当$f=f_0\sin(\pi x/L)$时重复计算习题2.14。

2.16 当$f=f_0\delta(x-L/2)$时重复计算习题2.14，其中，$\delta(x)$为 Dirac δ函数。

2.17 用具有代数多项式的Ritz法求习题2.12的前两个特征值。

2.18 建立特征值问题的N个参数的Ritz方程式。

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)-\lambda u=0 \qquad 0<x<L$$

$$u(0)=0 \qquad a\frac{du}{dx}+ku=0 \quad 在x=L$$

式中，a和k为常数，λ是特征值。使用三角函数，详细说明对于 $N=3$的结果，并计算三个特征值。

2.19 求下列一对方程的单参数Galerkin解：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{v}{a}-f=0\\&\frac{d^2v}{dx^2}+g=0\end{aligned}\right\}\quad 0<x<1$$

$$u(0)=\frac{du}{dx}(0)=0 \qquad v(1)=\frac{dv}{dx}(1)=1$$

式中，a，f和g为常数。

2.20 求下列非线性方程的单参数近似解：

$$-2u\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2=4 \qquad 0<x<1$$

$$u(0)=1 \qquad u(1)=0$$

并与精确解$u_0=1-x^2$进行比较。采用：

(a) Galerkin法； (b) 最小二乘法；

(c) Petrov-Galerkin法 $(\alpha=0)$。

2.21 对下列方程式求单参数 Galerkin解：

$-\nabla^2u=1$ 在Ω＝单位面积上；$u=0$ 在Γ上。

2.22 对一个等边三角形域重复计算习题2.21(提示：对于近似函数，

采用三角形边表示的直线方程)。

2.23 计算在x方向承受均布荷载长度为a的简支矩形板的临界屈曲荷载N_{cr}。采用下列近似函数：

$$\phi_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a},$$

控制方程的积分形式为

$$D\int_0^a\int_0^a v\nabla^4 w dxdy + N_{cr}\int_0^a\int_0^a v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy = 0$$

2.24 用配点法重复计算习题2.18，配置点$x = L/4$，$L/2$，$3L/4$。

2.25 求下列方程的前三个特征值

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - \lambda u = 0 \qquad 0 < x < 1,$$

$$u = 0 \quad 在x = 0, 1处,$$

采用$x = \frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$处的配点。

2.26 考虑微分方程

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \cos\pi x \qquad 0 < x < 1$$

作用下列二组边界条件

1. $u(0) = 0 \qquad u(1) = 0$;
2. $u(0) = 0 \qquad \frac{du}{dx}(1) = 0$,

按下列方法确定三个参数的解：a. Ritz法；b. 最小二乘法；c. 在$x = \frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$的配点法。并与下列精确解比较：

1. $u_0 = \frac{1}{\pi^2}(\cos\pi x + 2x - 1)$;
2. $u_0 = \frac{1}{\pi^2}(\cos\pi x - 1)$。

2.27 考虑无量纲的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1$$

边界条件为：

$$u(0,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0 \qquad 0<x<1,$$

初始条件为：

$$u(x,\ 0)=1,$$

求下列单参数解：

(a) Ritz解；

(b) Galerkin解；

(c) Petrov-Galerkin解 $(v=0)$。

2.28 考虑偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad 0<x<1,$$

边界条件为：

$$u(0,\ t)=u(1,\ t)=0,$$

初始条件为：

$$u(x,0)=x(1-x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,$$

采用(a)Galerkin法，(b)$x=\frac{1}{2}$处配点法，求单参数的解。选择下列近似式：

$$u(x,\ t)=c_1(t)x(1-x)$$

对c_1求常微分方程的精确解。

2.29 按二个参数的Galerkin解重复计算习题2.28。

2.30 证明方程式(2.151)和(2.152) 可以表示成另一种形式［对方程(2.153)］可以表示成另一种

$$[H]\{\ddot{C}\}_{n+1}=\{F\}_{n+1}-[B]\{b\}_n,$$

式中

$$[H]=\beta(\Delta t)^2[B]+[A],$$

$$\{b\}_n=\{c\}_n+\Delta t\{\dot{C}\}_n+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)(\Delta t)^2\{\ddot{C}\}_n$$

2.31 用Newmark积分方案(2.152)将方程式

$$[M]\{\ddot{C}\}+[c]\{\dot{C}\}+[k]\{c\}=\{F\}$$

表示成下列式：

$$[\hat{A}]\{C\}_{n+1}=\{P\}_{n+1},$$

式中

$$[\hat{A}]=[K]+a_0[M]+a_5[C] \qquad a_5=\frac{\alpha}{\beta\Delta t},$$

$$
\begin{aligned}
\{\mathbf{P}\}_{n+1} = \{F\}_{n+1} + [M](a_0\{c\}_n + a_1\{\dot{C}\}_n + a_2\{\ddot{C}\}_n) + [C](a_5\{c\}_n \\
+ a_6\{\dot{C}\}_n + a_7\{\ddot{C}\}_n)
\end{aligned}
$$

$$
a_6 = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \qquad a_7 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right)。
$$

提示　在时间$t+\Delta t$时，表示方程式(a)，并将(2.152)中第二个方程式的$\{\ddot{C}\}_{n+1}$用$\{c\}_{n+1}$表示，然后，将$\{\ddot{C}\}_{n+1}$代入(2.152)中的第一个方程式，以获得每一个只用$\{c\}_{n+1}$表示的$[\dot{C}]_{n+1}$和$\{\ddot{C}\}_{n+1}$的方程式。最后，将得到的表达式代入方程式(a)，并集合$\{c\}_{n+1}$的系数和等号右边的已知量，以获得所希望的量。

参 考 文 献

Becker, M.: *The Principles and Applications of Variational Methods*, MIT Press, Cambridge, Mass. (1964).

Biot, M. A.: *Variational Principles in Heat Transfer*, Clarendon, London (1972).

Finlayson, B. A.: *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York (1972).

Forray, M. J.: *Variational Calculus in Science and Engineering*, McGraw-Hill, New York (1968).

Hildebrand, F. B.: *Methods of Applied Mathematics*, 2d ed., Prentice-Hall, New York (1965).

Lanczos, C.: *The Variational Principles of Mechanics*, The University of Toronto Press, Toronto (1964).

Langhaar, H. L.: *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley, New York (1962).

Leipholz, H.: *Direct Variational Methods and Eigenvalue Problems in Engineering*, Noordhoff, Leyden, The Netherlands (1977).

Lippmann, H.: *Extremum and Variational Principles in Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1972).

Mikhlin, S. G.: *Variational Methods in Mathematical Physics*, Pergamon Press (distributed by Macmillan), New York (1964).

Mikhlin, S. G.: *The Numerical Performance of Variational Methods,* Wolters-Noordhoff, Groningen, The Netherlands (1971).

Oden, J. T., and J. N. Reddy: *Variational Methods in Theoretical Mechanics,* Springer-Verlag, New York (1976); 2d ed. (1983).

Reddy, J. N., and M. L. Rasmussen: *Advanced Engineering Analysis,* John Wiley, New York (1982).

Rektorys, K.: *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering,* Reidel Publishing, Boston (1977).

Schechter, R. S.: *The Variational Methods in Engineering,* McGraw-Hill, New York (1967).

Washizu, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity,* 2d ed., Pergamon Press, New York (1975); 3d ed. (1982).

Weinstock, R.: *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering,* McGraw-Hill, New York (1952).

第三章　一维问题有限元分析

3-1　概述

在第二章结束时曾经指出，传统的变分法(即Ritz法(Ritz)，Galerkin法(Galerkin)，最小二乘法等)由于存在一个严重的缺点，即选择近似函数困难而失效。近似函数除了要满足连续性、线性独立、完备性及基本边界条件外是任意的；当给定域在几何上很复杂时，近似函数的选择变得更加困难。由于近似程度直接受近似函数选择的影响，而构成近似函数并没有系统的方法，这一点是十分伤脑筋的。鉴于这一缺点，尽管近似的变分法在获得近似解时比较简单（一经选择好近似函数就可以获得)，但在计算上从来不能与传统的有限差分法相比。

从理论上说，一种有效的计算方法应该具备以下特点：

1.这种方法应该具有坚实的数学及物理基础。

2.这种方法不应受几何及物理结构的限制，也不应受"荷载"性质的限制。

3.公式化过程应该与域的形状和边界条件无关。

4.这种方法应该有足够的灵活性，不用把整个问题重新进行公式化就能够选择希望的近似程度。

5.这种方法应该是一种系统化的程序，能够在数字计算机上自动完成。

有限元法不但能够克服传统变分法的缺点，而且具有高效计算技术所具有的特点。这种方法实质上是用几何上很简单的形状来表示一个可能是比较复杂的给定域，根据这些简单的几何形状

能够系统地推导出近似函数。然后，对每个元素推导出支配方程的Ritz-Galerkin型近似式。最后通过初始变量或多个变量的连续性把整体中所有元素的方程连结起来，引入问题的边界条件，然后解联立方程组。用有限元法分析一个问题的基本步骤，用流程图列于表3.1中。

表3.1 一个典型问题的有限元分析的步骤

1. 将给定域离散(或表示)为一个预先选择的有限元集合(这一步可以推迟到方程的有限元公式化完成后来作)。
   a. 按预先选好的单元划分有限元网格。
   b. 将节点及单元编号。
   c. 形成解此问题时所需要的几何性质(例如：坐标、截面面积等)。
2. 推导网格中所有典型单元的单元方程式。
   a. 对典型单元建立给定微分方程的变分公式。
   b. 假设典型的因变量u具有以下形式

$$u=\sum_{i=1}^{n}u_i\psi_i$$

   并将它代入步骤2.a中，得到如下形式的单元方程式

$$[k^{(e)}]\{u^{(e)}\}=\{F^{(e)}\}$$

   c. 推导单元的插值函数ψ_i，并计算单元矩阵。如果文献中已经有可供选用的ψ_i，可以直接选用。
3. 将单元方程式集合起来，得到整个问题的方程式。
   a. 通过建立单元节点和总的节点的关系，令初始变量中单元间的连续性条件相等(即局部自由度和全局自由度之间的关系——元素的连通性)。
   b. 令次变量中的平衡条件相等(即局部源或力分量和全局规定的源分量间的关系)。
   c. 用3.a、3.b和3-2-3节例子中所述的叠加性质把单元方程集合起来。
4. 引入问题的边界条件。
   a. 令规定的全局主自由度相等。
   b. 令规定的全局次自由度相等(若在3.b中尚未作的话)。
5. 解集合方程式。
6. 结果的后处理。
   a. 由第5步中算得的初始自由度计算解的梯度或其它希望得到的量。
   b. 用表格和(或)图形的形式重新表示结果。

在下面各节里，我们将介绍形成有限元法基础的若干基本概念。为此，我们把某些实际问题和理论上较为复杂的问题放在本章的后面各节和第四、第五章中去讨论。

3-2 一维二次方程式

求满足以下微分方程

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)-f=0 \qquad 0<x>L \tag{3.1}$$

及边界条件

$$u(0)=0 \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L}=P \tag{3.2}$$

的函数$u(x)$。式中，$a=a(x)$，$f=f(x)$ 及P为问题的数据。方程式(3.1)代表的物理问题的例子见表2.1。解此问题的有限元分析的逐步过程给出如下。

3-2-1 将域离散化为单元

把问题的域$\Omega=(0,L)$划分成称为有限元网格的一组线性单元。图3.1中所示的网格是一个非均匀网格，因为单元是不等长的。任何两个单元的交点叫做单元间的边界。这些交点和可能的若干个中间点称为总的节点。第e个总的节点的坐标记为x_e。

一个问题中所用的单元数目主要决定于单元的类型及要求的精度。每当首次利用有限元法解一问题时，都要逐次改进网格(即增加单元数目)，并通过与采用较高次单元时获得的解进行比较的办法来研究有限元近似的收敛特性。后面将会简要地讨论单元的次的问题。

3-2-2 单元方程式的推导

从网格中取出一个典型的单元$\Omega^e=(x_A,\ x_B)$。在一维问题中，单元为线性单元。假设此典型单元是第e个单元。今欲利用第二章讨论过的任何一种近似的变分法来解此单元上的给定方程式。利用变分法得到的方程一般表示为初始变量（即与规定基本边界条

件有关的变量)和次变量(即与规定自然边界条件有关的变量)间的关系。下面三个步骤说明此典型单元有限元方程式的形成方法。

单元方程式的变分公式由于方程(3.1)对域$(0,L)$有效,特别是对于单元$\Omega^e=(x_A,x_B)$有效。

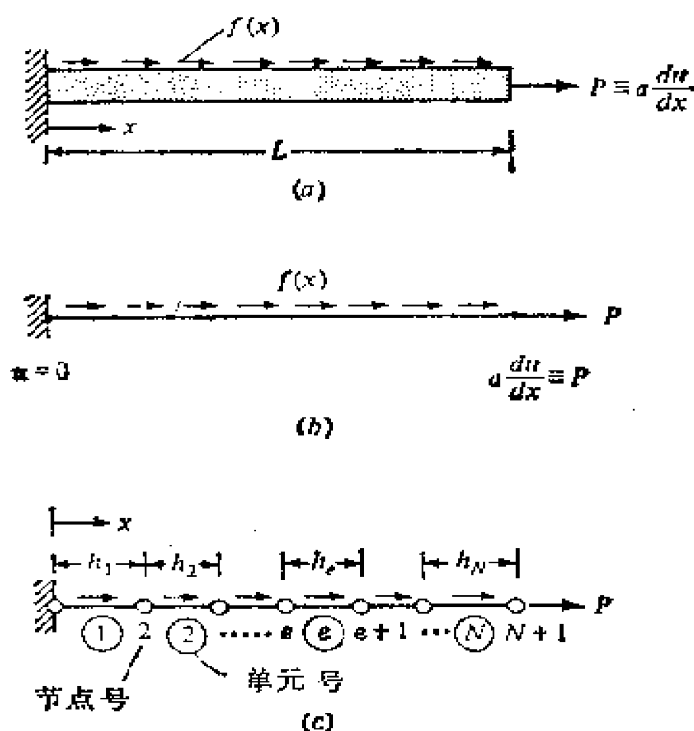


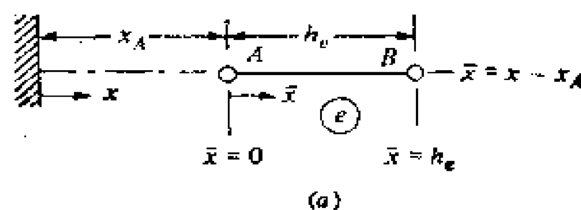
图3.1 一维二次微分方程(3.1)的有限元离散化:(a)物理问题;(b)数学理想化;(c)有限元离散化

根据2-2节所述的过程,可以对于此单元建立方程(3.1)的变分公式(见图3.2):

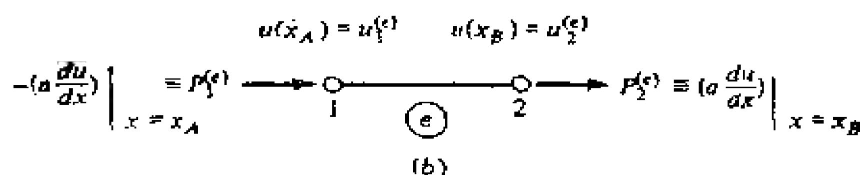
$$0=\int_{x_A}^{x_B}v\left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)-f\right]dx$$

$$=\int_{x_A}^{x_B}\left(a\frac{dv}{dx}\,\frac{du}{dx}-vf\right)dx+\left[v\left(-a\frac{du}{dx}\right)\right]_{x_A}^{x_B}$$

式中,v表示任意连续函数(试函数或加权函数)。由上面表达式的边界项,立刻可以看到在$x=x_A$及x_B处给定的u构成基本边界条件,



(a)



(b)

图3.2 方程(3.1)一维域的有限元离散化：(a)从图3.1c所示的有限元网格中取出的一个典型有限元；x = 总的坐标，$\bar{x}$ = 局部(单元)坐标 = $x - x_A$；(b) 用节点处初始变量u和次变量(adu/dx) 定义的一个典型元

而在$x = x_A$及x_B处给定的$(-adu/dx)$构成此单元的自然边界条件。因此，在此单元节点处的基本未知量为初始变量u及次变量(adu/dx)。令

$$u(x_A) \equiv u_1^{(e)} \qquad u(x_B) \equiv u_2^{(e)} \tag{3.3a}$$

$$\left(-a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x_A} \equiv P_1^{(e)} \qquad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x_B} \equiv P_2^{(e)} \tag{3.3b}$$

这些边界条件是出现在典型单元上的。工程界的学生把图3.2b视为此典型单元的脱离体图形，用方程式(3.3) 的符号，变分形式变为

$$0 = \int_{x_A}^{x_B}\left(a\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} - vf\right)dx - P_1^{(e)}v(x_A) - P_2^{(e)}v(x_B) \tag{3.4a}$$

或

$$0 = B(v, u) - l(v) \tag{3.4b}$$

式中，双线性和线性式由下式给出

$$B(v, u) = \int_{x_A}^{x_B} a\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}dx$$

$$l(v) = \int_{x_A}^{x_B} vfdx + v(x_A)P_1^{(e)} + v(x_B)P_2^{(e)} \tag{3.4c}$$

请注意，自然边界条件(3.3b) 包含在变分型式中。与此单元有关

的二次式由下式给出[由式(2.33)]：

$$I_e(u)=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{a}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-uf\right]dx-P_1^{(e)}u(x_A)-P_2^{(e)}u(x_B) \quad (3.5)$$

单元方程变分的近似公式现在假设欲利用Ritz法求具有边界条件为(3.3a)的变分问题(3.4)的近似解。令在此单元上u的Ritz近似式由下式给出

$$u_e(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(e)}\psi_j^{(e)}(x) \quad (3.6)$$

式中，a_j为待定的参数，$\psi_j(x)$为下面即将讨论的要构造的近似函数。以u的方程(3.6)和$v=\psi_i$代入式(3.4a)，得

$$0=\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{x_A}^{x_B}a\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx\right)a_j-\int_{x_A}^{x_B}\psi_i f dx-P_1^{(e)}\psi_i(x_A)-P_2^{(e)}\psi_i(x_B)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}K_{ij}^{(e)}a_j^{(e)}-F_i^{(e)} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

或

$$[K^{(e)}]\{a^{(e)}\}=\{F^{(e)}\} \quad (3.7)$$

式中，称为刚度矩阵的系数矩阵$K_{ij}^{(e)}$及称为力向量的列向量$F_i^{(e)}$由下式给出

$$K_{ij}=B(\psi_i,\ \psi_j) \qquad F_i=l(\psi_i) \quad (3.8a)$$

或更特殊地

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{x_A}^{x_B}a\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx$$

$$F_i^{(e)}=\int_{x_A}^{x_B}\psi_i f dx+P_1^{(e)}\psi_i(x_A)+P_2^{(e)}\psi_i(x_B) \quad (3.8b)$$

现在我们转入讨论建立此单元的近似函数$\psi_i^{(e)}$的问题。正是在此问题上，有限元法与Ritz法是不同的。

单元近似函数的推导　建立近似函数$\psi_i^{(e)}$所使用的条件与方程(2.65)中所用的条件完全相同。但是，在Ritz法中，这些条件是用作准则，而现在是用来建立$\psi_i^{(e)}$。为了满足方程(2.65)中的条

件1，在选择ψ_i时必须使得方程(3.6)对x至少为一次可微并满足基本边界条件(3.3a)。条件2及3要求$\{\psi_i\}$为线性独立和完备的。起码，若选择以下的线性近似形式

$$u(x)=c_1+c_2x=c_1\phi_1+c_2\phi_2 \tag{3.9}$$

条件1a，2和3就可以满足。连续性条件是显然满足的，$\phi_1=1$及$\phi_2=x$为线性独立，且集合$\{1,x\}$是完备的。为满足其余的要求，即方程(2.65)中的条件1b，要求u满足此单元的基本边界条件，即方程(3.3a)：

$$\begin{aligned}u(x_e)&\equiv u_1^{(e)}=c_1+c_2x_e\\ u(x_{e+1})&\equiv u_2^{(e)}=c_1+c_2x_{e+1}\end{aligned} \tag{3.10a}$$

写成矩阵形式得

$$\begin{Bmatrix}u_1^{(e)}\\ u_2^{(e)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_e\\ 1 & x_{e+1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix} \tag{3.10b}$$

根据$u_1^{(e)}$及$u_2^{(e)}$解c_1和c_2得

$$c_1=\frac{u_1^{(e)}x_{e+1}-u_2^{(e)}x_e}{x_{e+1}-x_e}\qquad c_2=\frac{u_2^{(e)}-u_1^{(e)}}{x_{e+1}-x_e} \tag{3.10c}$$

将方程式(3.10c)的c_i代入式(3.9)，并将$u_i^{(e)}$的系数归并得

$$\begin{aligned}u(x)&=\frac{u_1^{(e)}x_{e+1}-u_2^{(e)}x_e}{x_{e+1}-x_e}+\frac{u_2^{(e)}-u_1^{(e)}}{x_{e+1}-x_e}\\ &=\frac{x_{e+1}-x}{x_{e+1}-x_e}u_1^{(e)}+\frac{x-x_e}{x_{e+1}-x_e}u_2^{(e)}\\ &=\sum_{i=1}^{2}u_i^{(e)}\psi_i^{(e)}\end{aligned} \tag{3.11}$$

式中 $\psi_1^{(e)}=\dfrac{x_{e+1}-x}{x_{e+1}-x_e}\quad \psi_2^{(e)}=\dfrac{x-x_e}{x_{e+1}-x_e}\quad x_e\leqslant x\leqslant x_{e+1}$ (3.12)

表达式(3.11)满足此单元的基本边界条件，且$\{\psi_i\}$对于此单元是连续、线性独立和完备的。比较式(3.11)及式(3.6)后立即可以看到，$n=2$和$\alpha_j^{(e)}=u_j^{(e)}$。

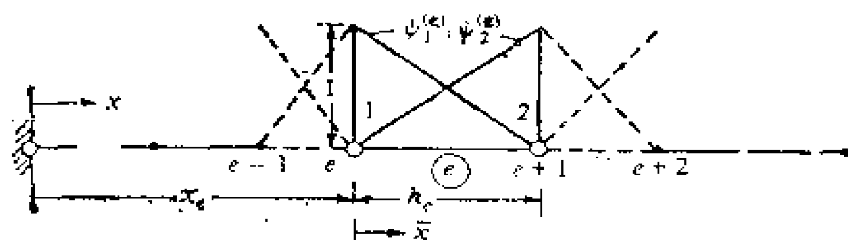
由于近似函数是由式(3.9)中令节点1($x_A=x_e$)处的$u(x)$等于

$u_1^{(e)}$和节点2($x_B=x_{e+1}$)处的$u(x)$等于$u_2^{(e)}$而推导得来的，也就是说是插值的，因此也可以称为插值函数的Lagrange族。此插值函数除了在单元Ω^e有$\psi_i^{(e)}=0$的性质以外，还具有以下一些性质(见图3.3a)：

$$1.\ \psi_i^{(e)}(x_j)=\begin{cases}0 & 若 i\neq j\\ 1 & 若 i=j\end{cases}\qquad x_1=x_e\quad x_2=x_{e+1}$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{2}\psi_i^{(e)}(x)=1 \qquad (3.13)$$

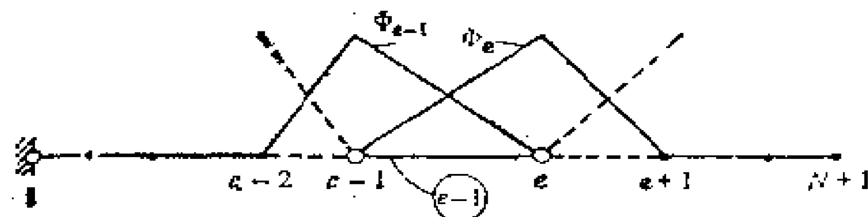
第一个性质乃是插值的结果，而第二性质是由于在近似式(3.9)中包含了常数项。换言之，性质1意味着方程式(3.11)满足条



$\psi_1^{(e)}=1-\bar{x}/h_e$

$\psi_2^{(e)}=\bar{x}/h_e$

(a)



$$\Phi_e=\begin{cases}\psi_2^{(e-1)} & x_{e-1}\leq x\leq x_e\\ \psi_1^{(e)} & x_e\leq x\leq x_{e+1}\end{cases}$$

(b)

图3.3 二节点线性单元($x_A=x_e$，$x_B=x_{e+1}$)的局部和总的插值函数：(a) 对一个线性单元的局部插值函数，(b)对二个节点单元网格的总的插值函数

件(3.3a)及ψ_i是线性独立的。反过来说，若方程式(3.11)满足条件(3.3a)，且ψ_i为线性独立,则ψ_i必有性质1。ψ_i具有的性质2使我们能够将问题归结为一个其因变量在一个区间(例如，一个元素)内为常数，$u_1=u_2=u$的模型。于是，从式(3.11)得

$$u=u_1\psi_1+u_2\psi_2=u(\psi_1+\psi_2)$$

或

$$1=\psi_1+\psi_2$$

应该注意，插值函数的推导与问题无关。插值函数只取决于单元的类型(即几何特性、节点数目、每节点的初始未知数数目等)。因此，我们可以利用形如方程式(3.6)的近似式来推导形如式(3.7)的有限元方程式。当计算方程式(3.8b)的积分时，可以从可用的函数表(式库)中选择一组合适的函数ψ_i。因此，上面推导的线性插值函数不但适用于目前问题的有限元近似中，而且可用于允许变量线性插值的所有问题。有关高次一维Lagrange插值函数将在3-6-2节中讨论。

回到单元方程式(3.7)，由于(3.11)及(3.13)有

$$[K^{(e)}]\{u^{(e)}\}=\{F^{(e)}\} \tag{3.14}$$

式中，对于线性单元($x_A=x_e$及$x_B=x_{e+1}$)

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(e)} &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} a\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx \\ F_i^{(e)} &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i f dx + P_i^{(e)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

方程式(3.13)的性质1，习惯上简化为式(3.8b)的$F_i^{(e)}$，以得到上面的$F_i^{(e)}$。方程式(3.14)及(3.15)表示单元的方程(3.4)〔等效于式(3.1)〕的有限元模型。

应该指出，在方程(3.9)中所选择的u的近似式满足方程(2.65)中最小的要求。我们可以通过加入x单元的不同次幂选择二次、三次和高次近似式(不舍去任何低次项，否则完备性条件将被破坏)。对于高次单元(即二次，三次等)，近似函数的推导步骤同前面所述的仍然一样。注意，一个n次单元要求一个$(n+1)\times(n+1)$阶矩阵的逆〔见方程式(3.10)〕，这样就限制了式(3.9)

和式（3.12）之间所述的步骤的应用。避免求逆的替换推导方法将在3-6节中叙述。对于高次单元，式（3.9）要求核实单元中的附加节点（除节点$x=x_A$及$x=x_B$之外）。换言之，二次近似（它有三个常数C_1、C_2及C_3）要求核实有三个节点（例如第三个节点在单元的中点）。因此，因变量u的近似式次数和单元的节点数之间存在一定的关系。

利用局部坐标系（即在单元中的坐标系）来推导插值函数是更为方便的。令$\bar{x}$代表原点在单元节点1（左端点）的局部坐标（见图3.3）。局部坐标$\bar{x}$通过下面的线性“位移”变换与总的坐标x〔x通常用来描述方程（3.1）〕联系起来

$$x=\bar{x}+x_e \tag{3.16}$$

在局部坐标系中，方程（3.9）及（3.10）取以下形式

$$\left.\begin{aligned}
&u(\bar{x})=\hat{C}_1+\hat{C}_2\bar{x}\\
&u_1^{(e)}\equiv u(0)=\hat{C}_1 \quad u_2^{(e)}\equiv u(h_e)=\hat{C}_1+\hat{C}_2h_e\\
&\begin{Bmatrix}u_1^{(e)}\\u_2^{(e)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&h_e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{C}_1\\\hat{C}_2\end{Bmatrix} \quad h_e=x_{e+1}-x_e\\
&\hat{C}_1=u_1^{(e)} \qquad \hat{C}_2=\frac{u_2^{(e)}-u_1^{(e)}}{h_e}
\end{aligned}\right\} \tag{3.17a}$$

最后得到

$$u=\sum_{j=1}^{2}u_j^{(e)}\psi_j^{(e)}(\bar{x})$$

$$\psi_1^{(e)}(\bar{x})=1-\frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^{(e)}(\bar{x})=\frac{\bar{x}}{h_e} \quad 0\leqslant\bar{x}\leqslant h_e \tag{3.17b}$$

从数学上和几何上可以看到（见图3.3a），式（3.12）和（3.17b）是一样的；我们可以由式（3.12）通过变换（3.16）得到式（3.17b）。局部座标系用于积分的数值计算也是很方便的。例如，方程式（3.15）中的系数矩阵$K_{ij}^{(e)}$及列向量$F_i^{(e)}$可以写成局部坐标系的形式如：

$$K_{ij}^{(e)}=\int_0^{h_e}a\frac{d\psi_i}{d\bar{x}}\frac{d\psi_j}{d\bar{x}}d\bar{x}$$

$$F_i^{(e)} = \int_0^{l_e} \psi_i \bar{f} d\bar{x} + P_i^{(e)} \tag{3.18a}$$

式中 $\bar{a} = 在x_e + \bar{x} = a = a(x_e + \bar{x})$ 处计算的a

$$\bar{f} = f(x_e + \bar{x}) \tag{3.18b}$$

方程式（3.15）和（3.18）(它们的形式是与问题有关的）对任何次单元均有效；只需要注意到下标i和j的范围就可以了，换言之，对二节点（线性的）单元，i和j取值为1和2，对三节点(二次的）单元，i及j取值为1、2和3。

当用线性插值函数来近似现在问题的因变量时，我们得到(用单元类型的常数值a及f表示）

$$[K^{(e)}] = \frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F^{(e)}\} = \frac{f_e h_e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(e)} \\ P_2^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

3-2-3　单元方程的集合（或连通性）

由于式（3.14）是对任意典型单元推导出来的，因此对有限元网格中任何单元都适用。为便于讨论起见，假定把问题的域$\Omega = (0, L)$分为三个可能是不等长的单元。因为这些单元在节点2及3处连结，且u是连续的，所以当$e = 1$，2时，元素Ω^e的u_2应与元素Ω^{e+1}的u_1相同。为了从数学上表示这个对应关系，用$U_i(i = 1, 2 \cdots\cdots n)$标志在总的节点处$u$的值，其中，$N$为总的节点的总数目。这样就得到下面的局部（单元）节点值与总的节点值之间的对应关系（见图3.4）：

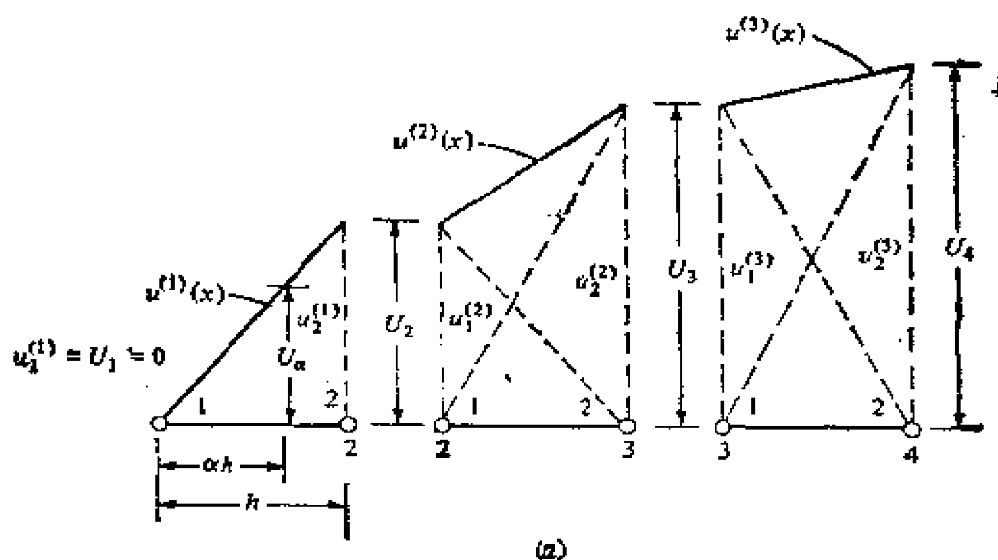
$$u_1^{(1)} = U_1,\quad u_2^{(1)} = U_2 = u_1^{(2)} \qquad u_2^{(2)} = U_3 = u_1^{(3)}$$
$$u_2^{(3)} = U_4 \tag{3.20}$$

今后，我们把这些关系称为单元间的连续性条件。

局部节点与总的节点间的对应关系，可以方便地用称为布尔连通性矩阵的数组形式来表示。

$$b_{ij} = 对应于单元i的第j个节点的总的节点号 \tag{3.21}$$

对于目前的网格来说，矩阵$[B] = [b_{ij}]$为



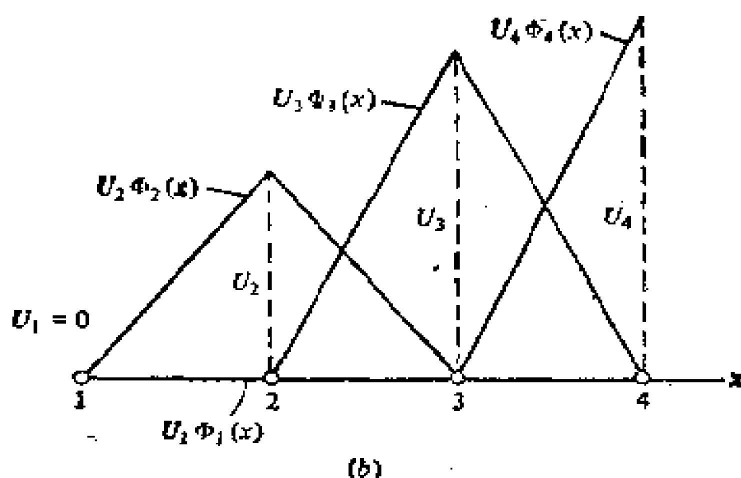


图3.4 局部节点值和总的节点值之间的对应关系及用总的插值函数表示此模型问题的有限元解：（a）单元和总的节点值的对应关系；（b）用总的插值函数表示解

$$[B]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

在$[B]$中，数字的重复表示与此数字有关的$[K^{(e)}]$的系数要加起来；例如，集合矩阵的位置（2.2）有$K_{22}^{(1)}$和$K_{11}^{(2)}$。为了进一步说明连通性矩阵的应用，研究在问题3.7中的线性弹性弹簧的网格。此问题的连通性矩阵为

$$[B]=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\\2 & 3\\2 & 5\\3 & 4\\4 & 5\end{bmatrix} \tag{3.22}$$

在$[B]$中，位置（1，2）、（2，1）、（3，1）和（4，1）上数目字2的重复表明，集合矩阵中位置（2，2）由下式表示

$$K_{22}=K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)}+K_{11}^{(3)}+K_{11}^{(4)}$$

类似地

$$K_{44}=K_{22}^{(2)}+K_{22}^{(5)}+K_{11}^{(6)}$$

在有限元法的计算机实现中，我们将要利用这样的连通矩阵。

回到目前的问题上来，我们对每个单元用总的节点值U_i以及式（3.19）所给出的$[K]$和$\{F\}$来表示单元方程（3.14）：

单元1

$$\frac{a_1}{h_1}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{f_1h_1}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\P_2^{(1)}\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{3.23a}$$

单元2

$$\frac{a_2}{h_2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{Bmatrix}$$

$$
=\frac{f_2h_2}{2}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\P_1^{(2)}\\P_2^{(2)}\\0\end{Bmatrix} \tag{3.23b}
$$

单元3

$$
\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{Bmatrix}
$$

$$
=\frac{f_3h_3}{2}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\P_1^{(3)}\\P_2^{(3)}\end{Bmatrix} \tag{3.23c}
$$

方程式（3.23）指出了每一个单元对整个问题的影响。注意到那一个单元方程都是不可解的，这是因为单元矩阵是奇异的，而且等式右边部份是未知的。把方程式（3.23）叠加（即相加）起来，得到体系的方程式为：

$$
\begin{bmatrix}\frac{a_1}{h_1} & -\frac{a_1}{h_1} & 0 & 0\\-\frac{a_1}{h_1} & \frac{a_1}{h_1}+\frac{a_2}{h_2} & -\frac{a_2}{h_2} & 0\\0 & -\frac{a_2}{h_2} & \frac{a_2}{h_2}+\frac{a_3}{h_3} & -\frac{a_3}{h_3}\\0 & 0 & -\frac{a_3}{h_3} & \frac{a_3}{h_3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{Bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}fh_1\\f_1h_1+f_2h_2\\f_2h_2+f_3h_3\\f_3h_3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\P_2^{(1)}+P_1^{(2)}\\P_2^{(2)}+P_1^{(3)}\\P_2^{(3)}\end{Bmatrix} \tag{3.24}
$$

方程式（3.24）表示方程（3.1）总的有限元模型。

下面叙述单元方程集合的另一种推导方法。其步骤是基于以

下的概念，与问题相关联的二次泛函（或变分公式）等于所有单元的方程（3.5）的二次泛函I_e的总和：

$$I(U_i) = \sum_{e=1}^{N} I_e(u_i^{(e)}) \tag{3.25a}$$

或者写成矩阵形式：

$$0 = [\delta I(U_i)]\{\delta U_i\} = \sum_{e=1}^{N} [\delta I_e(u_i^{(e)})]\{\delta u_i^{(e)}\}$$

(3.25b)

式中，$\delta u_i^{(e)}$可以看成是试函数值$U_i^{(e)}$，

$$I_e(u_i^{(e)}) = \frac{1}{2}\{u^{(e)}\}^T[K^{(e)}]\{u^{(e)}\} - \{u^{(e)}\}^T\{F^{(e)}\}$$

(3.25c)

N表示网格中单元的数目，δ为变分算子。因为方程式（3.25b）比方程式（3.25a）更一般化，今后我们将采用（3.25b）的形式。对方程式（3.25b）实行代数运算后得：

$$0 = \sum_{e=1}^{N} \sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} - F_i^{(e)} \right] \delta u_i^{(e)}$$

$$\begin{aligned}
&= (K_{11}^{(1)}u_1^{(1)} + K_{12}^{(1)}u_2^{(1)} - F_1^{(1)})\delta u_1^{(1)} + (K_{21}^{(1)}u_1^{(1)} \\
&+ K_{22}^{(1)}u_2^{(1)} - F_2^{(1)})\delta u_2^{(1)} + (K_{11}^{(2)}u_1^{(2)} + K_{12}^{(2)}u_2^{(2)} - F_1^{(2)})\delta u_1^{(2)} \\
&+ (K_{21}^{(2)}u_1^{(2)} + K_{22}^{(2)}u_2^{(2)} - F_2^{(2)})\delta u_2^{(2)} + (K_{11}^{(3)}u_1^{(3)} + K_{12}^{(3)}u_2^{(3)} - F_1^{(3)})\delta u_1^{(3)} \\
&+ (K_{21}^{(3)}u_1^{(3)} + K_{22}^{(3)}u_2^{(3)} - F_2^{(3)})\delta u_2^{(3)}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

把式（3.20）中的对应关系用在上式中，并将δU_i的系数整理后得到：

$$\begin{aligned}
0 &= \delta U_1[K_{11}^{(1)}U_1 + K_{12}^{(1)}U_2 - F_1^{(1)}] \\
&+ \delta U_2[K_{21}^{(1)}U_1 + (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)})U_2 + K_{12}^{(2)}U_3 - (F_2^{(1)} + F_1^{(1)})] \\
&+ \delta U_2[K_{21}^{(2)}U_2 + (K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)})U_3 + K_{12}^{(3)}U_4 - (F_2^{(2)} + F_1^{(3)})] \\
&+ \delta U_4[K_{21}^{(3)}U_3 + K_{22}^{(3)}U_4 - F_2^{(3)}]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

因为在U_i中的变分是任意的，所以上面的方程意味着每个δU_i（$i = 1$，$2 \cdots\cdots N+1$）系数应该分别等于零（此处$N+1$为总的

节点的总数）。用矩阵形式表示此结果，得：

$$
\begin{bmatrix}
K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\
K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\
0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\
0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)}+F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)}+F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix}
\tag{3.28}
$$

此式与方程式（3.24）是一样的。

3-2-4 边界条件的引入

方程式（3.24）和（3.28）对于用微分方程（3.1)描述的任何问题都是有效的，与边界条件无关。在引入基本边界条件（对初始变量）之前，系数矩阵（3.24）是奇异的。引入问题的合适的边界条件之后，可以得到能够求逆的非奇异矩阵。为此，我们首先注意到自然边界条件是通过$P_i^{(e)}$包含在列向量$\{F^{(e)}\}$中的。在边界节点间的所有总的节点处，由单元e的节点2和单元$e+1$的节点1对自然边界条件的影响总和应等于次变量（abu/dx）的指定值：

$$
P_2^{(e)} + P_1^{(e+1)} = \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=x_{e+1}} \text{的指定值} \tag{3.29}
$$

对于现在的问题来说，在$x=h_1$和$x=h_1+h_2$处的$\left(a\dfrac{du}{dx}\right)$指定值为零，〔因为在总的节点 2 和3处$u$是没有指定的，因此可以理解在这些节点处的次变量($adu/dx$)的指定值为零。〕这样，我们就得到（见3-2-7节中注解10)

$$
P_2^{(1)} + P_1^{(2)} = 0 \qquad P_2^{(2)} + P_1^{(3)} = 0 \tag{3.30}
$$

对于一个杆件的纵向变形来说，这些方程式可以解释为内力平衡条件。从数学上说，这相当于假定在总的节点$e+1$处单元e和

$e+1$的$\left(a\frac{du}{dx}\right)$值之差等于在节点$e+1$处$\left(a\frac{du}{dx}\right)$的指定值(在现在的例子中等于零)：

$$\left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|^{(e)}_{x=x_{e+1}}-\left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|^{(e+1)}_{x=x_{e+1}}\equiv P^{(e)}_2+P^{(e+1)}_1=0 \quad (3.31)$$

此差值已计及作用于点 $x=x_{e+1}$ 的任何点源。如果无点源作用，则认为差值为零。请注意，$\left(a\frac{du}{dx}\right)$在 $x=0$ 处是未知的，且等于P在$x=L$处的值。

其次，讨论问题引入基本边界条件的情况。对现在的例子，已知的基本边界条件仅有

$$U_1=u^{(1)}_1=0 \quad (3.32)$$

未知量及$P^{(e)}_i$修改后的列向量由下式给出

$$\{\Delta\}=\begin{Bmatrix}0\\U_2\\U_3\\U_4\end{Bmatrix}\quad\{P\}=\begin{Bmatrix}\left(-a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0}\equiv P^{(1)}_1\\0\\0\\P\end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

3-2-5　方程式的解

总的有限元方程（3.28）可以很容易分解为下列形式：

$$\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}]\\ [K^{21}] & [K^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\Delta^1\}\\ \{\Delta^2\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

式中，$\{\Delta^1\}$为已知位移（U_1）的列向量，$\{\Delta^2\}$为未知位移（U_2，U_3，U_4）的列向量，$\{F^1\}$为未知力（$P^{(1)}_1$）的列向量，而$\{F^2\}$为已知力（0，0，P）的列向量。将方程式（3.34）写成两个矩阵方程，得：

$$[K^{11}]\{\Delta^1\}+[K^{12}]\{\Delta^2\}=\{F^1\} \quad (3.35)$$

$$[K^{21}]\{\Delta^1\}+[K^{22}]\{\Delta^2\}=\{F^2\} \quad (3.36)$$

由方程式（3.36）有

$$\{\Delta^2\}=[K^{22}]^{-1}(\{F^2\}-[K^{21}]\{\Delta^1\}) \tag{3.37}$$

当$\{\Delta^2\}$已知时，$\{F^1\}$ 即可由式（3.35）计算出。在现在的例子中，有

$$[K^{11}]=K_{11}^{(1)} \qquad [K^{12}]=\{K_{12}^{(1)}\ \ 0\ \ 0\}$$

$$[K^{21}]=\begin{Bmatrix} K_{21}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [K^{22}]=\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

$$\{F^1\}=F_1^{(1)} \qquad \{F^2\}=\begin{Bmatrix} F_2^{(1)}+F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)}+F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

当a等于常数，$h_1=h_2=h_3=L/3$，$f=$常数时，得

$$[K^{22}]^{-1}=\frac{L}{3a}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{3.39a}$$

$$\{\Delta^2\}=\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}=\frac{fL^2}{18a}\begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}+\frac{PL}{3a}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{3.39b}$$

而在$x=0$处，未知自然边界条件（相当于杆件变形问题中的反力）为

$$P_1^{(1)}\equiv\left(-a\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=0}=-(fL+P) \tag{3.40}$$

因为$\psi_i^{(e)}(e=1,2,3)$在任何单元Ω^f中当$e\neq f$时为零（见图3.4），所以对于整个域的（总的）有限元解由下式给出，

$$u(x)=\sum_{e=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2}u_i^{(e)}\psi_i^{(e)}\right)=\sum_{I=1}^{4}U_I\phi_I(x) \tag{3.41}$$

式中，$\phi_I(x)$，$I=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N+1$，为分段连续总的插值函数

$$\phi_I(x)=\begin{cases}\psi_2^{(I-1)}(x) & x_{I-1}\leqslant x\leqslant x_I \\ \psi_1^{(I)}(x) & x_I\leqslant x\leqslant x_{I+1}\end{cases} \tag{3.42}$$

为了方便计算，方程式（3.41）可以写成如下形式

$$
u(x)\begin{cases}U_1\psi_1(x)+U_2\psi_2^{(1)}(x) & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{L}{3}\\[2mm] U_2\psi_1^{(2)}(x)+U_3\psi_2^{(2)}(x) & \dfrac{L}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2L}{3}\\[2mm] U_3\psi_1^{(3)}(x)+U_4\psi_2^{(3)}(x) & \dfrac{2L}{3}\leqslant x\leqslant L\end{cases} \tag{3.43}
$$

例如，当计算 $x=x_0$，$L/3\leqslant x_0\leqslant 2L/3$ 处的 u 时，应该用式(3.43)的第二行。

3-2-6 解的后处理

有限元方程的解给出了初始未知量或未知量u(例如位移、速度、温度等）的节点值。结果的后处理包括以下一项或多项：

1.任何次变量(例如解的梯度)的计算。

2.将结果进行整理，以便检查解是否有意义(当进行比较时，如果没有其它结果可利用，可以根据直觉和经验作指导)。

3.将结果用表格或图形表示。

因为计算次变量时涉及到解的求导数问题，我们对于线性单元计算解的导数，并注意到在单元Ω^f中，当$e\neq f$时，$\psi_i^{(e)}=0$，

$$
\frac{du}{dx}=\sum_{e=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}u_i^{(e)}\frac{d\psi_i^{(e)}}{dx} \tag{3.44a}
$$

$$
=\frac{u_2^{(e)}-u_1^{(e)}}{h_e}\qquad e=1,\ 2,\ 3 \tag{3.44b}
$$

注意到在每一单元中$\dfrac{du}{dx}$为常数。因为在每一单元中u假定是线性的，因此这是可以预料得到的。同时，注意到此常数对不同的单元是不同的。因此，解的导数是分段的常值。

在现在的问题中，精确解很容易求得为：

$$
u_{精确}=\frac{f}{2a}(2xL-x^2)+\frac{P}{a}x \tag{3.45}
$$

这样，我们就可以把有限元解与此精确解进行比较。在$x=h$，$2h$和$3h$处计算精确解，得到与方程（3.39b）中同样的结果。由此可

见，在这些节点处，有限元解是精确的，如果我们需要在任何中间点（即任何二节点之间）计算$u(x)$，可以利用方程式（3.43）。例如，在$x=\alpha h$（$0<\alpha<1$）处，我们有（见图3.4a）

$$u(\alpha h)=\frac{h-\alpha h}{h}u_1^{(1)}+\frac{\alpha h-0}{h}u_2^{(1)}$$

$$=(1-\alpha)u_1^{(1)}+\alpha u_2^{(1)}\equiv U_\alpha \qquad (3.46)$$

这就是说，在$x=\alpha h$处的u是在点$x=\alpha h$两边的节点处的u值的加权平均。类似地，对于$x_0=h+\alpha h$，由方程式（3.43)的第二行可得，$u(x_0)=(1-\alpha)u_1^{(2)}+\alpha u_2^{(2)}$。

图3.5表示精确解及其导数与有限元解的比较，注意到在单元

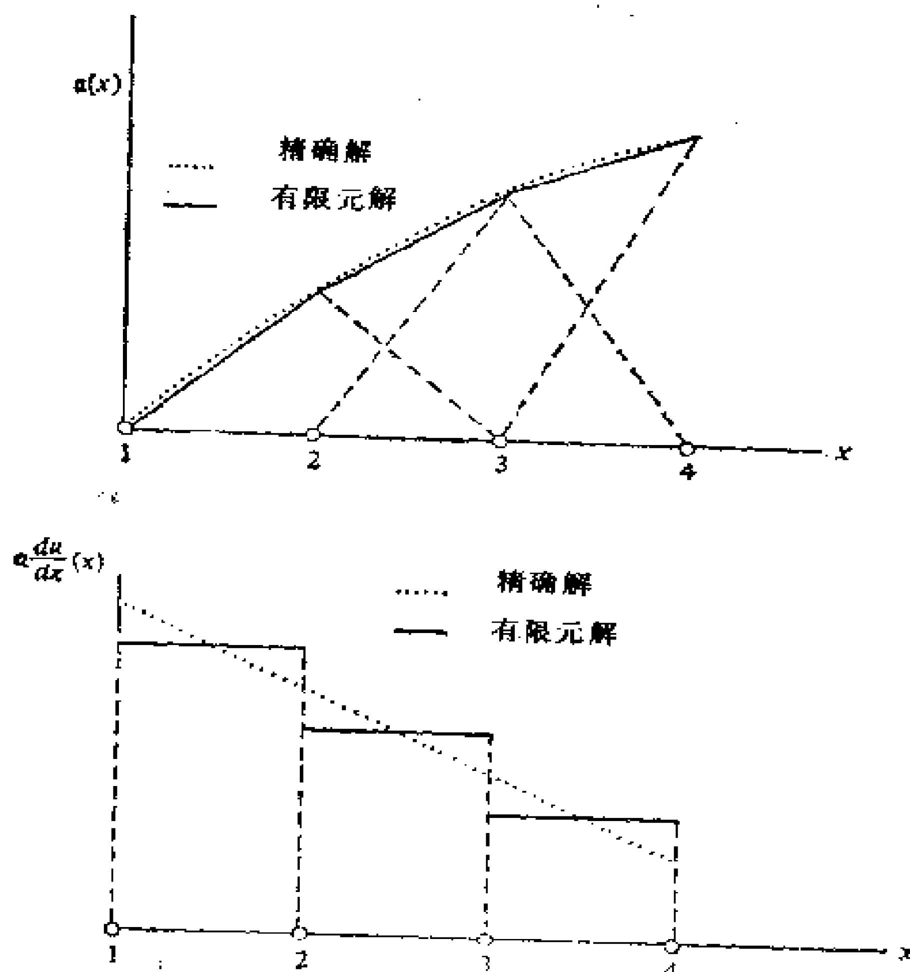


图3.5　微分方程（3.1）在边界条件（3.2）下的精确解与有限元解的比较

间的边界处，$\frac{du}{dx}$是不连续的（在从一个单元到另一个单元处有不同的值）。但是，在节点e及$e+1$处，$\frac{du}{dx}$的平均值与在$x=x_e+h/2$处$\frac{du}{dx}$的精确值一致。

至此完成了方程（3.1）及（3.2）的有限元近似法。通过对上述所举例题的描述过程，使我们更加深了理解。

3-2-7　关于有限元法的若干注解

注解1　虽然我们用了Ritz法来建立单元方程式，但是，任何其它变分方法如最小二乘法均可使用（见2-3-3节及5-2-1节）。

注解2　表3.1所述的步骤1～6对任何问题都是通用的。问题中单元的几何形状及特性在步骤1和步骤2中引入到公式里，插值函数的导数只决定于元素的几何形状、单元中节点的数目和位置以及每个节点的独立自由度数。当然，用于某个变量的近似度决定于出现在方程式中变分公式的导数次数；而单元中节点的数目决定于近似的程度。

注解3　在步骤2中对一个单元推导出的插值函数ψ_i（对任何近似程度）满足方程式（3.13）中的性质。性质1是（插值）要求$u(x_j)=\sum u_i^{(e)}\psi_i^{(e)}(x_j)=u_j^{(e)}$的直接结果。性质2是在近似式中包含常数项$C_1$的结果。这样就有可能在单元中使问题的初始变量（如温度、位移等）接近于稳定状态，当需要的时候，也可以在整个域中接近于稳定状态。

注解4　单元方程是从线性算子

$$A\equiv-\frac{d}{dx}\left(a\frac{d}{dx}\right)$$

推导得来的，因此，这些方程对于由算子A所描述的任何物理问题都是有效的（只需要对量作解释）。用这种算子描述的问题的例子列于表2.1中。因此，为杆件进行有限元分析编写的计算机程序可以用来分析表2.1中的任何一种问题。但是，注意到性质$a=a(x)$（它依赖于几何形状和材料）在每个单元中可能是不同的。

注解5　方程式（3.15）中单元矩阵的积分可以利用数值积分法在计算机上实现（见3-6-4节）。当这些积分在代数上十分复杂时，只有用数值积分法来计算方程式（3.15）中的矩阵元素，别无其它选择。

注解6　由于本问题的几何形状是准确地表示的，积分结果是准确的，而且线性近似能够表示在节点处的准确解（对a=常数，f=常数）。在1-3-3节中所提到的这三种误差在现在的问题中均为零。

注解7　用物理（或直接）法、传统（或直接）法解决前面我们所讨论过的问题，事实上并没有多少差别（当有限元法还未建立的时候）。差别仅仅在于单元方程（3.14）的推导上。传统的方法利用物理定律获得方程式（3.14）中的力—位移关系。除了在结构力学领域以外，在其他领域中使用"把问题分割为片"的方法并不普遍，但是用直接的方法求单元方程的导数或多或少都遵循着同样的步骤。例如，研究一弹性杆的一段的脱离体图形，由初等力学可知

力＝（截面面积）×（应力）＝$A\sigma$

应力＝（弹性模量）×（应变）＝$E\varepsilon$

应变＝（伸长值/原始长度）＝e/h

其中，h为所考虑段（或单元）的原始长度。上面所定义的应变为平均应变（从数学上说，$\varepsilon = du/dx$，u为位移，它可能包括杆的刚体运动及伸长）。利用这些关系式，可以写成（$a_e = A_e E_e$）

$$P_1^{(e)} = \frac{a_e}{h_e}(u_1^{(e)} - u_2^{(e)}) \qquad P_2^{(e)} = \frac{a_e}{h_e}(u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) \tag{3.47}$$

或
$$\frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^{(e)} \\ P_2^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{3.48}$$

这与$f=0$时方程式（3.19）完全一样。注意到在推导单元方程当中，我们曾经用了材料力学的知识，并假定在单元整个长度上的应变为常数。对于弹簧单元、管流单元、电阻单元等等，都

可以推导出形如式（3.48）的方程式（参见本节末的习题），如果要求更加精确的应变表示法（例如线性的），那么直接的步骤就难以应用。此时，用于建立有限元方程的变分法比物理法就显出其优越性了，因为它不要求物理定律方面的知识，而只在推导单元方程时用到支配方程。

注解8 利用有限差分近似法可以得到方程（3.19）的另一种解释。在任何点x处的轴向力由$P(x)=EAdu/dx$来给出。利用向前差分近似法，有

$$-P_1^{(e)}\equiv P(x)\big|_{x=x_e}=EA\frac{u(x_{e+1})-u(x_e)}{h_e} \tag{3.49}$$

利用向后差分近似法可得

$$P_2^{(e)}\equiv P(x)\big|_{x=x_{e+1}}=EA\frac{u(x_{e+1})-u(x_e)}{h_e} \tag{3.50}$$

注解9 对于所讨论的模型问题，在式（3.15）中的单元矩阵$[K^e]$是对称的，即$K_{ij}^{(e)}=K_{ji}^{(e)}$，在大多数感兴趣的线性问题中，都有对称的系数矩阵。这样就有可能只计算$j\leqslant i$时的$K_{ij}^{(e)}(i=1,2,\cdots,n)$。换言之，只需要计算对角线项和对角线以上（或以下）的项。由于单元矩阵具有对称性，集合后的总的矩阵亦将是对称的。因此，在有限元程序中只需要储存集合矩阵中对角线以上（包括对角线）的部分。有限元法还有另一个特性，那就是集合矩阵的稀疏性。因为总的插值函数Φ_e仅在节点e的两个相邻的单元上为非零（见图3.3），它对节点$e-2$，$e-3$，$e+2$，$e+3$等的影响为零；也就是说，在总的矩阵中，K_{13}，K_{24}等项均为零。一般而言，若节点I，J不属于同一单元，则$K_{IJ}=0$。因此，若总的节点按顺序编号，对于总的系数矩阵，主对角线两边两个或两个以上位置以外的项的影响将是零，因此矩阵是带状的。对于一个呈带状的对称矩阵，只需要储存矩阵中位于上半带（或下半带）内的项。此时可以采用用来解带状对称方程的解方程程序。当系数矩阵的对称性是从模型化了的方程的变分公式转换得到的时候，矩阵的稀疏性是有限元插值函数的一个结果，它具有局部的支座（也就是说，

在此域的一小段内有非零值)。

注解10 在元素间的边界处，次变量（或"力"）P_i的协调性（或"平衡"）可由式(3.30)表示。这相当于引入在节点处次变量$(a\frac{du}{dx})$应是连续的条件、虽然方程式(3.30)在解总的方程时已经引入，但因为有限元解仅对于单元是有定义的，所以(adu/dx)的连续性并不满足。因此，一般而言，在节点处有

$$P_2^{(1)}+P_1^{(2)}\neq 0 \tag{a}$$

在大多数有限元的书中，这一点并没有对读者交代清楚。这些书中研究整个问题的二次型(3.25a)，并略去了问题的二次型中单元间影响的总和

$$\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{2}P_j^{(e)}\ \ u_i^{(e)}\Big) \tag{b}$$

但是，这相当于引入了形如方程式(3.30)的平衡条件。当次变量在单元间边界处（例如在总的节点2处）被给定为非零时(例如为P_0)，则有

$$P_2^{(1)}+P_1^{(2)}=P_0 \tag{c}$$

在其它有限元的书中，P_0是包含在泛函P_0U_2中的，这里U_2乃是在总的节点2处u的值。

为了概念上清楚，研究式(3.1)。在整个域上方程式(3.1)的变分形式为

$$0=\int_0^L\Big(\ a\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}-vf\ \Big)dx-v(L)P \tag{d}$$

当u由仅在局部区间上有定义的函数来近似时（这就是有限元法的情况），使用上述变分式就意味着略去式(b)所示的单元间影响的总和。以u的式(3.41)和$v=\phi_I$代入方程式d得

$$0=\int_0^L\Big[a\ \frac{d\phi_I}{dx}\Big(\sum_{J=1}^{4}\ v_J\frac{d\phi_J}{dx}\Big)-\phi_I f\Big]dx-\phi_I(L)P \tag{e}$$

因为ϕ_I仅在x_{I-1}及x_{I+1}之间为非零，故积分变成

$$0=\int_{x_{I-1}}^{x_{I+1}}\left[a\,\frac{d\phi_I}{dx}\left(U_{I-1}\frac{d\phi_{I-1}}{dx}+U_I\frac{d\phi_I}{dx}+U_{I+1}\frac{d\phi_{I+1}}{dx}\right)\right.$$
$$\left.-\phi_I f\right]dx-\phi_I(L)P \qquad (f)$$

因而得（对于三个单元的网格）

$$I=1:\quad 0=\int_{x_1=0}^{x_2}\left[a\frac{d\phi_1}{dx}\left(U_1\frac{d\phi_1}{dx}+U_2\frac{d\phi_2}{dx}\right)-\phi_1 f\right]dx$$
$$-\phi_1(L)P$$
$$I=2:\quad 0=\int_{x_1=0}^{x_3}\left[a\frac{d\phi_2}{dx}\left(U_1\frac{d\phi_1}{dx}+U_2\frac{d\phi_2}{dx}+U_3\frac{d\phi_3}{dx}\right)\right.$$
$$\left.-\phi_2 f\right]dx-\phi_2(L)P \qquad (g)$$
$$I=3:\quad 0=\int_{x_2}^{x_4=L}\left[a\frac{d\phi_3}{dx}\left(U_2\frac{d\phi_2}{dx}+U_3\frac{d\phi_3}{dx}+U_4\frac{d\phi_4}{dx}\right)\right.$$
$$\left.-\phi_3 f\right]dx-\phi_3(L)P$$
$$I=4:\quad 0=\int_{x_3}^{x_4=L}\left[a\frac{d\phi_4}{dx}\left(U_3\frac{d\phi_3}{dx}+U_4\frac{d\phi_4}{dx}\right)-\phi_4 f\right]dx$$
$$-\phi_4(L)P$$

完成了积分之后，由这些方程得到式(3.24)，但方程式(3.24)中最后一列（包含有P）由

$$\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\P\end{Bmatrix} \qquad (h)$$

所代替[见式(3.33)]。虽然这个过程直接给出集合方程，但是从代数的角度来看相当复杂（特别是对于二维问题），而且不适于在简单的计算机上实现。

下面两个例子说明用有限元分析一维二次方程的步骤。

例3.1 设有微分方程(3.1)具有参数a，f，边界条件为

$$a(x)=1+x \qquad f(x)=1+4x \quad 当0<x<1$$

$$u(0)=u(1)=0 \tag{3.51}$$

求解此问题（此问题相当于两端固定的非均匀缆索在分布横向力作用下的横向弯曲问题，或者是在非均匀材料叶片中的热传导问题，或是变截面杆沿长度在分布热源作用下的热传导问题）。

步骤1　今欲用4个线性单元（具有等尺寸）来确定方程(3.1)和（3.51）的有限元解。

步骤2　因为微分方程与以前讨论过的一样，所以方程式的变分公式(3.4）及$K_{ij}^{(e)}$和$F_i^{(e)}$的代数表达式没有改变。故得

$$0=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[(1+x)\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}-v(1+4x)\right]dx-v(x_e)P_1^{(e)}$$
$$-v(x_{e+1})P_2^{(e)} \tag{3.52}$$

式中

$$P_1^{(e)}=\left[-(1+x)\frac{du}{dx}\right]_{x=x_e} \quad P_2^{(e)}=\left[(1+x)\frac{du}{dx}\right]_{x=x_{e+1}} \tag{3.53}$$

及 $$k_{ij}^{(e)}=\begin{cases}\int_{x_e}^{x_{e+1}}(1+x)\frac{d\psi_i^{(e)}}{dx}\frac{d\psi_j^{(e)}}{dx}dx \text{在总的坐标系中} & (3.54a)\\ \int_0^{h_e}(1+x_e+\bar{x})\frac{d\psi_i^{(e)}}{d\bar{x}}\frac{d\psi_j^{(e)}}{d\bar{x}}d\bar{x}\text{在局部坐标系中} & (3.54b)\end{cases}$$

$$F_i^{(e)}=\begin{cases}\int_{x_e}^{x_{e+1}}(1+4x)\psi_i^{(e)}dx+P_i^{(e)} \quad \text{总的} & (3.55a)\\ \int_0^{h_e}(1+4x_e+4\bar{x})\psi_i^{(e)}d\bar{x}+P_i^{(e)}\text{局部} & (3.55b)\end{cases}$$

下面将说明如何利用方程式(3.12)和(3.17b）中的线性插值函数来计算$K_{ij}^{(e)}$和$F_i^{(e)}$。

（a）总的坐标系。将式（3.12)中的$\psi_i^{(e)}$用到式（3.54a）和（3.55a）中，并对x进行积分，得到

$$\frac{d\psi_1^{(e)}}{dx}=\frac{-1}{h_e} \qquad \frac{d\psi_2^{(e)}}{dx}=+\frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}(1+x)\left(-\frac{1}{h_e}\right)^2dx=\frac{1}{h_e^2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x_e}^{x_{e+1}}$$

$$=\frac{1}{h_e^2}\left[x_{e+1}-x_e+\frac{1}{2}(x_{e+1}^2-x_e^2)\right]=\frac{1}{h_e}\left[1+\frac{1}{2}(x_{e+1}+x_e)\right]$$

$$K_{12}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}(1+x)\left(-\frac{1}{h_e}\right)\frac{1}{h_e}dx=\frac{1}{h_e}\left[1+\frac{1}{2}(x_{e+1}+x_e)\right]$$

$$K_{22}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}(1+x)\left(\frac{1}{h_e}\right)^2dx=\frac{1}{h_e}\left[1+\frac{1}{2}(x_{e+1}+x_e)\right]$$

$$F_1^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}(1+4x)\left(\frac{x_{e+1}-x}{h_e}\right)dx+P_1^{(e)} \tag{3.56}$$

$$=\frac{1}{h_e}(x_{e+1})\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x_e}^{x_{e+1}}-\frac{4}{h_e}\left(\frac{x_{e+1}x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x_e}^{x_{e+1}}$$

$$+P_1^{(e)}$$

$$=\frac{h_e}{2}+\frac{2h_e}{3}(x_{e+1}+2x_e)+P_1^{(e)}$$

$$F_2^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}(1+4x)\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)dx+P_2^{(e)}$$

$$=\frac{1}{h_e}\left(\frac{x^2}{2}-x_ex\right)\Big|_{x_e}^{x_{e+1}}+\frac{4}{h_e}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2x_e}{2}\right)\Big|_{x_e}^{x_{e+1}}+P_2^{(e)}$$

$$=\frac{h_e}{2}+\frac{2h_e}{3}(x_e+2x_{e+1})+P_2^{(e)}$$

(b) 局部坐标。为了说明用局部坐标系可以得到同样的结果，我们计算$k_{11}^{(e)}$及$F_1^{(e)}$：

$$K_{11}^{(e)}=\int_0^{h_e}(1+x_e+\bar{x})\left(\frac{1}{h_e}\right)^2d\bar{x}$$

$$=\frac{1}{h_e}\left(1+\frac{h_e}{2}+x_e\right)$$

$$=\frac{1}{h_e}\left(1+\frac{x_{e+1}+x_e}{2}\right)$$

$$F_1^{(e)}=\int_0^{h_e}(1+4x_e+4\bar{x})\left(1-\frac{\bar{x}}{h_e}\right)d\bar{x}+P_1^{(e)}$$

$$= (h_e + 4h_e x_e + 2h_e^2) - \frac{1}{h_e}\left(\frac{h_e^2}{2} + 2h_e^2 x_e + \frac{4}{3}h_e^3\right) + P_1^{(e)}$$

$$= \frac{h_e}{2} + h_e\left(2x_e + \frac{2}{3}h_e\right) + P_1^{(e)}$$

$$= \frac{h_e}{2} + \frac{2h_e}{3}(x_{e+1} + 2x_e) + P_1^{(e)}$$

等等。这样，得到与式(3.56)同样的结果。我们有

$$[k^e] = \frac{1}{h_e}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{x_{e+1} + x_e}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) \quad (3.57a)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix} + \frac{h_e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{2h_e}{3}\begin{Bmatrix} x_{e+1} + 2x_e \\ 2x_{e+1} + x_e \end{Bmatrix} \quad (3.57b)$$

注意到矩阵$[K^{(e)}]$和$\{F^{(e)}\}$的元素依赖于单元 e 的坐标x_e及x_{e+1}，因此对任何两个单元它们都不会是一样的。

步骤3 设把域(0,1)分成四个相等的单元$h_e = \frac{1}{4}$, $e = 1,2,3,4$。则方程式(3.57)变成：

单元1

$e = 1$，$x_e = 0$，$x_{e+1} = h_e$

$$[k^{(1)}] = 4\begin{bmatrix} 1 +0.125 & -1 -0.125 \\ -1 -0.125 & 1 +0.125 \end{bmatrix}$$

$$\{F^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{24}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

单元2

$e = 2$，$x_e = h_e$，$x_{e+1} = 2h_e$

$$[k^{(2)}] = 4\begin{bmatrix} 1 +0.375 & -1 -0.375 \\ -1 -0.375 & 1 +0.375 \end{bmatrix}$$

$$\{F^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{24}\begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

单元3

$e = 3$，$x_e = 2h_e$，$x_{e+1} = 3h_e$

$$[K^{(3)}]=4\begin{bmatrix}1 & +0.625 & -1 & -0.625\\ -1 & -0.625 & 1 & +0.625\end{bmatrix}$$

$$\{F^{(3)}\}=\begin{Bmatrix}P_1^{(3)}\\ P_2^{(3)}\end{Bmatrix}+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+\frac{1}{24}\begin{Bmatrix}7\\ 8\end{Bmatrix}$$

单元4

$e=4$，$x_e=3h_e$，$x_{e+1}=4h_e$

$$[K^{(4)}]=4\begin{bmatrix}1 & +0.875 & -1 & -0.875\\ -1 & -0.875 & 1 & +0.875\end{bmatrix}$$

$$\{F^{(4)}\}=\begin{Bmatrix}P_1^{(4)}\\ P_2^{(4)}\end{Bmatrix}+\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+\frac{1}{24}\begin{Bmatrix}10\\ 11\end{Bmatrix}$$

集合方程为

$$[K]\{U\}=\{F\} \tag{3.58a}$$

式中

$$[K]=\begin{bmatrix}4.5 & -4.5 & 0 & 0 & 0\\ -4.5 & 4.5+5.5 & -5.5 & 0 & 0\\ 0 & 5.5 & 5.5+6.5 & -6.5 & 0\\ 0 & 0 & -6.5 & 6.5+7.5 & -7.5\\ 0 & 0 & 0 & -7.5 & 7.5\end{bmatrix} \tag{3.58b}$$

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\ P_2^{(1)}+P_1^{(2)}\\ P_2^{(2)}+P_1^{(3)}\\ P_2^{(3)}+P_1^{(4)}\\ P_2^{(4)}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.125\\ 0.250\\ 0.250\\ 0.250\\ 0.125\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.04167\\ 0.250\\ 0.500\\ 0.750\\ 0.4583\end{Bmatrix} \tag{3.58c}$$

步骤4　边界条件（即已知或指定的U_i及P_i）为

$$U_1=U_5=0$$

$$P_2^{(1)}+P_1^{(2)}=0 \qquad P_2^{(2)}+P_1^{(3)}=0 \qquad P_2^{(3)}+P_1^{(4)}=0 \tag{3.59}$$

未知次变量（相当于缆索问题的拉力）为

$$P_1^{(1)} = \left[-(1+x)\frac{du}{dx} \right]_{x=0} = -\frac{du}{dx}(0)$$

$$P_2^{(4)} = \left[(1+x)\frac{du}{dx} \right]_{x=1} = 2\frac{du}{dx}(1) \qquad (3.60)$$

注意在本问题的任何给定边界点处，我们只知道初始变量U，或只知道次变量P；不论在哪一点我们都不可能事先（即在问题解出之前）同时知道两个变量。

步骤5　方程的求解包括两步（第二步可以认为是后计算）：(1) 首先未知的初始变量，(2) 由第一步得到信息解未知的次变量。在现在的问题中，通过去掉第一行和第一列以及最后一行和最后一列而得到的：

$$\begin{bmatrix} 10.0 & -5.5 & 0 \\ -5.5 & 12.0 & -6.5 \\ 0 & -6.5 & 14.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 1.00 \end{Bmatrix} \qquad (3.61)$$

形如(3.61)式的方程式，可以应用计算机内的任何标准解题子程序来解。在现在的情况下，应用Cramer法则解起来并不太麻烦：

$$U_2 = \frac{0.5(12\times 14 - 6.5\times 6.5) + 5.5(0.75\times 14 + 6.5\times 1)}{10(12\times 14 - 6.5\times 6.5) + 5.5(-5.5\times 14)}$$

$$= \frac{156.375}{834} = 0.1875 \qquad (3.62)$$

$$U_3 = \frac{208.5}{834} = 0.25$$

$$U_4 = \frac{156.375}{834} = 0.1875$$

利用式(3.58)的第一和最后一个方程，可以计算出未知次变量：

$$4.5v_1 - 4.5v_2 = P_1^{(1)} + 0.125 + 0.04167$$

$$-7.5v_4 + 7.5v_5 = P_2^{(4)} + 0.125 + 0.4583$$

或

$$P_1^{(1)} = -4.5v_2 - 0.16667 = -1.0104 \qquad (3.63)$$

$$P_2^{(4)} = -7.5v_4 - 0.5833 = -1.9896$$

对于缆索问题，$P_1^{(1)}$和$P_2^{(4)}$为缆索固定端（即$x=0$、1）处的反

力。很容易验证，力的平衡条件得到满足：

$$P_1^{(1)}+P_2^{(4)}+\int_0^1 f(x)dx=0$$

$$-1.0104-1.9896+(1+2)=0 \tag{3.64}$$

步骤6　如欲求$x=0.4$处的$u(x)$值，只需计算$x=0.4$处u的有限元近似式：

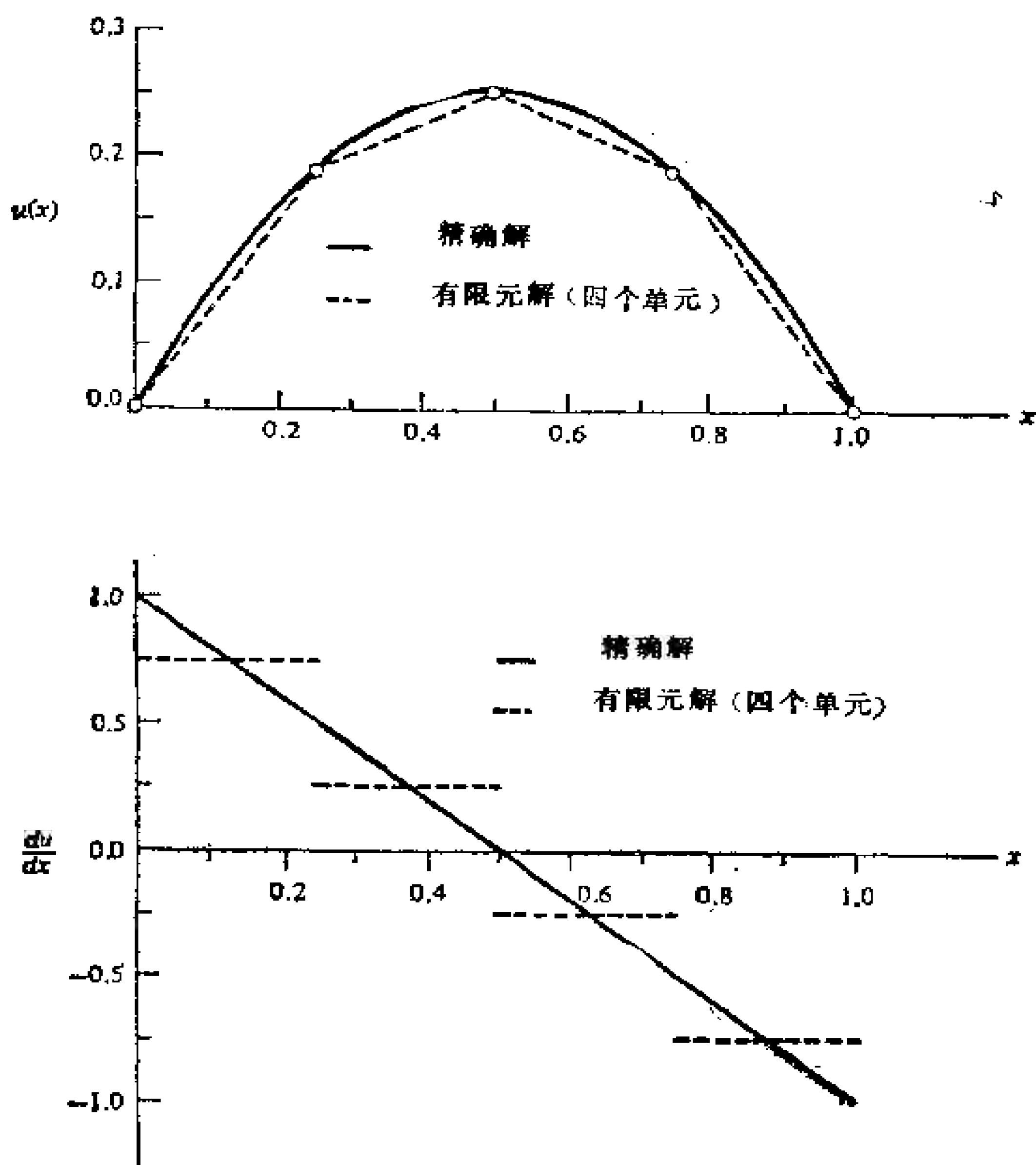


图3.6　方程(3.1)及(3.51)的有限元解与精确解的比较

$$u(x)=\begin{cases}0.1875(4x) & 当\ 0\leqslant x\leqslant 0.25\\ 0.1875(2-4x)+0.25(4x-1) & 当\ 0.25\leqslant x\leqslant 0.5\\ 0.25(3-4x)+0.1875(4x-2) & 当\ 0.5\leqslant x\leqslant 0.75\\ 0.1875(4-4x) & 当\ 0.75\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}u(0.4)&=U_2(2-4x)|_{x=0.4}+U_3(4x-1)|_{x=0.4}\\&=0.4U_2+0.6U_3=0.225\end{aligned}$$

在同一点处的导数du/dx为

$$\frac{du}{dx}(0.4)=U_2(-4)+U_3(4)=(U_3-U_2)4=0.25$$

在方程式（3.51）给出的数据和边界条件下，方程式(3.1)的精确解为

$$u_0(x)=x(1-x)\qquad \frac{du_0}{dx}(x)=1-2x \tag{3.66}$$

注意，在有限元节点处，有限元解与精确解彼此吻合。但是，在节点间的任何点处，它们是有差别的，因为精确解是二次方变化。

表3.2　方程(3.1)及(3.51)的有限元解与精确解的比较

x	有限元解 u				精确解
	2个单元	4个单元	8个单元	10个单元	u_0
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	0.05	0.075	0.0875	0.09	0.09
0.2	0.10	0.150	0.15625	0.16	0.16
0.3	0.15	0.200	0.20625	0.21	0.21
0.4	0.20	0.225	0.2375	0.24	0.24
0.5	0.25	0.250	0.250	0.25	0.25
0.6	0.20	0.225	0.2375	0.24	0.24
0.7	0.15	0.200	0.20625	0.21	0.21
0.8	0.10	0.150	0.15625	0.16	0.16
0.9	0.05	0.075	0.0875	0.09	0.09
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

*在x_e和x_{e+1}($e=1, 2, \cdots\cdots 10$)之间的点处，10个单元的解与u_0有差别。

而有限元解在二节点间呈线性变化（见图3.6）。解的导数按单元为常数，且只在单元的中点与精确解的导数相匹配。在$x=0.4$处的有限元解与精确解相差6.25%。但随着单元数目的增加，有限元解收敛于精确解。在表3.2中，对2，4，8，10个单元时的有限元解同精确解进行了比较。

例3.2（一维传导/对流热传递） 讨论在截面积为A，长度为L，导热性为K，热对流系数为β，周围媒介（环境）湿度为T_∞的绝热杆（即表面无热传递）的一维热传递问题。支配的微分方程为

$$-\frac{d}{dx}\left(KA\frac{dT}{dx}\right)=f \qquad 0<x<L \tag{3.67}$$

其中，f为分布的热源（在大多数问题中为零）。边界条件为

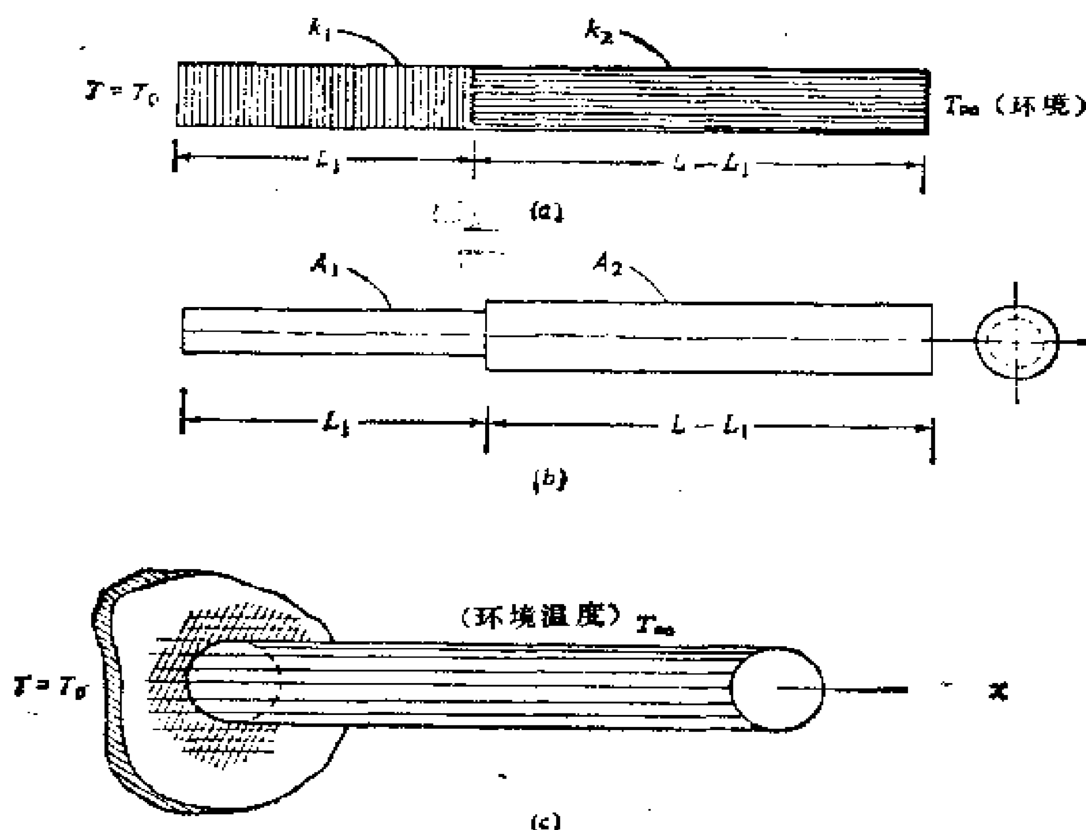


图3.7 一维热流通（传导及对流）：(a) 在非一致材料（复合材料）绝热杆中的热传递；(b) 在一阶梯形绝热杆中的热传递；(c) 非绝热杆中的热传递

$$T(0)=T_0\quad\left[KA\frac{dT}{dx}+B(T-T_\infty)+\hat{q}\right]_{x=L}=0 \qquad (3.68)$$

方程式（3.68）中的第二个边界条件考虑了通过端点$x=L$的对流热传递，而$\hat{q}$为此处给定的热通量。

设数据为不连续的：

$$a\equiv KA=\begin{cases}a_1 & 0\leqslant x\leqslant L_1\\ a_2 & L_1\leqslant x\leqslant L\end{cases} \qquad (3.69)$$

换言之，在杆的两段上，截面积（见图3.7b）和/(或)材料(见图3.7a）是不同的。下面进行式（3.67)至(3.69)的有限元分析。

步骤1　式（3.69）中的数据要求我们至少把杆长分成两个单元。当然可以分成多于两个单元。

步骤2　具有边界条件（3.68）时，式(3.67)的变分公式在一个单元$\Omega^e=(x_A,\ x_B)$内表示为：

$$0=\int_{x_A}^{x_B}\left(a\frac{dv}{dx}\frac{dT}{dx}-vf\right)dx+\left[U\left(-a\frac{dT}{dx}\right)\right]_{x_A}^{x_B} \qquad (3.70a)$$

$$=\int_{x_A}^{x_B}\left(a\frac{dv}{dx}\frac{dT}{dx}-vf\right)dx+\{U[\beta(T-T_\infty)+q]\}_{x_A}^{x_B}$$

$$=\int_{x_A}^{x_B}\left(a\frac{dv}{dx}\frac{dT}{dx}-vf\right)dx-\beta v(x_A)T(x_A)+\beta v(x_B)T(x_B)$$

$$-T_\infty\beta[v(x_B)-v(x_A)]-v(x_A)q(x_A)+v(x_B)q(x_B)$$

$$(3.70b)$$

式中,v为试函数。注意,方程式(3.53) 中的$P_i^{(e)}$由下式所代替：

$$P_1^{(e)}=-\left(a\frac{dT}{dx}\right)\bigg|_{x=x_A}=[\beta(T-T_\infty)+q]_{x=x_A}$$
$$P_2^{(e)}=\left(a\frac{dT}{dx}\right)\bigg|_{x=x_B}=-[\beta(T-T_\infty)+q]_{x=x_B} \qquad (3.71)$$

当然，$P_i^{(e)}$可以一直保持到集合完成，且边界条件已引入到总的方程组上为止。以后，$P_i^{(e)}$可以用式（3.71）中的表示式来代替(见下面步骤3)。

观察方程式（3.70a)中的边界项，我们看到基本边界条件包含边界点处T的指定值；因此，T是在有限元节点处的初始变量

（或自由度）。因为变分形式（3.70b）只涉及T的一阶导数，因此方程式（3.17b）中的线性插值函数是可以接受的。用T的表达式（3.17b）和$v=\phi_i$代入到变分形式（3.17b）中，得到如下的单元方程式（当$f=0$，$x_A=x_e$及$x_B=x_{e+1}$），

$$0=\sum_{j=1}^{2}\left\{\left[\int_{x_e}^{x_{e+1}} a\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx+\beta[\psi_i(x_{e+1})\psi_j(x_{e+1})\right.\right.$$

$$\left.\left.-\psi_i(x_e)\psi_j(x_e)]\right\}T_j-\{\beta T_\infty[\psi_i(x_{e+1})-\psi_i(x_e)]\right.$$

$$\left.+\psi_i(x_e)q(x_e)-\psi_i(x_{e+1})q(x_{e+1})\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{2}k_{ij}{}^{(e)}T_j{}^{(e)}-F_i{}^{(e)}$$

或

$$[k^{(e)}]\{T^{(e)}\}=\{F^{(e)}\} \tag{3.72}$$

式中

$$k_{ij}{}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}} a\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx+\beta[\psi_i(x_{e+1})\psi_j(x_{e+1})$$
$$-\psi_i(x_e)\psi_j(x_e)]$$

$$F_i{}^{(e)}=\beta T_\infty[\psi_i(x_{e+1})-\psi_i(x_e)]+\psi_i(x_e)q(x_e)$$
$$-\psi_i(x_{e+1})q(x_{e+1}) \tag{3.73}$$

式（3.72）和（3.73）对一个典型单元有效；可以用任何容许的φ_i来计算k_{ij}和F_i。当使用线性插值函数时，得到

$$[K^{(e)}]=\frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\beta_1{}^{(e)} & 0\\ 0 & \beta_2{}^{(e)}\end{bmatrix}$$

$$\{F^{(e)}\}=T_\infty\begin{Bmatrix}-\beta_1^{(e)}\\ \beta_2^{(e)}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-q_1^{(e)}\\ q_2^{(e)}\end{Bmatrix} \tag{3.74}$$

其中，$\beta_i^{(e)}$和$q_i^{(e)}$分别表示在单元e的节点i处表面散热系数和热通量。

步骤3　在集合单元方程式之前，先选择参数的指定值：

$a_1=76(\text{w}\cdot\text{cm})/0℃$　　$a_2=96(\text{w}\cdot\text{cm})/0℃$

$L_1=4\text{cm}$　$L=10\text{cm}$　$\beta_2^{(2)}=10\text{w/cm}^2$　$T_\infty=30℃$　(3.75)

$T_0=100℃$　$\beta_1^{(1)}=0.0$　$\beta_2^{(1)}=\beta_1^{(2)}(=10\text{w/cm}^2)$

注意到任何两个单元之间的表面散热系数不必给出，因为在任何单元间节点处的热对流影响假定为零：

$$T_\infty\beta_2^{(e)}-T_\infty\beta_1^{(e+1)}=0$$

当然，这只是数学上的处理，用来处理边界节点间的节点处的热对流项。实际上，除了边界节点外，对流项对节点并没有影响。

回到单元矩阵的计算上来，我们有

$$[K^{(1)}]=19\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & -19\\ -19 & 29\end{bmatrix}$$

$$[K^{(2)}]=16\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -16\\ -16 & 26\end{bmatrix}$$

$$\{F^{(1)}\}=\begin{Bmatrix}-\beta_1^{(1)}T_\infty\\ \beta_2^{(1)}T_\infty\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-q_1^{(1)}\\ q_2^{(1)}\end{Bmatrix}$$

$$\{F^{(2)}\}=\begin{Bmatrix}-\beta_1^{(2)}T_\infty\\ 300\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-q_1^{(2)}\\ q_2^{(2)}\end{Bmatrix}$$

而集合矩阵方程为

$$\begin{bmatrix}19 & -19 & 0\\ -19 & 29+6 & -16\\ 0 & -16 & 26\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\beta_1^{(1)}T_\infty\\ 0\\ 300\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-q_1^{(1)}\\ q_2^{(1)}-q_1^{(2)}\\ q_2^{(2)}\end{Bmatrix}\tag{3.76a}$$

另一方面，如果把$p_1^{(2)}$放到单元方程中，集合方程将有如下等效形式：

$$\begin{bmatrix}19 & -19 & 0\\ -19 & 19+16 & -16\\ 0 & -16 & 26\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1^{(1)}\\ p_2^{(1)}+p_1^{(2)}\\ p_2^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1^{(1)}\\ 0\\ -10U_3+300\end{Bmatrix}\tag{3.76b}$$

式中，$p_2^{(2)}=[\beta(T(x)-T\infty)]|_{x=10}$被代入到最后一个方程中。注意，当$p_1^{(1)}=-q_1^{(1)}$，$q_2^{(2)}=\hat{q}=0$ 时，方程式(3.76b)和(3.76a)完全一样。

步骤4　给定的边界条件和内部热通量的平衡给出

$$U_1=100℃\quad q_2^{(1)}-q_1^{(2)}=0\quad q_2^{(2)}-\hat{q}=0 \tag{3.77}$$

在$x=0$处的热通量是未知的：

$$q_1^{(1)}=\left[-a\frac{dT}{dx}\right]_{x=0} \tag{3.78}$$

步骤5　把边界条件(3.77)引入到式(3.76)上之后，得到

$$\begin{bmatrix}35 & -16\\ -16 & 26\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}19U_1\\ 300\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1900\\ 300\end{Bmatrix}$$

$$q_1^{(1)}=19U_2-19U_1$$

利用Cramer法则解此矩阵方程求得U_2，U_3，得：

$$U_2=\frac{1900\times 26+300\times 16}{35\times 26-16\times 16}=82.88℃$$

$$U_3=\frac{35\times 300+16\times 1900}{654}=62.54℃ \tag{3.79}$$

在$x=0$处的热通量由下式给出：

$$q_1^{(1)}=-325.28\text{w/cm}^2$$

有限元解(℃)为

$$T(x)=\begin{cases}100\left(1-\dfrac{x}{4}\right)+82.88\left(\dfrac{x}{4}\right)=100-4.28x & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 82.88\left(\dfrac{10-x}{6}\right)+62.54\left(\dfrac{x-4}{6}\right) & 4\leqslant x\leqslant 10\end{cases} \tag{3.80}$$

$$=96.44-3.39x$$

步骤6　方程式(3.67)至(3.69)的精确解与有限元解相吻合。

应该指出，若杆为非绝热的，则第二个边界条件(3.68)亦作用在杆的表面上(见图3.7c)。因而，变分式(3.70)必须据此进行修改，于是得到

$$0=\int_{x_A}^{x_B}\int_{面积}\left(K\frac{dv}{dx}\frac{dT}{dx}-vQ\right)dAdx-\int_S^v\left(a\frac{dT}{dx}\right)ds$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \left(kA \frac{dv}{dx} \frac{dT}{dx} - vf \right) dx + \int_S [\beta(T - T_\infty) + q] ds$$

(3.81)

式中，$A = A(x)$是单元的截面积，$f = AQ$为单位长度的发热量，S表示杆的表面。为了简化表面积分(在不了解表面单元的情况下)，必须假定在每一单元内截面面积为常数(当杆为绝热时不需要这一假定)，于是得到

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dv}{dx} \frac{dT}{dx} - vf \right) dx + \int_{x_A}^{x_B} cv[\beta(T - T_\infty) + q] dx$$

(3.82)

式中，c为周长。

方程式(3.82)的有限元模型为

$$[K^{(e)} + H^{(e)}]\{T\} = \{F^{(e)} + Q^{(e)}\} \tag{3.83a}$$

式中

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} a \frac{d\psi_i^{(e)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(e)}}{dx} dx$$

$$H_{ij}^{(e)} = c\beta \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i^{(e)} \psi_j^{(e)} dx$$

$$F_i^{(e)} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i^{(e)} f^{(e)} dx$$

$$Q_i^{(e)} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} c(\beta T_\infty - q) \psi_i^{(e)} dx$$

(3.83b)

利用线性插值函数，得到(当a、f和q为常数时)

$$[K^{(e)}] = \frac{a}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [H^{(e)}] = \frac{c\beta h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{F^{(e)}\} = \frac{fh_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \{Q^{(e)}\} = c(\beta T_\infty - q) \frac{h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

(3.84)

有关高次单元的一些评论是为了求解形如式(3.1)的一维二次方程的。注意到方程(3.4)至(3.8)对任何次单元都是有效的，只

需要代换以合适的积分限x_A及x_B和插值函数，以计算$[K^{(e)}]$和$\{F^{(e)}\}$。对于高次(而不是线性的)单元，附加的节点可视作端节点的中间点。变分公式以至列向量$\{F^{(e)}\}$应该加以修改，以计及在中间节点处次变量(adu/dx)的可能指定值。对于具有n个节点(因而插值多项式为$n-1$次)的单元，变分公式(3.4a)取以下形式

$$0=\int_{x_A}^{x_B}\left(a\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}-vf\right)dx-P_1^{(e)}u(x_A)$$

$$-P_2^{(e)}u(x_A+\overline{x}_2)-\cdots-P_n^{(e)}u(x_B) \tag{3.85a}$$

式中，$\overline{x}_i$为单元中第i个节点的局部坐标($\overline{x}_1=0$)，单元列向量$\{F^{(e)}\}$的形式为

$$F_i^{(e)}=\int_{x_A}^{x_B}\psi_i^{(e)}fdx+P_1^{(e)}\psi_i^{(e)}(\overline{x}_1+x_A)+\cdots$$

$$+P_n^{(e)}\psi_i^{(e)}(\overline{x}_n+x_A)$$

由于$\psi_i^{(e)}(i=1,2,\cdots n)$的插值性质

$$\psi_i^{(e)}(\overline{x}_j+x_A)=\delta_{ij}$$

力向量可以简化为以下形式

$$F_i^{(e)}=\int_{x_A}^{x_B}\psi_i^{(e)}fdx+p_i^{(e)} \tag{3.85b}$$

在习题3.4中将用到式(3.85b)。

前面各节所用的变分公式是建立在原始二次微分方程的基础之上的。这些公式仅包含问题的因变量作为初始变量。这样的公式在有限元的文献中叫做位移公式，而与之相关联的有限元模型叫做位移模型。原始二次方程也可能写成其它形式。其它的形式涉及到把给定的二次方程分解为一对一次方程，并利用诸如最小二乘法等其它变分法来建立有限元模型。有关这些模型的讨论见第五章。

渴望在数字计算机或计算器上实现这种方法的读者(或导师)，现在就可以着手进行，而不必等到读完3-3节至3-5节。事实上，3-6节和3-7节是为了使大家获得进一步运用有限元法的能力。

下面的部分习题可以通过手算和计算器或计算机来求解。

习　题

下面许多习题是为了用手算而设计的。目的是让学生更深刻地理解用有限元法解决问题时涉及到什么公式，如何求解。在大多数情况下，用计算机程序FEM2D(见3-7节) 解同一问题可以验证手算的结果。

3.1　用下面的不同步骤推导Lagrange线性插值函数 (3.17b)。从φ_1开始，并将它表示为一个函数，此函数在$\overline{X}=h_e$处变为零 ($\overline{X}$为局部坐标)：

$$\psi_1(\overline{X})=c(h_e-\overline{X})\qquad c=常数$$

然后找常数c，使得$\varphi_1(0)=1$。这样推导出的函数ψ_1满足式 (3.13) 的条件(1)。对ψ_2重复同样的过程。证明方程式 (3.13) 的条件(2) 同样由此ψ_i满足 (见3-6节)。

3.2　利用习题3.1描述的过程，对三个节点的 (一维) 单元 (具有等距节点) 推导Lagrange二次插值函数，并证明它们满足方程式(3.13) 的条件2。注意，在节点i处的Lagrange 内插值函数在其它两个节点处变为零，而在节点i处取值为1。为了简便，使用局部坐标 $\overline{x}$。

3.3　给出以下方程在一个单元上的有限元公式：

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+b\frac{du}{dx}+cu=f\quad 当x_A<x<x_B$$

3.4　利用习题3.2推导出的二次插值函数来解方程(3.1) 和(3.2)。用二个单元。将所得结果与用4个线性单元时所得的解作比较，并与精确解进行比较。

3.5　对以下三组边界条件：

(a) $u(0)=u(1)=0$　Dirichlet边界条件

(b) $u(0)=0,\qquad \frac{du}{dx}(1)=1$混合边界条件

(c) $\frac{du}{dx}(0)=1,\ \frac{du}{dx}(1)=\frac{4}{3}$　Neumann　边界条件

求解微分方程

$$-\frac{d^2u}{dx^2}-cu+x^2=0\qquad 当0<x<1$$

注意到Neumann 边界条件中，初始因变量都没有指定，因此系数矩阵保持不变。当$c=0$时，系数矩阵为奇异的，因此不能求逆。在这种情况下，v_i中

之一（例如v_2）应设为一常数（例如为零），以除去"刚体"模态（也就是说，以确定解中的任意常数）。使用三个线性有限元，并将你的结果与例2.8中$c=1$时给出的答案相比较，同时，确定$x=0$处的$\frac{du}{dx}$。

3.6 设有一受轴向荷载构件组成的组合结构示如习题3.6的图，写出此结构的连续性条件（即单元节点值和总的节点值之间的对应关系）和平衡条件（即在单元间节点处$p_i^{(e)}$间的关系）。推导出此结构的集合系数（刚度）矩阵，并建立未知位移和力的方程。

刚性杆

习题3.6的图

3.7 设有一线性弹性弹簧体系示如习题3.7的图中，计算弹簧中的位移U_2、U_3、U_4及U_5和内力〔提示：类似于式(3.30)，用各个方块的脱离体图列出力平衡方程〕。

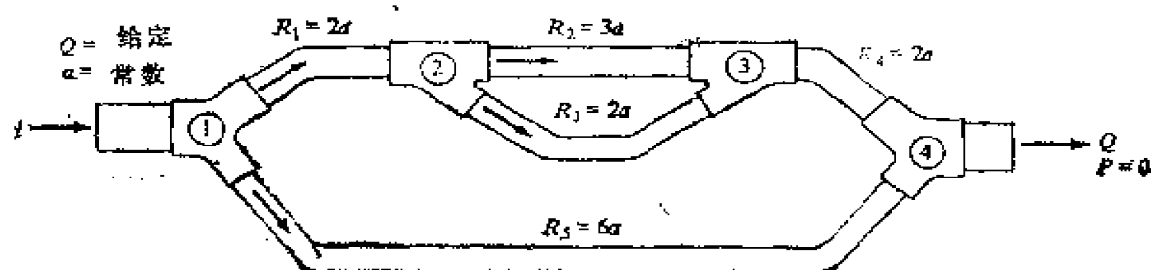
典型单元

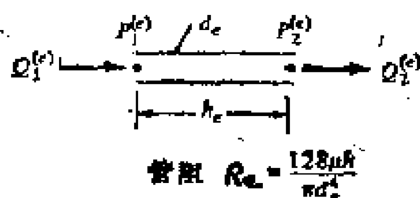
习题3.7的图

3.8 设有一液压网络（其流动假定是层流的）示如习题3.8的图中，其中一个具有两个节点的典型单元（它是一个具有等截面面积的圆管）亦示于图中，在每一节点处，未知的初始自由度为压力P，次自由度为流量（或排量）Q，联系初始变量和次变量之间关系的单元方程为：

$$\frac{c(d_e)^4}{h_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_1^{(e)}\\ P_2^{(e)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q_1^{(e)}\\ Q_2^{(e)}\end{Bmatrix}\qquad c=\frac{\pi}{128\mu}$$

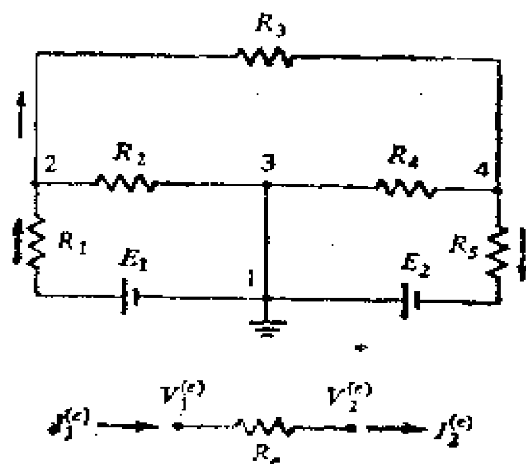
式中，d_e为管子的直径，h_e为管长，μ为液体的粘度。用最小数目的单元确定未知压力及流量。





习题3.8的图

3.9 设有一直流电路示如习题3.9的图中，欲用有限元法确定网络中的



典型单元

习题3.9的图

电压V及电流I。在此情况下，每一个典型有限元由一个电阻R组成，其初始自由度为电压，次自由度为电流，单元方程由Ohm定律给出：

$$\frac{1}{Re}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1^{(e)} \\ V_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(e)} \\ I_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

单元间节点的连续性条件要求在一个闭合回路中流入任何交叉点（节点）的净电流经常为零。试确定未知电压及电流。

3.10 下面给出的是关于一个绝热杆中热传递的微分方程：

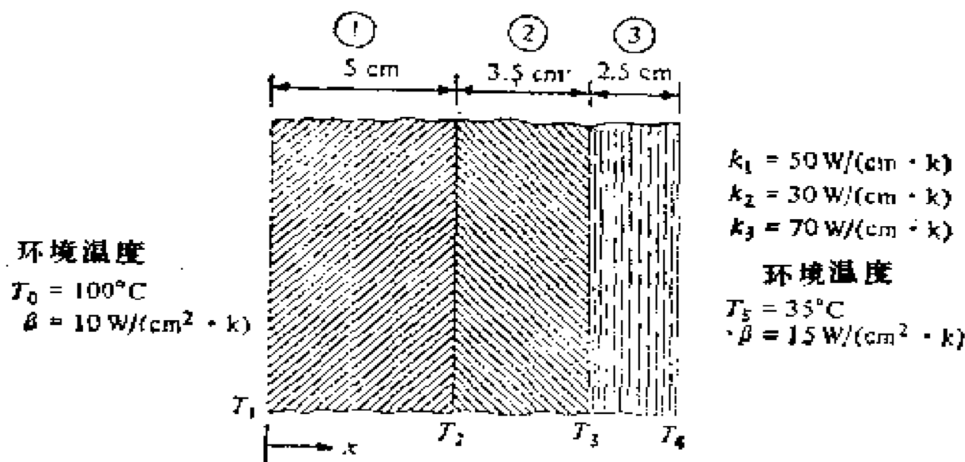
$$-\frac{d}{dx}\left(KA\frac{dT}{dx}\right) = Q \qquad 当0<x<L$$

$$T(0) = T_0\left[KA\frac{dT}{dx} + \beta(T - T^{\infty}) + \hat{q}\right]_{x=L} = 0$$

其变量与例3.2中所述的意义相同，解此方程求$x = L/2$和L处的温度值。取以下值作为数据，并采用线性有限元：$\hat{q} = 0$，$L = 10\text{cm}$，$KA = 1.0(\text{W}\cdot\text{cm})/\text{K}$，$\beta = 25\text{W}/(\text{cm}^2\cdot\text{K})$，$T_0 = 50℃$，$Q = 0$，$T_{\infty} = 5℃$

3.11 当杆为非绝热时，重复习题3.10。

3.12 一绝热墙由三块匀质薄板紧密接触组成（见习题3.12的图）。在静态条件下，在薄板边界处的温度由外表面温度T_1、T_4及接合处温度T_2、T_3来表征，导出当环境温度T_0及T_5和表面散热系数β_0和β_5为已知时用来确定温度$T_i(i = 1, 2, 3, 4)$的公式。假定没有内部热生成，且热流动是一维的($\partial T/\partial Y = 0$)。

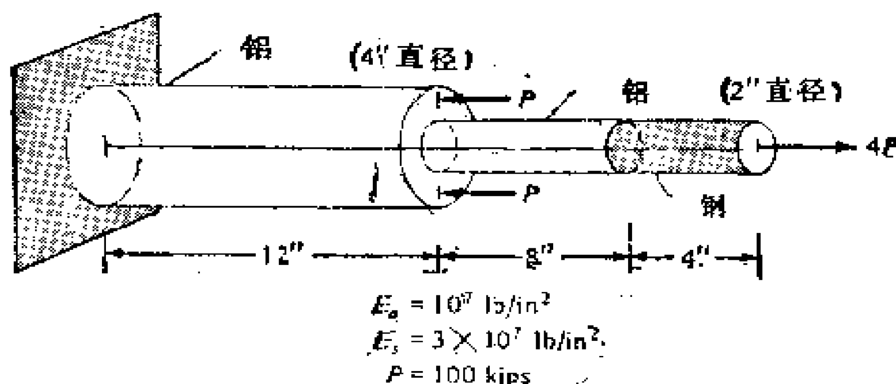


习题3.12的图

3.13 当面积A由下式决定时，重复习题3.10。

$$A = A_0\left(1 + \frac{X}{L}\right)$$

3.14 求阶梯杆问题的三个单元的有限元解(杆件的轴向变形)。其几何形状及数据见习题3.14的图。



习题3.14的图

3.15 支配(径向)对称二维场问题的微分方程为

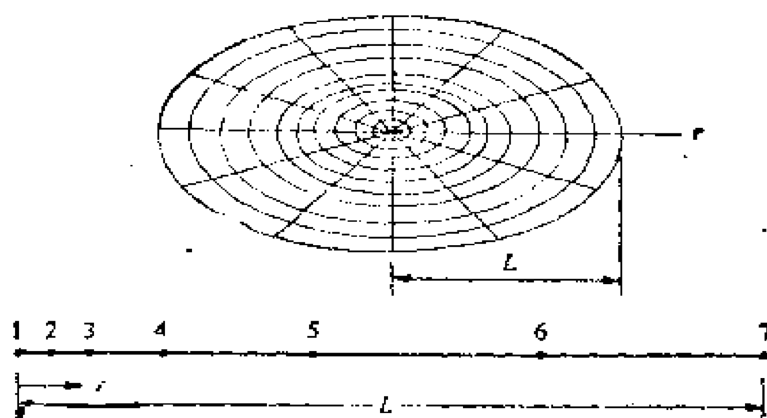
$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk\frac{du}{dr}\right) = f(r) \quad 当0 < r < L$$

式中，r为径向坐标。此类方程出现在表2.1中，当域为圆形或环形且径向对称时，这类方程式出现在表2.1所列举的所有场合。推导出考虑下面两种类型的边界条件

$$u = u_0 \quad K\frac{du}{dr}n_r + \beta(u - u_\infty) + \hat{q} = 0$$

时上述方程的有限元模型。注意，积分是对于极坐标r进行的(因而，用rdr乘以方程，并从0到L积分)。

3.16 一个具有径向流动的无约束蓄水层的支配方程由习题3.15中的微分方程给出，其中，k表示渗透率系数，f为流量，u为压头，泵送看成是负流量。现在研究以下问题。一个井渗入一个蓄水层，而泵送是以$Q = 150$ M^3/h的速率工作。蓄水层的渗透率为$R = 25m^3/(h \cdot m^2)$。蓄水层为无约束的，在流动场中存在径向对称性(以泵为径向坐标的原点)。在径向距离$L = 200m$处有一常数压头$u_0 = 50m$。求在径向距离(线性元素非均匀网络)0，10，20，40，80及140m(见题3.16图)处的压头。只要求建立此未知量的矩阵方程(这样，此方程就可以在数字计算机上求解)。



习题3.16的图

3.17 支配一个无粘性液体一维流动的方程为

$$-\frac{d}{dx}\left(\rho A\frac{d\phi}{dx}\right)=0 \quad 0<x<L$$

式中，ϕ为速度势，ρ为密度，A为管的截面积。速度u与速度势ϕ之间的关系为

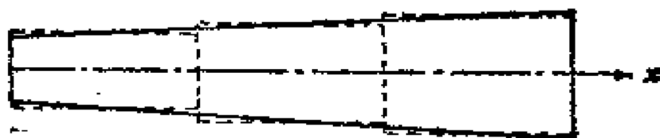
$$u=\frac{d\phi}{dx}$$

注意，在ϕ中的常数项并不影响速度场。用两个二次单元确定长度为L的变截面管的速度场。取入口速度为u_0，并假定在出口处的速度势为零(以避免在速度势中出现常数项)。截面积为

$$A=A_0\left[z-\left(\frac{X}{L}\right)\right]。$$

3.18 用三个线性单元和下面的近似式，重复做习题3.17(见习题3.18的图)：

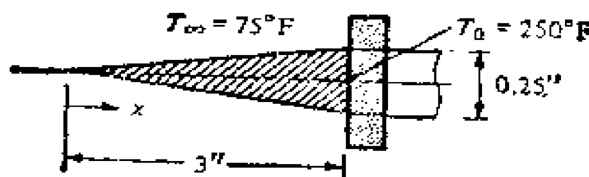
$$A^{(e)}=\frac{1}{2}[A(x_e)+A(x_{e+1})] \quad e=1,\ 2,\ 3,\ 4。$$



习题3.18的图

3.19 求锥形散热片中的温度分布（见习题3.19的图）。假定在散热片

根部的温度为 250°F，导热率 $k=120\text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}\cdot{}^\circ\text{F})$，表面散热系数 $\beta=15\text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}\cdot{}^\circ\text{F})$，并采用三个线性单元。（在散热片顶部和底部的环境温度为 $T_\infty=75^\circ\text{F}$）



习题3.19的图

3.20 在施加荷载 f 及 p 和温度变化 T 的情况下，支配一根弹性杆件轴向变形的方程为

$$-\frac{d}{dx}\left[EA\left(\frac{du}{dx}-\alpha T\right)\right]=f \quad 0<x<L,$$

式中，α 为热膨胀系数，E 为弹性模量，A 为截面面积。利用三个线性有限单元，确定一根长度为 30 吋非均匀棒的轴向位移。假设棒的左端固定，施加轴向力 $p=400$ 磅，温度变化为 60°F。取 $A(x)=6-x/10$ 吋^2，$E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$\alpha=12\times10^{-6}$ 吋/(吋·°F)。

3.21 设支配弹性梁弯曲的一对微分方程为：

$$-\frac{d^2M}{dx^2}=f \qquad 0<x<L;$$

$$-\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{M}{EI}=0 \qquad 0<x<L,$$

式中，w 为横向挠度，M 为弯矩，f 为分布横向荷载，E 为弹性模量，I 为梁的惯性矩。建立与上述方程对相关联的变分公式（不要略去弯矩），并对一个单元得出相关的有限元模型：

$$\begin{bmatrix}[k^{11}] & [k^{12}]\\ [k^{21}] & [k^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{W\}\\ \{M\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\end{Bmatrix}$$

3.22 求解在均匀分布荷载下简支梁的弯曲问题。设 EI 为常数，且在半跨梁中采用两个线性单元。

3.23 求与以下方程有关的头三个特征值 λ（采用线性单元）

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u \qquad 0<x<L,$$

$$u(0)=u(L)=0$$

3.24 采用线性单元，对于具有面积为 $A_1=A_0$，$A_2=1.5A_0$，$A_3=$

$2A_0$的三个管子的组合体，重复做习题3.17。

3.25 采用线性单元，求以下方程的头两个特征值λ：

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u \qquad 0<x<1,$$

$$u(0)=0 \qquad u(1)+\frac{du}{dx}(1)=0$$

3.26 设以下偏微分方程是在一绝热杆中非稳定热传导下产生的

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f \qquad 0<x<L,$$

$$u(0)=u_0 \quad \left[a\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(u-u_\infty)+\hat{q}\right]_{x=L}=0,$$

按第二章中指出的步骤，对一个典型单元推导出半离散变分公式、半离散有限元公式及完全离散化的有限元方程。

3.27 利用两个单元(线性)模型及在习题3.26中推导出的半离散有限元方程，决定在$a=1$，$f=0$，$u_0=1$及$\hat{q}=0$情况下节点温度随时间变化的函数(利用Laplace变换法解以时间为变量的常微分方程)。

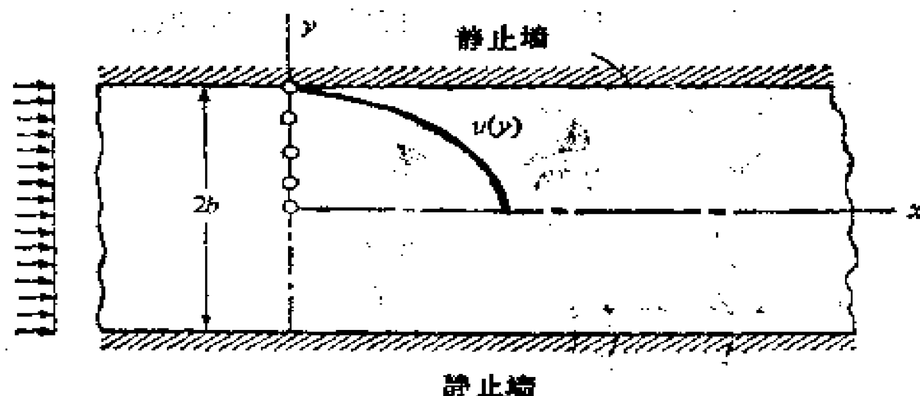
3.28 在由两片平行的平面墙组成的通道中研究稳态流动问题(见习题3.28的图)。令墙间距离用$2b$表示。则支配Stoke流动(见习题2.7)的方程式有以下简单形式[因为$u=u(y)$，$v=0$]

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2} \tag{a}$$

其边界条件为

$$u=0 \quad 当y=\pm b, \tag{b}$$

因为$\partial p/\partial y=0$，故方程式(a)意味着$\mu\dfrac{d^2u}{dy^2}$为常数，因此dp/dx为常数（例



习题3.28的图

如等于f_0)。试用四个单元的（线性）有限元模型解方程(a) 及(b)，将此有限元解与精确解作比较：

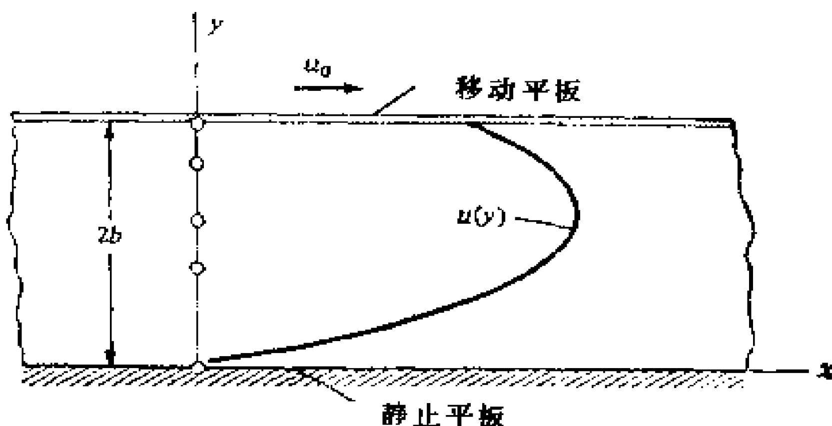
$$u = -\frac{1}{\mu}f_0(b^2 - y^2)$$

3.29 研究被称为Cauctte流动的问题，亦即在两块平行的平面墙之间的流动问题，其中一块是静止的，另一块以速度u_0在自身的平面内移动(见图3.29)。支配流动的方程由习题3.28中的式(a) 给出。问题的边界条件为

$$u(0) = 1,\ u(2b) = u_0 = 1,$$

当 $f_0 = 3/b$及$u = 1$ 时，利用四个线性单元的非均匀网格（$h_1 = 0.8b$, $h_2 = 0.5b$, $h_3 = 0.3b$, $h_4 = 0.4b$）解此问题，并将有限元解与以下精确解进行比较：

$$u = \frac{u_0 y}{2b} - \frac{2b^2}{u}f_0\frac{y}{2b}\left(1 - \frac{y}{2b}\right).$$



习题3.29的图

3.30 设有四个线性（代数）方程联立的方程组，其形式为

$$\sum_{j=1}^{4} k_{ij}U_j = F_i \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

对以下两种情况修改并解此方程：

(a) $U_1 = \alpha$;

(b) $v_1 = \alpha$, $U_2 = \beta$.

3.31 （通过一圆柱形汽缸的轴对称径向热流动问题）。研究由于热传导通过均匀空心圆柱形汽缸时轴对称径向热流动的问题，汽缸的内径为r_i，外径为r_0。若汽缸足够长，则端点影响可以忽略，支配方程为：

$$-\frac{d}{dr}\left(kA\frac{dT}{dr}\right)=AQ \qquad 当 r_i<r<r_0,$$

式中，k为导热系数，$A=2\pi rL$为表面面积，L为汽缸长度，Q 为每单位面积生成的热量，r为径向坐标，T为温度。热通量由下式给出：

$$q=-kA\frac{dT}{dr}$$

利用以下数据：$r_0=3.25\text{in}$，$r_i=1.75\text{in}$，$L=10\text{ft}$，$Q=0$，$k=0.01\text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}\cdot{}^\circ\text{F})$，$T_i=400{}^\circ\text{F}$，$T_0=80{}^\circ\text{F}$；及三个线性单元来决定汽缸中的温度分布，将有限元解与精确解

$$T=T_i-(T_i-T_0)\frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_0/r_i)}$$

作比较。式中，T_i及T_0分别为内外壁处的指定温度。

3.32 （汽缸及盘的弹性，轴对称变形问题）。研究一个长空心汽缸（平面应变）或一个薄环形盘（平面应力）的轴对称变形问题。用法向（径向）应力σ_r和切向（圆周）应力σ_θ表示的平衡条件为：

$$\frac{d}{dr}[t\sigma_r]+\frac{t}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)+tf_r=0 \quad 当 r_i<r<r_0 \tag{i}$$

式中，$t=t(r)$为盘的厚度，f_r为体力，基本关系（即应力—应变关系）为

$$\sigma_r=c_{11}\varepsilon_r+c_{12}\varepsilon_\theta \qquad \sigma_\theta=c_{12}\varepsilon_r+c_{22}\varepsilon_\theta \tag{ii}$$

式中，ε_r及ε_θ为应变，c_{ij}为弹性常数。在轴对称的情况下，应变—位移的关系为：

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr} \qquad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r} \tag{iii}$$

对一个各向同性体而言，弹性常数可以用弹性模量E及Poisson 比ν来给出：

	c_{11}	c_{12}	c_{22}
平面应变	$\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	c_{11}
平面应力	$\frac{E}{1-\nu^2}$	$\frac{\nu E}{1-\nu^2}$	c_{11}

把(ii)，(iii)用到(i)式中，并以rv乘所得的结果(v为试函数)，最后对v积分，就可以得到变分公式和用径向位移表示的联系式（i）和（iii）的有限元模型。利用有限元模型求以下问题的三个单元的解：沿着内边界（$r=r_i$)固定（即$u=0$），在外边界上（$r=r_0$)无牵引应力（即$\sigma_r=0$）的等厚度环，施加体力为$f_r=c_0r$。将有限元解与以下精确解作比较：

$$u=\frac{c_0 r}{8c_{11}}\left[1-\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right][c_1-(r^2-\nu_i^2)],$$

$$c_1=(r_0^2-r_i^2)\frac{(3+r)r_0^2+(1-\nu)r_i^2}{(1+\nu)r_0^2+(1-\nu)r_i^2}。$$

3.33 研究二次方程(3.1)。把它改写为一对一次方程：

$$-\left(\frac{d\sigma}{dx}+f\right)=0, \qquad a\frac{du}{dx}-\sigma=0$$

注意，σ是由第二个方程确定的，给出在一个单元内此一方程对的变分形式，并用Ritz法建立相应的有限元模型。

3.34 （习题3.33的继续）用罚函数法重复习题3.33，考虑方程(3.5)中的泛函，并且把方程$du/dx-\sigma/a=0$作为约束来处理，罚函数公式的修正泛函变为

$$I_r(u,a)=I(u)+\frac{r}{a}\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(\frac{du}{dx}-\frac{\sigma}{a}\right)^2dx,$$

式中，$I(u)$是式（3.5）中的二次泛函，r为罚参数，利用I_r来推导罚有限元模型。

3-3 一维四次方程式

这里研究产生于梁弹性弯曲中的一维四次微分方程的(位移)有限元公式。此一方程可以分解为一对包含弯矩（bd^2W/dx^2）及横向挠度 w 的二次方程，这些方程式可以用3-2节中提出过的概念来建立。这样的公式称为混合公式，我们将在第五章讨论。四次方程的位移公式用到 3-2 节中用于二次方程的步骤，但在数学细节上略有不同，特别是在方程式的有限元公式方面有所不同。

该四次微分方程为

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)+f=0 \quad 0<x<L \tag{3.86}$$

式中，$b=b(x)$及$f=f(x)$为x(即数据)的给定函数，w为因变量。在梁弯曲的情况下，b表示梁的弹性模量E和惯性矩I之积，而f表示

横向分布荷载（向下作用），w为梁的横向挠曲（向上为正）。除了要满足微分方程（3.86）外，w 还必须满足适当的边界条件；因为此方程为四次的，为了解此方程需要四个边界条件。虽然在有限元分析的头三步中不需要边界条件的知识，但为了完整描述问题起见，我们选择下面的边界条件（这些边界条件对应于在自由端施加一个集中荷载F_0和一个力矩M_0的悬臂梁，见图3.8a）：

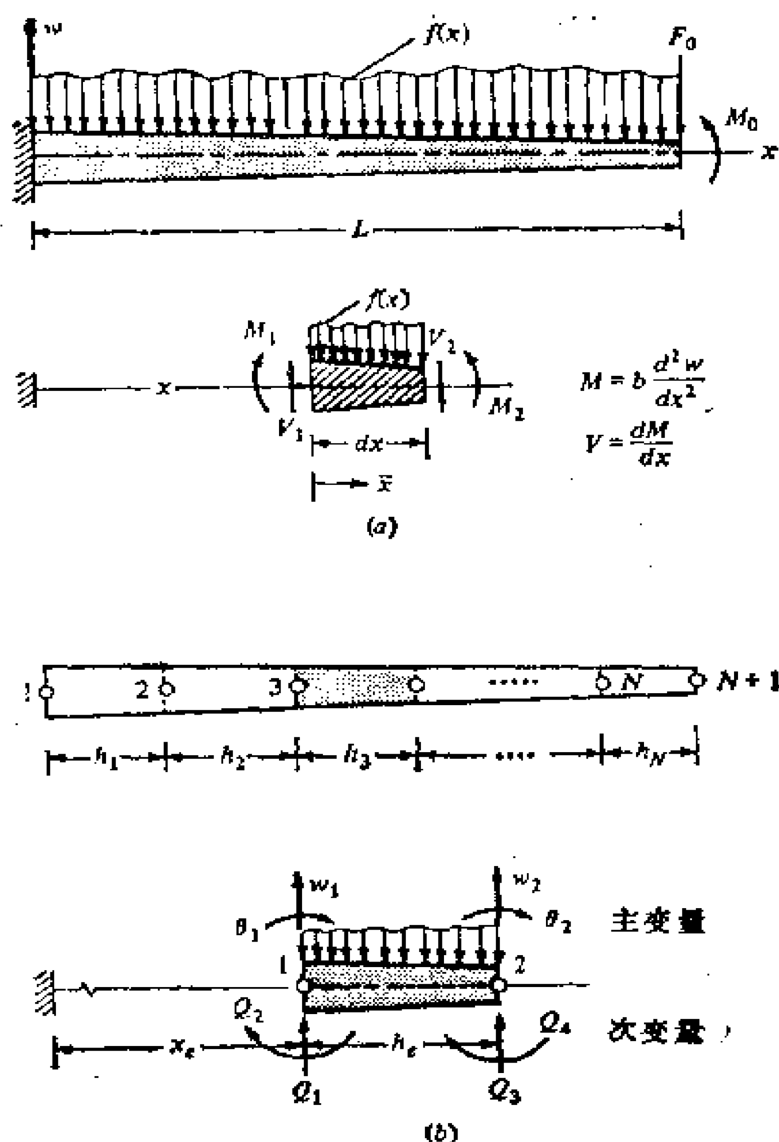


图3.8 四次方程(3.86)的有限元 (a) 弹性梁的弯曲(符号按照习惯约定)；(b) 有限元离散化及一个典型单元

$$w(0)=0, \qquad \frac{dw}{dx}(0)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\bigg|_{x=L}=F_0, \qquad \left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\bigg|_{x=L}=M_0 \quad (3.87)$$

方程式(3.86)的变分公式应该证明边界条件(3.87)的形式是正确的。下面给出(3.86)的有限元分析的分步过程。

3-3-1 将域离散化为单元

域被分为一组(例如N个)线性单元，每一单元至少有两个端节点。虽然从几何上说这样的单元与用于二次方程中的一样，但是在每一节点处的初始未知量数目及形式是受微分方程(3.86)的变分公式所支配的。根据式(3.86)的物理背景，这种单元叫做梁单元。

3-3-2 单元方程式的推导

在这一步里，取出一个典型单元$\Omega^e=(X_e, X_{e+1})$(见图3.8b)，并对此单元建立方程式(3.86)的变分形式。变分公式能给我们提供问题的初始变量及次变量；这些变量在每个节点处都要加以标注。然后对初始变量进行适当的近似，从而推导出单元方程。

典型单元上方程的变分公式仿照以前用过的步骤写出

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} v\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)+f\right]dx \\
&= \int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[-\frac{dv}{dx}\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)+vf\right]dx \\
&\quad +\left[v\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x=X_e}^{x_{e+1}} \\
&= \int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}+vf\right)dx \\
&\quad +\left[v\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)-\frac{dv}{dx}b\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=x_e}^{x_{e+1}}
\end{aligned} \qquad (3.88)$$

式中，v为一个试函数，对x为二次可微。对边界项加以观察，可以发现基本边界条件包含w及dw/dx的给定值，而自然边界条件

包含bd^2w/dx^2和$(d/dx)(bd^2w/dx^2)$在单元端点处的给定值。这样就有两个基本边界条件和两个自然边界条件；因此，必须使 w和dw/dx作为初始变量在每个节点处一致起来（使得基本边界条件包含在插值中）。自然边界条件始终保持变分的形式，并且最终落在矩阵方程的等号右方（即源向量）。为了计算上方便起见，引入下面的符号：

$$
\begin{aligned}
&\frac{dw}{dx} \equiv -\theta \\
&Q_1^{(e)} \equiv \left[\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x=x_e} \\
&Q_2^{(e)} \equiv \left[b\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=x_e} \\
&Q_3^{(e)} \equiv -\left[\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x=x_{e+1}} \\
&Q_4^{(e)} \equiv -\left[b\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=x_{e+1}}
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

对于梁弯曲问题，$Q_1^{(e)}$和$Q_3^{(e)}$表示剪力，$Q_2^{(e)}$和$Q_4^{(e)}$表示弯矩（见图3.8a）。采用这种符号时，变分公式(3.88)变成

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}+vf\right)dx - v(x_e)Q_1^{(e)} \\
&\quad -\left[\frac{dv}{dx}(x_e)\right]Q_2^{(e)} - v(x_{e+1})Q_3^{(e)} - \left[\frac{dv}{dx}(x_{e+1})\right]Q_4^{(e)} \\
&\equiv B(v,W) - l(v)
\end{aligned}
\tag{3.90a}
$$

式中，双线性及线性公式由下式给出

$$
\begin{aligned}
B(v,\ w) &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}dx \\
l(v) &= -\int_{x_e}^{x_{e+1}} vf dx + v(x_e)Q_1^{(e)} \\
&\quad + \left(-\frac{dv}{dx}\right)\Big|_{x_e} Q_2^{(e)} + v(X_{e+1})Q_3^{(e)} \\
&\quad + \left(-\frac{dv}{dx}\right)\Big|_{x_{e+1}} Q_4^{(e)}
\end{aligned}
\tag{3.90b}
$$

在固体力学中称做梁单元的总位能的二次泛函为[从式（2.33）得

出了

$$Ie(w)=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+wf\right]dx-w(x_e)Q_1^{(e)}$$

$$-\left(-\frac{dw}{dx}\right)\bigg|_{x_e}Q_2^{(e)}-w(x_e+1)Q_3^{(e)}$$

$$-\left(-\frac{dw}{dx}\right)\bigg|_{x_{e+1}}Q_4^{(e)} \qquad (3.91)$$

方括号中的第一项叫做由于弯曲的弹性应变能，第二项是由分布荷载所作的功，其余项是考虑通过单元(广义)位移中由端点（广义）力Q_i所作的功。

插值函数的推导　变分式（3.90a)要求插值函数是连续的，且具有连续的一、二、三阶导数(因而Q_1、Q_3不为零)，同时要满足一定的(插值)性质，使得w的近似式满足(一个单元的)端点条件

$$\begin{aligned}&w(x_e)=w_1,\quad w(x_{e+1})=w_2\\&\theta(x_e)=\theta_1,\quad \theta(x_{e+1})=\theta_2\end{aligned} \qquad (3.92)$$

在设法满足端点条件时，我们将自动地使连续性条件得以满足。因此，我们集中精力去满足端点条件(3.92)，这些条件形成了插值过程的基础。

由于在一个单元中一共有四个条件，因此w必须选择为带四个参数的多项式：

$$w(x)=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3 \qquad (3.93)$$

注意，连续性条件是自动满足的（当$C_4\neq0$)。下一步是用w_1，w_2，θ_1，θ_2来表示C_i，使得条件(3.92)被满足：

$$w_1=w(x_e)=c_1+c_2x_e+c_3x_e^2+c_4x_e^3$$

$$\theta_1=\left(-\frac{dw}{dx}\right)\bigg|_{x=x_e}=-c_2-2c_3x_e-3c_4x_e^2$$

$$w_2=w(x_{e+1})=c_1+c_2x_{e+1}+c_3x_{e+1}^2+c_4x_{e+1}^3$$

$$\theta_2=\left(-\frac{dw}{dx}\right)\bigg|_{x=x_{e+1}}=-c_2-2c_3x_{e+1}-3c_4x_{e+1}^2$$

$$(3.94a)$$

或

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_e & x_e^2 & x_e^3 \\ 0 & -1 & -2x_e & -3x_e^2 \\ 1 & x_{e+1} & x_{e+1}^2 & x_{e+1}^3 \\ 0 & -1 & -2x_{e+1} & -3x_{e+1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (3.94b)$$

对矩阵方程(3.94b)求逆，用 w_1，w_2，θ_1，θ_2写出c_i，并将结果代入到式(3.93)中，得

$$\begin{aligned} w(x) &= \phi_1^{(e)} w_1^{(e)} + \phi_2^{(e)} \theta_1^{(e)} + \phi_3^{(e)} w_2^{(e)} + \phi_4^{(e)} \theta_2^{(e)} \\ &= \sum_{j=1}^{4} u_j \phi_j^{(e)} \end{aligned} \quad (3.95a)$$

式中

$$u_1 = w_1,\ u_2 = \theta_1,\ u_3 = w_2,\ u_4 = \theta_2 \quad (3.95b)$$

$$\begin{aligned} \phi_1^{(e)} &= 1 - 3\left(\frac{x - x_e}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x - x_e}{h_e}\right)^3 \\ \phi_2^{(e)} &= -(x - x_e)\left(1 - \frac{x - x_e}{h_e}\right)^2 \\ \phi_3^{(e)} &= 3\left(\frac{x - x_e}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x - x_e}{h_e}\right)^3 \\ \phi_4^{(e)} &= -(x - x_e)\left[\left(\frac{x - x_e}{h_e}\right)^2 - \frac{x - x_e}{h_e}\right] \end{aligned} \quad (3.96)$$

使用局部(或单元)坐标$\bar{x}$，插值函数$\phi_i^{(e)}$可以写成更简单的形式

$$\begin{aligned} \phi_1^{(e)} &= 1 - \left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 \\ \phi_2^{(e)} &= -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 \\ \phi_3^{(e)} &= 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 \\ \phi_4^{(e)} &= -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right] \end{aligned} \quad (3.97)$$

方程式(3.92)的头两个条件意味着

$$\begin{aligned} &\phi_1^{(e)}(xe) = 1;\ \phi_i^{(e)}(xe) = 0;\ i \neq 1; \\ &\phi_3^{(e)}(x_{e+1}) = 1;\ \phi_i^{(e)}(x_{e+1}) = 0;\ i \neq 3; \end{aligned} \quad (3.98a)$$

而方程式(3.92)的后两个条件意味着

$$-\frac{d\phi_2^{(e)}}{dx}\bigg|_{x=x_e}=1;\quad \frac{d\phi_i^{(e)}}{dx}\bigg|_{x=x_e}=0,\quad 当 i\neq 2;$$

$$-\frac{d\phi_4^{(e)}}{dx}\bigg|_{x=x_{e+1}}=1;\quad \frac{d\phi_i^{(e)}}{dx}\bigg|_{x=x_{e+1}}=0;\quad 当 i\neq 4$$

(3.98b)

容易验证，$\phi_i^{(e)}$正好满足条件(3.98)。须要指出$\phi_i^{(e)}$的下面一些性质(见图3.9)：

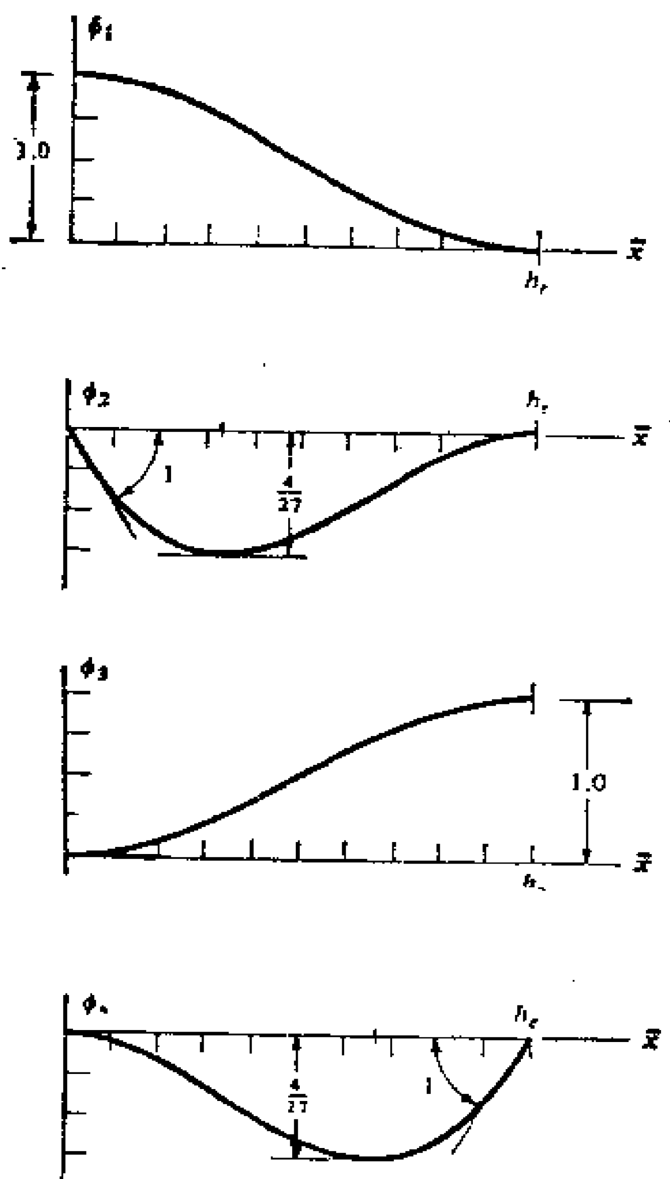


图3.9 定义如式(3.97)的Hermite 三次插值函数

$$\phi_{2i-1}^{(e)}(\bar{x}_j)=\delta_{ij},\quad \phi_{2i}^{(e)}(\bar{x}_j)=0,\quad \sum_{i=1}^{2}\phi_{2i-1}^{(e)}=1$$
$$\frac{d\phi_{2i-1}^{(e)}}{dx}(\bar{x}_j)=0,\qquad -\frac{d\phi_{2i}^{(e)}}{dx}(\bar{x}_j)=\delta_{ij} \tag{3.99}$$

式中，$\bar{x}_1=0$和$\bar{x}_2=h_e$是单元e的节点1和节点2的局部座标。

值得指出的是，上面推导的插值函数的次数对变分公式(3.90)是最小的要求。如果希望w的近似程度更高(即高于三次)，则在两节点的每个节点处使更多的因变(初始)未知数取得一致。例如，如果在两节点的每个节点处增加$\frac{d^2w}{dx^2}$作为初始未知量，那末就一共有六个条件，为了插值端点条件，就要求一个五次的多项式。应该注意，在单元的四个节点(两个内部节点及两个端节点)处用三次多项式来插值w是不允许的，因为虽然连续性条件满足，但多项式不能满足(3.92)中第二组端点条件。在梁弯曲问题中，这相当于在单元间的边界处违背了斜率的连续性。

方程式的有限元模型　用方程式(3.95)的近似式代替变分式(3.90)中的w，并用$v=\phi_i$代入式(3.90)，注意到性质(3.99)，得到

$$0=\sum_{j=1}^{4}\left(\int_{x_e}^{x_{e+1}}b\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx\right)u_j^{(e)}+\int_{x_e}^{x_{e+1}}\phi_i f dx-\phi_i^{(e)} \tag{3.100a}$$

或
$$\sum_{j=1}^{4}k_{ij}^{(e)}u_j^{(e)}-F_i^{(e)}=0 \tag{3.100b}$$

式中

$$k_{ij}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}b\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx$$
$$F_i^{(e)}=-\int_{x_e}^{x_{e+1}}\phi_i f dx+Q_i^{(e)} \tag{3.101}$$

方程式(3.100)表示方程式(3.86)的有限元模型，任何允许的插

值函数ϕ_i都可以用于方程式（3.101）中。

对于单元中b和h为常数的情况，单元矩阵$[K^{(e)}]$（刚度）及$\{F^{(e)}\}$（广义力）由下面的式子给出

$$[K^{(e)}]=\frac{2b}{h^3}\begin{bmatrix}6 & -3h & -6 & -3h\\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2\\ -6 & 3h & 6 & 3h\\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2\end{bmatrix}$$

$$\{F^{(e)}\}=-\frac{fh}{12}\begin{Bmatrix}6\\ -h\\ 6\\ h\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\end{Bmatrix} \tag{3.102}$$

容易验证，在$\{F^{(e)}\}$中的$-(fh/12)\{\vdots\}$项表示由于单元上均匀分布荷载在节点1，2处引起的"静态等效"力和弯矩。当f为x的复杂代数函数时，材料力学方法变得没有吸引力了。相反，方程式（3.101）提供了计算这些分量的直接方法。

3-3-3 单元方程式的集合

为了说明集合的过程，选择两个单元的模型，并假定f及$b=EI$均为常数。这样，在此问题中就有三个总的节点，一共有6个总的初始变量和6个次变量。注意下面的局部初始自由度u_i和总的（初始）自由度U_i之间的关系（见图3.10）：

$$\begin{aligned}&u_1^{(1)}=w_1^{(1)}=U_1,\quad u_2^{(1)}=\theta_1^{(1)}=U_2,\\ &u_3^{(1)}=w_2^{(1)}=w_1^{(2)}=U_3\\ &u_4^{(1)}=\theta_2^{(1)}=\theta_1^{(2)}=U_4,\quad u_3^{(2)}=w_2^{(2)}=U_5,\\ &u_4^{(2)}=\theta_2^{(2)}=U_6\end{aligned} \tag{3.103}$$

连通性矩阵$[B]$（它将用于计算机中）为

$$[B]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} \tag{3.104}$$

由于每个节点有两个初始未知量（或自由度），在$[B]$中，数目字的重复表示与此二种自由度相关的系数应该加起来。在$[B]$中，数字2重复（它相应于总的自由度3和4）表示总的K_{33}，K_{34}，K_{43}，

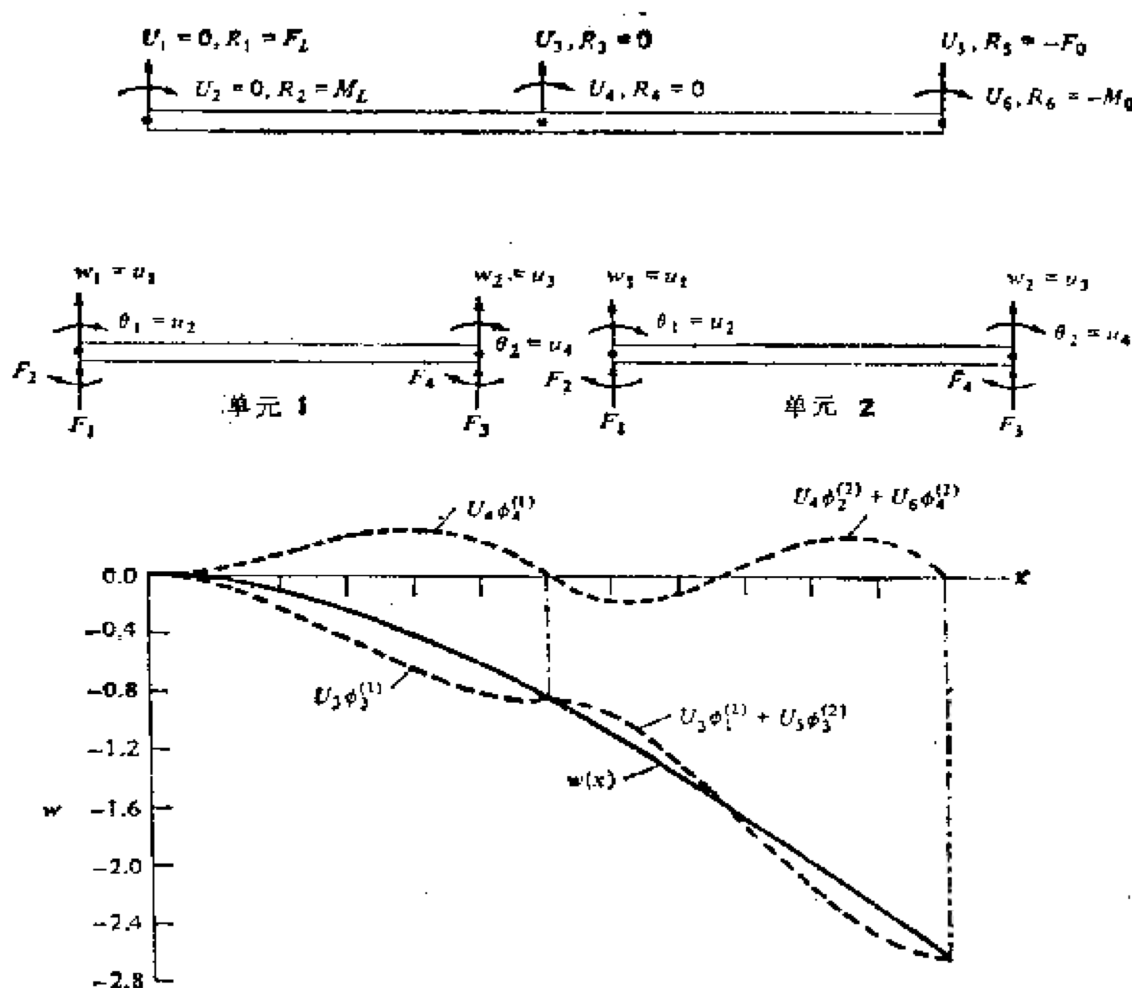


图3.10　梁单元的集合；解$w(x)$的有限元表示

K_{44}受单元1和2的影响为：

$$K_{33}=K_{33}^{(1)}+K_{11}^{(2)},\qquad K_{34}=K_{34}^{(1)}+K_{12}^{(2)}$$
$$K_{43}=K_{43}^{(1)}+K_{21}^{(2)},\qquad K_{44}=K_{44}^{(1)}+K_{22}^{(2)}\qquad(3.105)$$

一般而言，梁单元集合的集合(刚度和力)矩阵有形如式(3.106)和(3.107)的形式

全局节点 1, 2, 3, …, N-1, N

$$
[K]=\begin{pmatrix}
K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & & & & & & \\
K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & & & & & & \\
K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)}+K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & & \mathbf{0} & & \\
K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)}+K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)}+K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & & & & \\
 & & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{34}^{(2)}+K_{12}^{(3)} & & & & \\
 & & K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)}+K_{21}^{(3)} & K_{44}^{(2)}+K_{22}^{(3)} & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & K_{33}^{(n-1)}+K_{11}^{(n)} & K_{34}^{(n-1)}+K_{12}^{(n)} & K_{13}^{(n)} & K_{14}^{(n)} \\
 & & \mathbf{0} & & & & K_{43}^{(n-1)}+K_{21}^{(n)} & K_{44}^{(n-1)}+K_{22}^{(n)} & K_{23}^{(n)} & K_{24}^{(n)} \\
 & & & & & & K_{31}^{(n)} & K_{32}^{(n)} & K_{33}^{(n)} & K_{34}^{(n)} \\
 & & & & & & K_{41}^{(n)} & K_{42}^{(n)} & K_{43}^{(n)} & K_{44}^{(n)}
\end{pmatrix}
\tag{3.106}
$$

$$\{F\}=\left\{\begin{matrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)}+F_1^{(2)} \\ F_4^{(1)}+F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)}+F_1^{(3)} \\ F_4^{(2)}+F_2^{(3)} \\ \vdots \\ F_3^{(N)} \\ F_4^{(N)} \end{matrix}\right\} \tag{3.107}$$

当然，可以把方程式(3.100)对每个单元用U_i重新列出，并把所有单元方程加起来，而得到同样的结果。

对现在的问题，集合方程组为($h=L/2$)

$$\frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 6+6 & 3h-3h & -6 & -3h \\ -3h & h^2 & 3h-3h & 2h^2+2h^2 & 3h & h^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{matrix}\right\}$$

$$=-\frac{fh}{12}\left\{\begin{matrix} 6 \\ -h \\ 6+6 \\ h-h \\ 6 \\ h \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)} \\ Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \\ Q_4^{(2)} \end{matrix}\right\} \tag{3.108}$$

3-3-4 边界条件的引入

首先写出次变量的平衡条件。在总的节点1处，$Q_1^{(1)}$和$Q_2^{(1)}$(对应于剪力F_L和弯矩M_L)是不知道的。在总的节点2处，没有外部施加的剪力和弯矩。因此

$$Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)}=0,\qquad Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)}=0 \tag{3.109a}$$

在全局节点3处，剪力给定为F_0，弯矩给定为M_0：

$$
\begin{aligned}
Q_3^{(2)} &\equiv -\left[\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_{x=L} = -F_0 \\
Q_4^{(2)} &\equiv -\left[b\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=L} = -M_0
\end{aligned}
\tag{3.109b}
$$

其次，令给定的初始变量相等。因为在总的节点 1 处梁是固定的，因此在此节点处的挠度及斜率均为零：

$$
\begin{aligned}
u_1^{(1)} &\equiv w_1^{(1)} = \nu_1 = 0 \\
u_2^{(1)} &\equiv \theta_1^{(1)} = \nu_2 = 0
\end{aligned}
\tag{3.110}
$$

将式（3.109）及（3.110）代入式（3.108）得

$$
\frac{2EI}{h^3}\left[\begin{array}{cc:cccc}
6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\
-3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\
\hdashline
-6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\
-3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\
0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\
0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2
\end{array}\right]
\times\left\{\begin{array}{c}
U_1=0 \\ U_2=0 \\ \cdots\cdots \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6
\end{array}\right\}
= -\frac{fh}{12}\left\{\begin{array}{c}
6 \\ -h \\ \cdots\cdots \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ h
\end{array}\right\}
+\left\{\begin{array}{c}
F_L \\ M_L \\ \cdots\cdots \\ 0 \\ 0 \\ -F_0 \\ -M_0
\end{array}\right\}
\tag{3.111}
$$

3-3-5 方程式的解

头两个自由度U_1，U_2是已知的，其余四个自由度U_3到U_6是待确定的，这一事实使我们想到把矩阵方程（3.111）分解为下面的形式[见式(3.111)中的虚线]：

$$
\begin{bmatrix}
[K^{11}] & [K^{12}] \\
[K^{21}] & [K^{22}]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\Delta^1 \\ \Delta^2
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\{F^1\} \\ \{F^2\}
\end{Bmatrix}
\tag{3.112}
$$

式中，$[K^{11}]$等的意义从式(3.111) 中可以明显看出。进行矩阵相

乘后，式（3.112）可写成：

$$[K^{11}]\{\Delta^1\}+[K^{12}]\{\Delta^2\}=\{F^1\} \tag{3.113a}$$

$$[K^{21}]\{\Delta^1\}+[K^{22}]\{\Delta^2\}=\{F^2\} \tag{3.113b}$$

由于$\{\Delta^1\}$及$\{F^2\}$是已知的（$\{\Delta^1\}=\{0\}$），因此，可以用式（3.113b）来解$\{\Delta^2\}$，然后用式（3.113a）来计算未知反力$\{F^1\}$：

$$\{\Delta^2\}\equiv\begin{Bmatrix}U_3\\U_4\\U_5\\U_6\end{Bmatrix}=\frac{h^3}{2EI}\begin{bmatrix}12 & 0 & -6 & -3h\\ 0 & 4h^2 & 3h & h^2\\ -6 & 3h & 6 & 3h\\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{Bmatrix}-fh\\0\\-F_0-fh/2\\-M_0-fh^2/12\end{Bmatrix} \tag{3.114}$$

注意，在现在的问题中，$\{\Delta^1\}=\{0\}$，因此不必把$[K^{21}]\{\Delta^1\}$项移到式（3.113b）的右方来修正向量$\{F^2\}$。对矩阵求逆，并进行矩阵乘法，得

$$\{\Delta^2\}=\frac{h}{6EI}\begin{bmatrix}2h^2 & -3h & 5h^2 & -3h\\ -3h & 6 & -9h & 6\\ 5h^2 & -9h & 16h^2 & -12h\\ -3h & 6 & -12h & 12\end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix}-fh\\0\\-F_0-fh/2\\-M_0-fh^2/12\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{h}{6EI}\begin{Bmatrix}-5h^2F_0+3hM_0-\frac{17}{4}fh^3\\ 9hF_0-6M_0+7fh^2\\ -16h^2F_0+12hM_0-12fh^3\\ 12hF_0-12M_0+8fh^2\end{Bmatrix}\times$$

$$\{F^1\}=\begin{Bmatrix}F_L\\M_L\end{Bmatrix}=\frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix}-6 & -3h & 0 & 0\\3h & h^2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_3\\U_4\\U_5\\U_6\end{Bmatrix}$$

$$+\frac{fh}{12}\begin{Bmatrix}6\\-h\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_0+2fh\\-2h(F_0+fh)+M_0\end{Bmatrix}\quad(3.115)$$

容易证明，反力F_L及M_L满足梁的静平衡方程：

$$F_L-F_0-2fh=0\quad M_L+2fh^2+2hF_0-M_0=0\quad(3.116)$$

当$EI=58\times10^8\text{lb}\cdot\text{in}^2$，　$L=150\text{in}$（$h=75\text{in}$），　$F_0=8000\text{lb}$，$f=100\text{lb/in}$，$M_0=0$时节点值的有限元解变为：

$$\begin{matrix}U_3=-0.8713\text{in} & U_4=0.02012\text{rad}\\U_5=-2.643\text{in} & U_6=0.02522\text{rad}\end{matrix}\quad(3.117)$$

反力F_L及M_L为

$$F_L=23,000\text{lb},\qquad M_L=2.325\times10^6\text{lb}\cdot\text{in}\quad(3.118)$$

3-3-6　解的后处理

有限元解$w(x)$由下式给出（见图3.10）

$$w(x)=\begin{cases}U_3\phi_3^{(1)}+U_4\phi_4^{(1)} & 当0\leqslant x\leqslant h\\U_3\phi_1^{(2)}+U_4\phi_2^{(2)}+U_5\phi_3^{(2)}+U_6\phi_4^{(2)} & 当h\leqslant x\leqslant 2h\end{cases}$$

$$(3.119)$$

方程式（3.86）和（3.87）的精确解可由直接积分获得：

$$EIw_0(x)=-\frac{f}{24}(L-x)^4+\frac{F_0}{6}(x-L)^3+\frac{M_0}{2}x^2$$

$$-\left(\frac{fL^3}{6}+\frac{F_0L^2}{2}\right)x$$

$$+\frac{fL^4}{24}+\frac{F_0L^3}{6}\qquad 当0\leqslant x\leqslant L$$

$$EI\theta(x)=-\frac{f}{6}(L-x)^3-\frac{F_0}{2}(x-L)^2-M_0x$$

$$+\left(\frac{fL^3}{6}+\frac{F_0L^2}{2}\right)\qquad 当0\leqslant x\leqslant L$$

$$(3.120)$$

$$M(x) = -\frac{f}{2}(L-x)^2 + F_0(x-L) + M_0 \qquad 当0 \leqslant x \leqslant L$$

表3.3列出有限元解（3.119）和精确解（3.120）的比较。注意，有限元解与精确解在节点处相吻合。在其它点，有限元解与精确解之间的差小于2%；在图中（见图3.11），此差值看不出来。

至此完成了四次微分方程（3.86）的有限元法。

表3.3　方程式(3.86)和(3.87)当$M_0=0$时的精确解与有限元解的比较

	有限元解*（两个单元）			精 确 解		
x	$-w$	θ	$-M\times10^{-6}$	$-w$	θ	$-M\times10^{-6}$
0.0	0.0	0.0	2.2781	0.0	0.0	2.325
9.375	0.0168	0.003536	2.0977	0.0171	0.003586	2.1138
18.75	0.0654	0.006781	1.9172	0.0662	0.006838	1.9113
28.125	0.1430	0.009734	1.7367	0.1443	0.009770	1.7177
37.50	0.2470	0.012396	1.5563	0.2484	0.012396	1.5328
46.875	0.3746	0.014765	1.3758	0.3758	0.01473	1.3567
56.25	0.5229	0.016843	1.1953	0.5237	0.01679	1.1895
65.625	0.6895	0.018629	1.0148	0.6897	0.0858	1.0310
75.00	0.8713	0.02012	0.8344	0.8713	0.02012	0.8813
84.375	1.0660	0.021384	0.7242	1.0663	0.02143	0.74033
93.75	1.2717	0.022465	0.61406	1.2725	0.02252	0.60820
103.125	1.4867	0.023369	0.50391	1.4879	0.023404	0.48486
112.50	1.7093	0.024094	0.39375	1.7107	0.024094	0.37031
121.875	1.9379	0.024642	0.28359	1.9392	0.024606	0.26455
131.25	2.1708	0.035011	0.17344	2.1716	0.024954	0.16758
140.625	2.4063	0.025202	0.06328	2.4066	0.025153	0.07939
150.00	2.6428	0.02522	0.04688	2.6428	0.02522	0.0

*$M=EId^2w/dx^2$

在大多数梁问题中，在每一单元中的抗弯刚度 $b\equiv EI$为常数（即，一根梁可以用等截面同性质的梁单元组成的有限元网格来表示）；因此，单元的刚度矩阵（3.102）可以使用。下面研究两个例题。

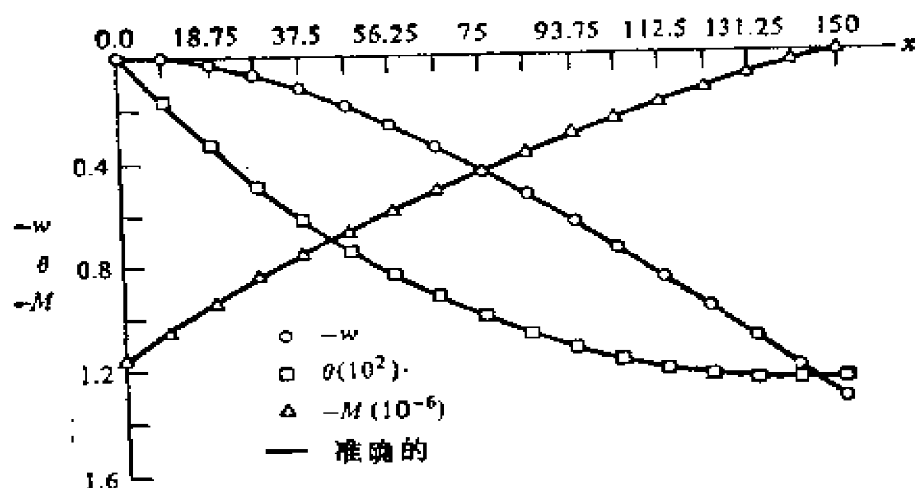
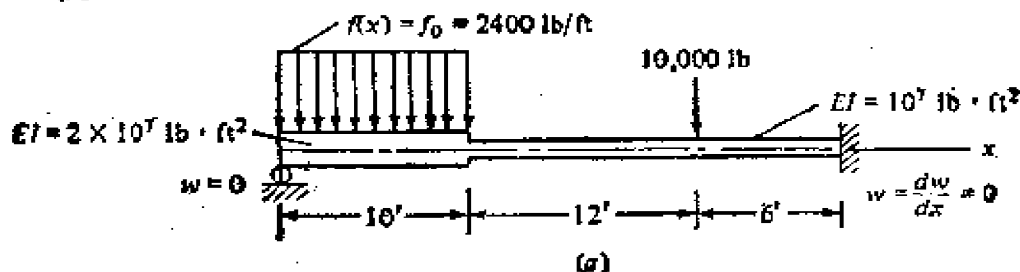
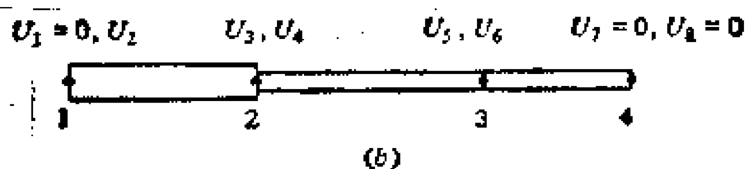


图3.11　方程式(3.86),(3.87)当$M_0=0$时的精确解与有限元解的比较

例3.3　研究图3.12中所示的非连续荷载梁。微分方程(3.86)





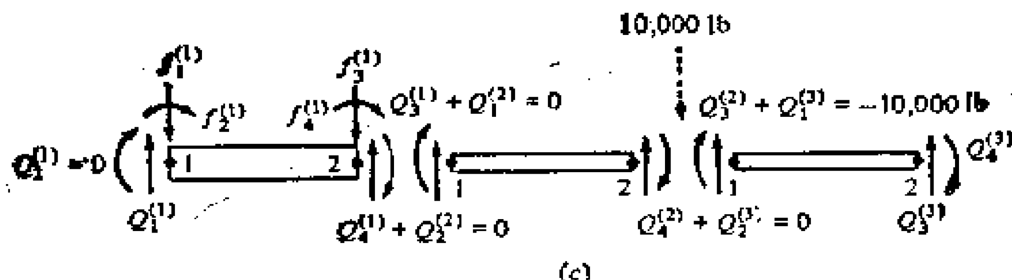


图3.12　例3.3中所研究的梁弯曲问题的有限元网格和平衡条件：(a)物理问题；(b) 三个单元的有限元网格；(c) 广义力（即次变量）中的平衡条件

在以下非连续数据下有效：

$$b \equiv EI = \begin{cases} 2\times 10^7(\text{lb}\cdot\text{ft}^2) & 0\leqslant x\leqslant 10\text{ft} \\ 10^7(\text{lb}\cdot\text{ft}^2) & 10\text{ft}\leqslant x\leqslant 28\text{ft} \end{cases} \tag{3.121a}$$

$$f = \begin{cases} 2400(\text{lb/ft}) & 0\leqslant x\leqslant 10\text{ft} \\ 10,000\delta(x-22)(\text{lb}) & 10\text{ft}\leqslant x\leqslant 28\text{ft} \end{cases} \tag{3.121b}$$

式中，$\delta(x-a)$为Diracδ函数，定义为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x-a)dx \equiv g(a) \quad -\infty < x,\ a < \infty \tag{3.122}$$

注意到 Diracδ 函数使我们能够在源项f的描述中包含集中荷载。正如后面将要看到的，在总的节点处的集中荷载进入总的力向量的相应位置。

在现在情况下，几何形状和荷载要求至少用三个单元（见图3.12b）来表示域 $[0,L]=0\leqslant x\leqslant 28\text{ft}$。今设用最小数目的单元来分析此问题。则有四个节点及八个总的自由度（在引入边界条件之前）。

单元的刚度矩阵及力向量由方程式（3.102）给出，在单元1中$f=2400$，而在单元2及3中$f=0$。集中荷载则直接包含在总的力向量中（通过力的平衡）。每一单元的单元刚度矩阵及力向量由以下各式给出：

$$[K^{(1)}] = \frac{2(10^7)}{10^3}\begin{bmatrix} 12 & -60 & -12 & -60 \\ -60 & 400 & 60 & 200 \\ -12 & 60 & 12 & 60 \\ -60 & 200 & 60 & 400 \end{bmatrix}$$

$$\{F^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} -12,000 \\ 20,000 \\ -12,000 \\ -20,000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \\ Q_4^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$[K^{(2)}] = \frac{10^7}{12^3}\begin{bmatrix} 12 & -72 & -12 & -72 \\ -72 & 576 & 72 & 288 \\ -12 & 72 & 12 & 72 \\ -12 & 288 & 72 & 576 \end{bmatrix}$$

$$
\{F^{(2)}\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}Q_1^{(2)}\\Q_2^{(2)}\\Q_3^{(2)}\\Q_4^{(2)}\end{Bmatrix} \tag{3.123}
$$

$$
[K^{(3)}]=\frac{10^7}{6^3}\begin{bmatrix}12 & -36 & -12 & -36\\ -36 & 144 & 36 & 72\\ -12 & 36 & 12 & 36\\ -36 & 72 & 36 & 144\end{bmatrix}
$$

$$
\{F^{(3)}\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}Q_1^{(3)}\\Q_2^{(3)}\\Q_3^{(3)}\\Q_4^{(3)}\end{Bmatrix}
$$

集合方程组为：

$$
[K]\{u\}=\{F\} \tag{3.124a}
$$

或写成显式：

$$
10^7\begin{bmatrix}
0.024 & -0.12 & -0.024 & -0.12 & & & & \\
 & 0.80 & 0.12 & 0.40 & & & & \\
 & & 0.0309 & 0.0783 & -0.00694 & -0.04167 & & \\
 & & & 1.133 & 0.0417 & 0.167 & & \\
 & & & & 0.0625 & -0.125 & -0.0556 & -0.167 \\
 & & & & & 1.0 & 0.1667 & 0.333 \\
 & & & & & & 0.0556 & 0.1667 \\
\text{对} \quad \text{称} & & & & & & & 0.6667
\end{bmatrix}
$$

$$
\times\begin{Bmatrix}U_1\\ \hline U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\\ \hline U_7\\U_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-12000\\ \cdots\cdots\\ 20{,}000\\ -12{,}000\\ -20{,}000\\ 0\\ 0\\ \cdots\cdots\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}Q_1^{(1)}\\ \cdots\cdots\\ Q_2^{(1)}\\ Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)}\\ Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)}\\ Q_3^{(2)}+Q_1^{(3)}\\ Q_4^{(2)}+Q_2^{(3)}\\ \cdots\cdots\\ Q_3^{(3)}\\ Q_4^{(3)}\end{Bmatrix} \tag{3.124b}
$$

式中已经用了单元间的连续条件。内力的平衡由下式给出（在这里把已知力包括到集合方程中）

$$
\begin{aligned}
&Q_2^{(1)}=0 \quad Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)}=0 \quad Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)}=0\\
&Q_4^{(2)}+Q_2^{(3)}=0 \qquad Q_3^{(2)}+Q_1^{(3)}=-10{,}000
\end{aligned}
\tag{3.125a}
$$

注意，力$Q_1^{(1)}$，$Q_3^{(3)}$，$Q_4^{(3)}$是未知的（支座处的）反力。

在初始自由度上的边界条件为：

$$
U_1=U_7=U_8=0 \tag{3.125b}
$$

利用方程式（3.125）中的已知力及位移，可以将总的方程组分解（这方程组是通过删去与已知u_i对应的行和列而得到的），并缩减掉已知的自由度，以得到最后的方程式[见方程式（3.124b）中由虚线围起来的子矩阵]：

$$
\begin{bmatrix}
K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0\\
 & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36}\\
 & & K_{44} & K_{45} & K_{46}\\
 & & & K_{55} & K_{56}\\
\text{对称} & & & & K_{66}
\end{bmatrix}
\times
\begin{Bmatrix}
U_2\\ U_3\\ u_4\\ U_5\\ U_6
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
20{,}000\\ -12{,}000\\ -20{,}000\\ -10{,}000\\ 0
\end{Bmatrix}
\tag{3.126}
$$

未知反力可以由下面的方程式算出（此方程式是由集合矩阵的其余部分得到）

$$
\begin{Bmatrix}
Q_1^{(1)}\\ Q_3^{(3)}\\ Q_4^{(3)}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
12{,}000\\ 0\\ 0
\end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0\\
K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76}\\
0 & 0 & 0 & K_{85} & K_{86}
\end{bmatrix}
\times
\begin{Bmatrix}
U_2\\ U_3\\ U_4\\ U_5\\ U_6
\end{Bmatrix}
\tag{3.127}
$$

方程式（3.126）和（3.127）可以用来求得所讨论问题的全部未知位移及力。解答$u_i(i=2,\cdots,6)$为：

$$U_2=0.03856 \quad U_3=-0.2808 \quad U_4=0.01214 \quad U_5=-0.1103 \quad U_6=-0.02752 \tag{3.128}$$

w，Q及M的有限元解示于图3.13。应该注意，问题的精确解同样是以单元为前提来定义的（因为荷载和抗弯刚度是不连续的）。读者可以把精确解与有限元解进行比较。

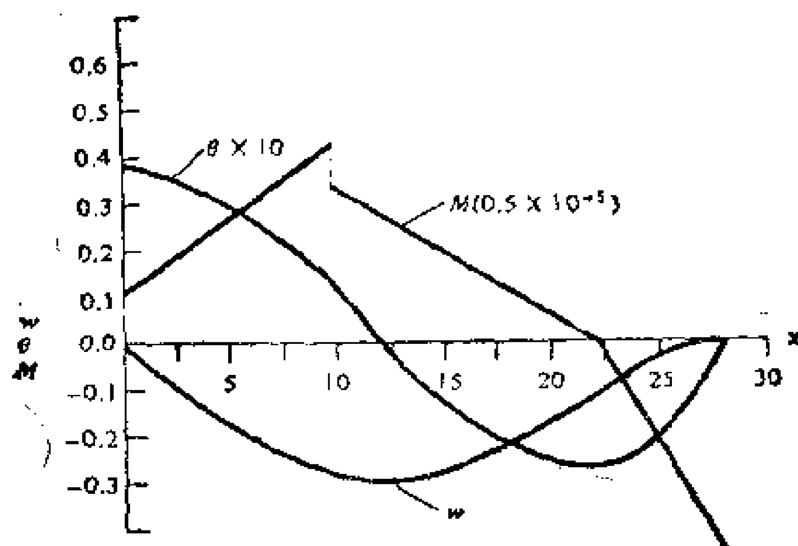


图3.13 四次方程(3.86及3.87)解的有限元近似(边界条件见图3.12)

例3.4 研究图3.14所示的悬臂梁。根据荷载的情况使用两个单元。单元矩阵为：

$$[K^1]=EI\begin{bmatrix} 0.015625 & -0.375 & -0.015625 & -0.375 \\ -0.375 & 12.0 & 0.375 & 6.0 \\ -0.015625 & 0.375 & 0.015625 & 0.375 \\ -0.375 & 6.0 & 0.375 & 12.0 \end{bmatrix}$$

$$\{F^1\}=\begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \\ Q_4^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$[K^2]=EI\begin{bmatrix} 0.00463 & -0.1667 & -0.00463 & -0.1667 \\ -0.1667 & 8.0 & 0.1667 & 4.0 \\ -0.00463 & 0.1667 & 0.00463 & 0.1667 \\ -0.1667 & 4.0 & 0.1667 & 8.0 \end{bmatrix}$$

$$\{F^2\}=\{f^2\}+\begin{Bmatrix} Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \\ Q_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

式中，f_i^2为：

$$f_i^{(2)}=\int_0^{72} f(\bar{x})\phi_i(\bar{x})d\bar{x} \qquad f(\bar{x})=\frac{100}{6}\bar{x}$$

而ϕ_i为Hermite插值函数[见方程式（3.97）]。通过积分，得：

$$\{f^{(2)}\}=\{-90.0,\ 1440.0,\ -210.0,\ -2160.0\}^T$$

集合方程组为：

$$EI\left[\begin{array}{cc|cccc} 0.01563 & -0.375 & -0.01563 & -0.375 & 0.0 & 0.0 \\ & 12.0 & 0.375 & 6.0 & 0.0 & 0.0 \\ \hline & & 0.02025 & 0.2083 & -0.00463 & -0.1667 \\ & & & 20.0 & 0.1667 & 4.0 \\ & & & & 0.00463 & 0.1667 \\ & & & & & 8.0 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \hline U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline -90.0 \\ 1440.0 \\ -210.0 \\ -2160.0 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ \hline Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)} \\ Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \\ Q_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

把边界条件用于u_i上，并把平衡条件用于$Q_i^{(e)}$上，

$$u_1=u_2=0 \quad Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)}=0 \quad Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)}=0 \quad Q_3^{(2)}+Q_4^{(2)}=0$$

得到求解未知量u_3，u_4，u_5，u_6的4×4方程组（此处未列出）。解此方程组得：

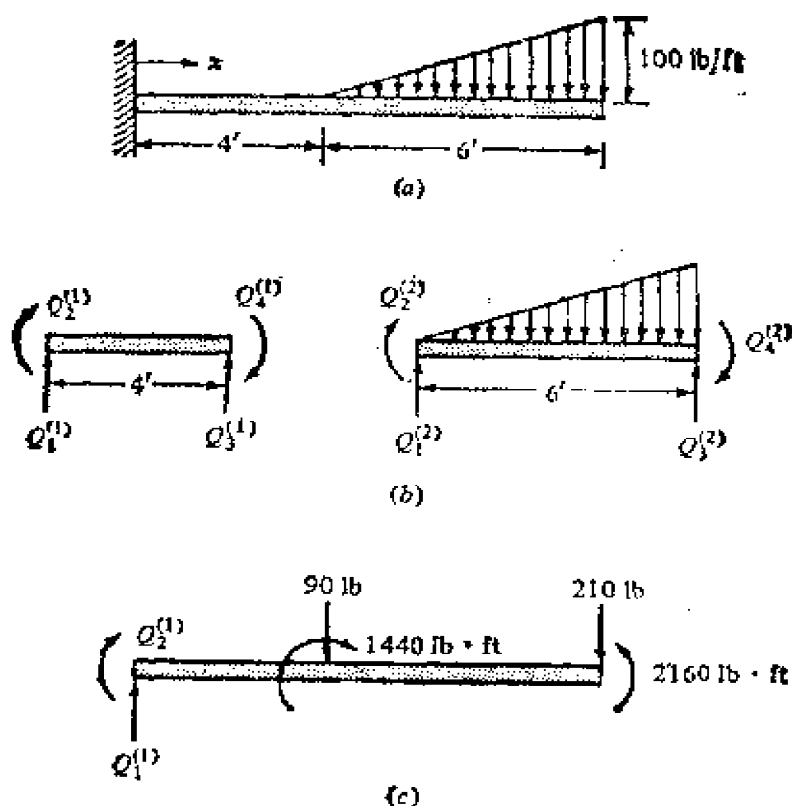


图3.14 具有不连续荷载的悬臂梁的有限元分析：(*a*) 物理问题；(*b*) 有限元离散化及广义单元力；(*c*) 有限元及总的广义力的集合

$$U_3 = -0.192\frac{10^6}{EI} \quad U_4 = 0.72\frac{10^4}{EI} \quad U_5 = -0.853\frac{10^6}{EI}$$

$$U_6 = 0.99\frac{10^4}{EI}$$

此问题的精确解为：

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{EI}[-1200x^2 + 50x^3] & 0 \leqslant x \leqslant 4\text{ft} \\ \dfrac{1}{EI}\left[-1200x^2 + 50x^3 - \dfrac{5}{36}(x-4)^5\right] & 4 \leqslant x \leqslant 10\text{ft} \end{cases}$$

请读者验证，在现在情况下，在节点处有限元解与准确解是吻合的。

作为本节的结束，给出有关计算单元矩阵和将杆单元与梁单元叠加以得到框架单元的一些意见。

1.在任何公式中，单元矩阵的计算都可以通过写出单元坐标中的积分来简化。在大多数物理问题中，荷载（加于梁上的）是用图形（即草图）的形式给出，而不是根据总的坐标用函数来表示。当荷载为不连续时，用单元坐标来表示并计算它对力矢量的影响（见例3.4及图3.14）是最方便的。下面将会看到，二维问题涉及到次变量在域的边界的离散段上的给定问题。在此情况下，可以使用近似一维插值函数来计算指定的次变量对节点力的影响。

2.在§3-2和§3-3中讨论过的两个线性单元，就几何形状和节点数目上是一致的。因此，这样的两个单元可以组合为一个线性单元，它具有两个节点，每个节点有三个自由度（u, w, θ）。这样的单元在结构力学中对经受弯曲以致外部变形的杆件进行分析时是很有用的。这样的单元的单元刚度矩阵，可以由与具有二次及四次方程的二节点单元有关的单元矩阵的叠加来给出。当单元中的系数a和b为常数时，叠加后的单元矩阵为：

$$[K]=\frac{2b}{h^3}\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3h & 0 & -6 & -3h \\ 0 & -3h & 2h^2 & 0 & 3h & h^2 \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3h & 0 & 6 & 3h \\ 0 & -3h & h^2 & 0 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

$$u=\frac{ah^2}{2b} \tag{3.129}$$

在大多数实际感兴趣的问题中（例如框架问题），这样的单元在若干任意的取向中（对于框架座标系）都会遇到。因此，在进行集合之前把单元矩阵变换到公共的总坐标系是必要的。对于与正x轴反时针成α角度的框架单元，用总的坐标表示的单元刚度矩阵为：

$$[K^{(e)}]=\frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix} \mu\cos^2\alpha+6\sin^2\alpha & & & & & \\ (\mu-6)\cos\alpha\sin\alpha & \mu\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha & & & \text{对称的} & \\ 3h\sin\alpha & -3h\cos\alpha & 2h^2 & & & \\ -(\mu\cos^2\alpha+6\sin^2\alpha) & -(\mu-6)\sin\alpha\cos\alpha & -3h\sin\alpha & \mu\cos^2\alpha+6\sin^2\alpha & & \\ -(\mu-6)\cos\alpha\sin\alpha & -(\mu\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha) & 3h\cos\alpha & (\mu-6)\cos\alpha\sin\alpha & \mu\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha & \\ 3h\sin\alpha & -3h\cos\alpha & h^2 & -3h\sin\alpha & 3h\cos\alpha & 2h^2 \end{bmatrix} \tag{3.130}$$

请读者自己验证此结果，并求出相应的力向量。

习　　题

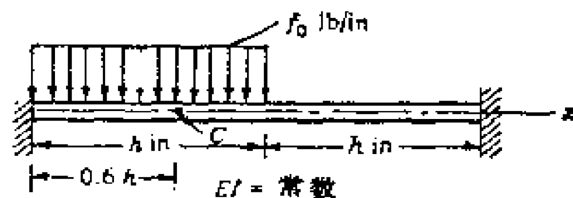
3.35—3.46　对习题3.35至习题3.46的图中所示的梁问题，试给出：

(*a*) 集合刚度矩阵和力矢量。

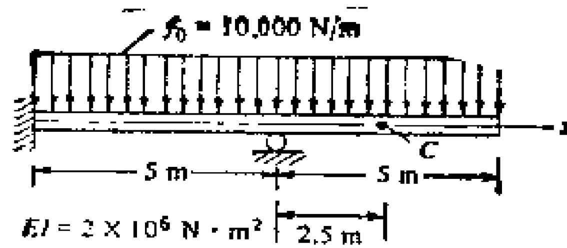
(*b*) 指定的总的位移及力，以及平衡条件。

(*c*) 分别给出初始未知量（即广义位置）及次未知量（即广义力）的聚缩矩阵方程。

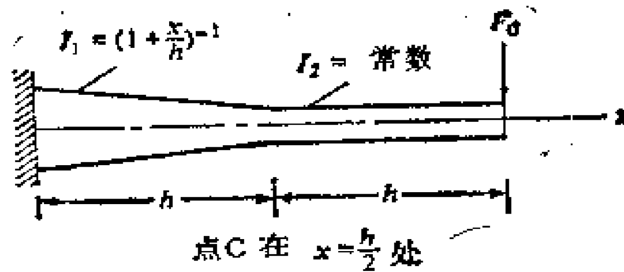
如果未知位移的数目小于4，解此未知位移(用Cramer法则)；并计算点C处的弯矩。解题时针对每一问题的要求，使用最小数目的单元。



习题3.35的图

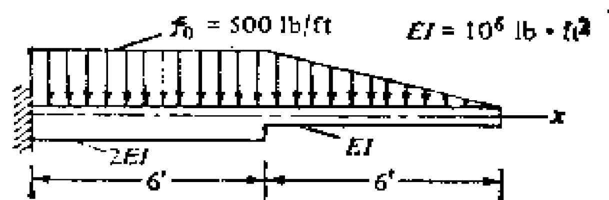


习题3.36的图



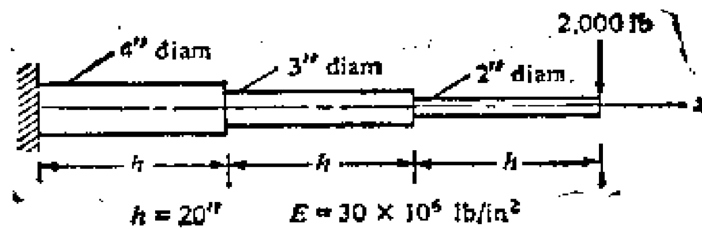
点C 在 $x=\frac{h}{2}$ 处

习题3.37的图



点C 在 $x=3'$ 处

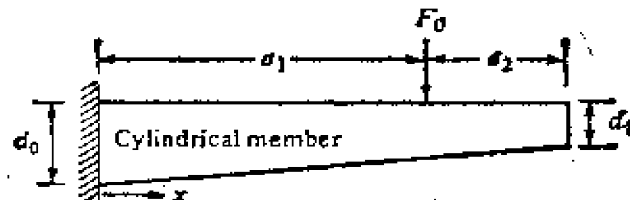
习题3.38的图



$h=20''$ $E=30\times10^6$ lb/in²

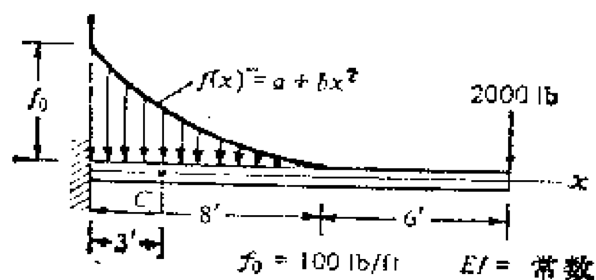
点C 在 $x=\frac{h}{2}$ 处

习题3.39的图

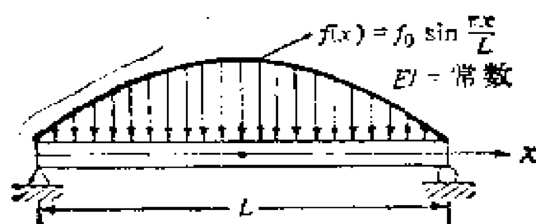


点c在 $x=\frac{a_1}{2}$ 处

习题3.40的图

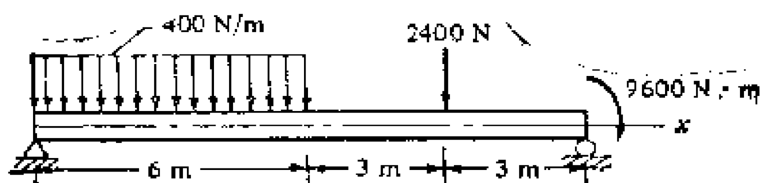


习题3.41的图



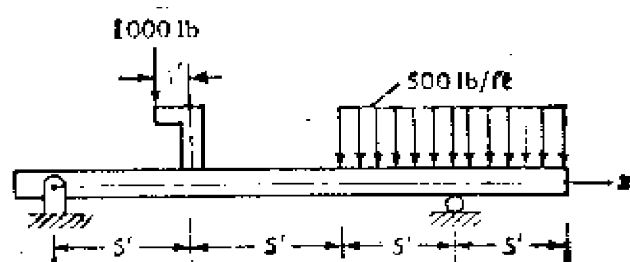
点C 在 $x=\frac{L}{2}$ 处

习题3.42的图



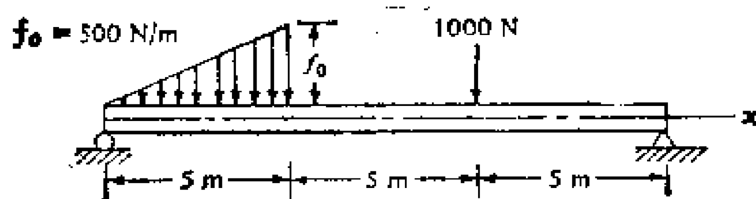
$EI=20.7\times10^7\ \mathrm{N\cdot m^2}$
点C 在 $x=3\ \mathrm{m}$ 处

习题3.43的图



EI = 常数
点C 在 $x=2.5'$ 处

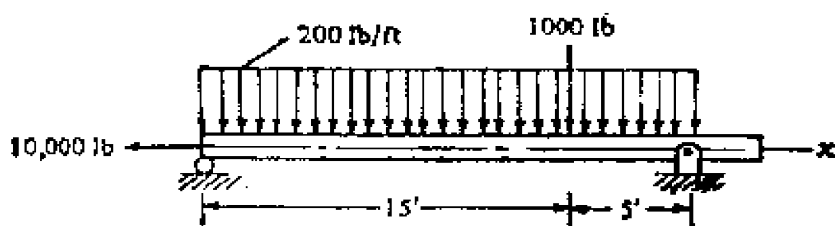
习题3.44的图



EI＝ 常数

点C 在 x＝7.5 m 处

习题3.45的图

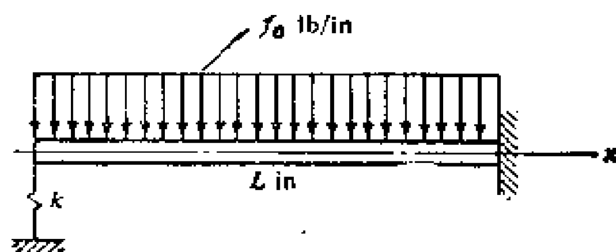


EI＝ 常数

点c 在 x＝7.5' 处

习题3.46的图

3.47 习题3.47的图所示的线性弹性悬臂梁的自由端由一弹簧支承，弹簧的弹簧常数为k(lb/in)。用一个单元的模型确定弹簧中的反力和压缩量。设$k=EI/L^3$(lb/in)。[提示：用弹簧力S代替弹簧，S作用方向向上，作用点在自由端，并注意到$S=-kw(0)=-kv_1$]



习题3.47的图

3.48 研究在弹性地基上(地基模量为k)承受均匀荷载的简支梁。用一个单元的模型确定跨度中点处的位移。取$L=1$，$E_I=1$，$f=f_0=1$。

3.49 研究等厚度线性弹性圆板的轴对称弯曲问题。其微分方程为：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[-D_{11}\left(r\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{d^2w}{dr^2}\right)+\frac{D_{22}}{r}\frac{dw}{dr}\right]+f=0$$

$$a<r<b$$

式中，D_{11}和D_{22}为材料的刚度(常数)。试给出：

(a) 在一个典型单元上的方程的变分公式。

(b) 形如下面形式的有限元公式

$[K^{(e)}]\{u^{(e)}\}=\{F^{(e)}\}$

讨论此问题中允许的插值函数。

3.50. 把习题3.49的微分方程改写成下列形式。

$$\frac{1}{rdr}\frac{d}{}\left[r\frac{dM_r}{dr}+(M_r+M_\theta)\right]+f=0$$

$$\frac{d^2w}{dr^2}-\bar{D}_{22}M_r+\bar{D}_{12}M_\theta=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}-\bar{D}_{11}M_\theta+\bar{D}_{12}M_r=0$$

式中

$$\bar{D}_{11}=\frac{D_{11}}{D_{12}^2-D_{11}D_{22}}\qquad \bar{D}_{22}=\frac{D_{22}}{D_{11}}\bar{D}_{11}$$

$$\bar{D}_{12}=\frac{D_{12}}{D_{11}}\bar{D}_{11}$$

推导以w，M_r及M_θ为初始自由度的混合有限元模型。

3.51 用习题3.49所用的单元求解均匀分布荷载作用下周边固支的各向同性($V=0.3$)圆板问题。

3.52 研究四次方程(3.86)及其变分公式(3.90)。假设使用一个每节点处具有三个初始变量(w,θ,k)的二节点单元，$\theta=\frac{dw}{dx}$，$k=d^2w/dx^2$。证明相关的插值(Hermite)函数为：

$$\psi_1=(2h^5-20x^3h^2+30x^4h-12x^5)/2h^5$$

$$\phi_2=(2h^5x-12x^3h^3+16x^4h^2-6x^5h)/2h^5$$

$$\phi_3=(x^2h^5-3x^3h^4+3x^4h^3-x^5h^2)/2h^5$$

$$\psi_4 = (-20x^3h^2 + 30x^4h - 12x^5)/2h^6$$

$$\psi_5 = (8x^3h^3 - 14x^4h^2 + 6x^5h)/2h^5$$

$$\psi_6 = (x^3h^4 - 2x^4h^3 + x^5h^2)/2h^5$$

式中，x为原点在节点1处的单元坐标。并计算此单元矩阵。

3.53—3.58 就习题3.35至习题3.58的图所示的桁架问题，试给出：

(a) 变换的单元矩阵（变换的力向量可由$\{F^{(e)}\} = [T^{(e)}]^T \times \{\bar{F}^{(e)}\}$来计算，见下）。

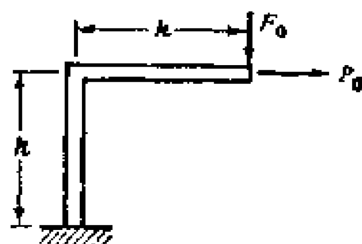
(b) 集合单元矩阵。

(c) 未知广义位移及力的聚缩矩阵方程。

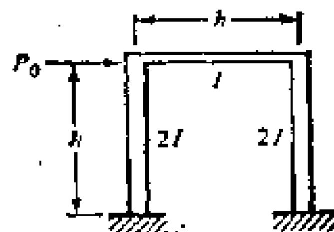
第e个单元的变换矩阵$[T^{(e)}]$可由下式计算式

$$[T^{(e)}] = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] \\ [0] & [\lambda] \end{bmatrix} \qquad [\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

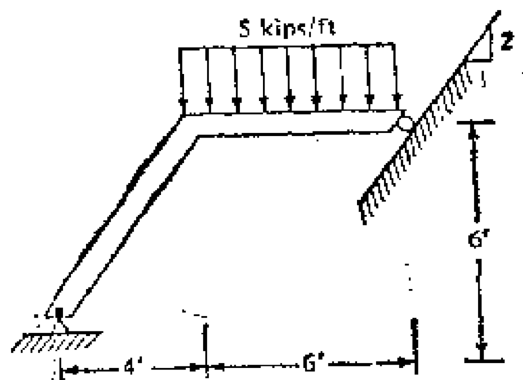
中，α为单元的走向(由正x轴反时针测量)。



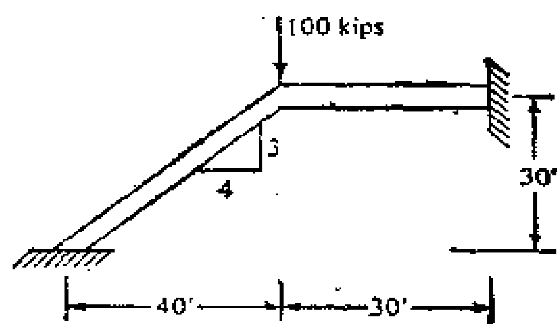
习题3.53的图



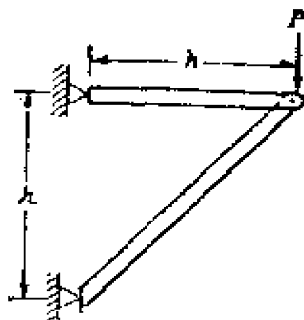
习题3.54的图



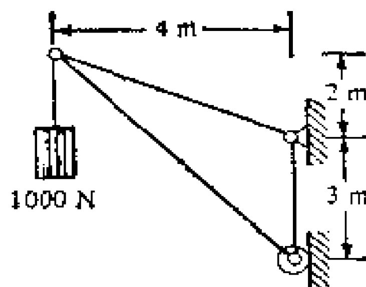
习题3.55的图



习题3.56的图



习题3.57的图



习题3.58的图

3-4 有限元法近似性的误差

3-4-1 概述

一个给定微分方程式的有限元解的误差可以归结于三个基本原因：

1. 边界误差。由于域的近似性产生的误差。

2. 求积和有限的运算误差。由于积分的数值计算以及计算机的数值计算产生的误差。

3. 近似法误差。由于近似解法产生的误差。

在本章讨论的一维问题中，所考虑的域为直线。因此，不存在域的近似问题。在非矩形域的二维问题中，域(或边界)近似性的误差被带到有限元问题中。一般地说，这些误差可以看作数据规定方面的误差，因为我们现在是在对修正域上的这个微分方程求解。随着对网格的更细划分，域可以更准确地表示，因此，边界近似性的误差可指望接近于零。

当在计算机上进行有限元计算时，舍入误差和由于积分的数值计算产生的误差被引入解中。就大多数体系自由度总数很小的线性问题而言，这些误差比近似解法的误差小。

在有限元解中，由于因变量u近似取等于v_h所造成的误差，对于任何问题来说，都是先天性的：

$$u \approx u_h = \sum_{e=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} u_i^{(e)} \psi_i^{(e)}$$

$$= \sum_{I=1}^{M} U_I \Phi_I \tag{3.131}$$

式中，N为网格中单元的数量，M为总的节点总数，n为单元的节点数。我们希望了解在一个有意义的方法中，度量出的误差$E=u-u_h$是如何随着网格中单元数增加而变化的。

3-4-2　误差的各种度量方法

有几种度量两个任意函数u和u_h之"差"（或距离）的方法。逐点误差为域的每一点的u和u_h之差。我们也可以将u和u_h之差定义为域$\Omega=(a,b)$中u和u_h的所有绝对差值中的最大值：

$$\|u-u_h\|_\infty \equiv \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u(x)-u_h(x)| \tag{3.132}$$

差的这种度量方法称为最大差值法(Supmetric)。注意，最大差值是实数，而逐点误差是函数，它不是严格数学上的距离或范数。

两个函数之差的更常用的度量方法（或范数）是L_2范数（读作L二范数）和能量范数。对于在域$\Omega=(a,b)$上定义的任何二次可积函数u和u_h，这两个范数定义为：

L_2范数：　$$\|u-u_h\|_0 = \left\{\int_a^b |u-u_h|^2 dx\right\}^{1/2} \tag{3.133}$$

能量范数：　$$\|u-u_h\|_m = \left\{\int_a^b \sum_{i=0}^{m} \left|\frac{d^i u}{dx^i} - \frac{d^i u_h}{dx^i}\right|^2 dx\right\}^{1/2} \tag{3.134}$$

式中，$2m$为所解的微分方程式的次数。"能量范数"一词用于表示它包含与同该方程式有关的二次泛函（对于大多数问题它表示能量）有同次导数。两个函数间的距离的不同度量方法如图3.15a所示。这些定义可以容易地修改为二维域问题。

如果当$p>0$时有

$$\|u-u_h\|_m \leqslant ch^p \qquad 对P>0 \tag{3.135}$$

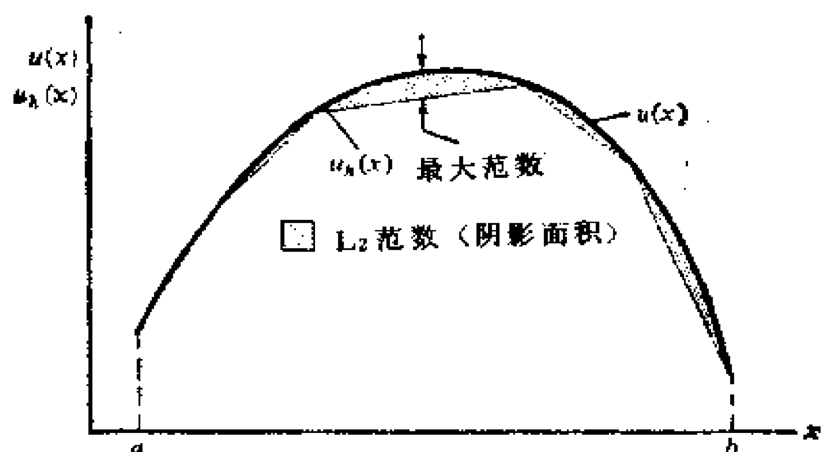
式中，c是与u和u_h无关的常数，h是单元的特征长度，则在能量范数中，有限元解u_h被认为是收敛于真实解。常数p称为收敛率，

3-4-3 解的精度

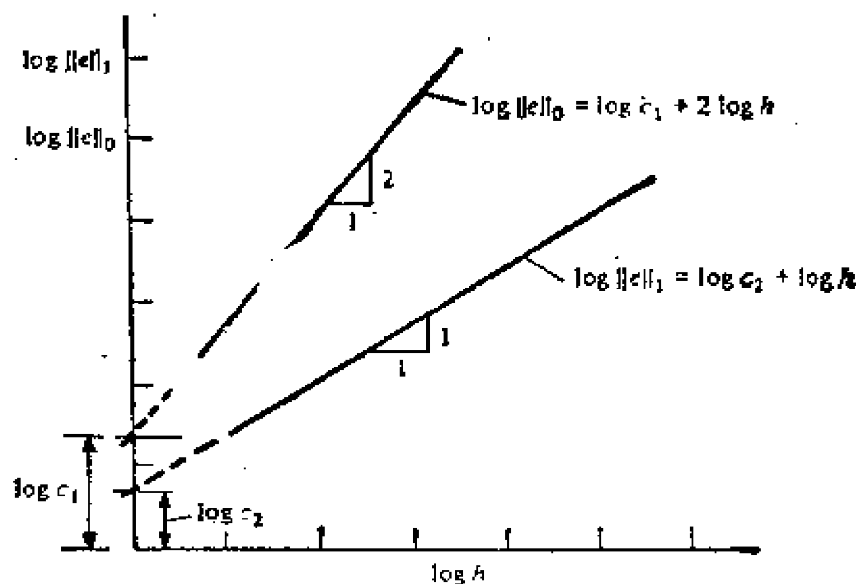
回到估算近似性的误差这个问题上来，我们研究第$2m$次的一维微分方程式（$m=1$为二次方程式，$m=2$为四次方程式）：

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i}\frac{d^{i}}{dx^{i}}\left(a_{i}\frac{d^{i}u}{dx^{i}}\right)=f \quad 对0<x<L \tag{3.136}$$

式中，系数$a_1(x)$和$a_2(x_2)$假设为正的。若问题的边界条件为



(a)



(b)

图3.15 两个函数之差的各种度量方法：
(a)两个函数u和u_h之差的度量；
(b)L_2误差及能量误差的对数与h的对数关系图

$$u(0)=u(L)=0 \quad m=1,2 \tag{3.137}$$

$$\frac{du}{dx}(0)=\frac{du}{dx}(L)=0 \quad m=2 \tag{3.138}$$

方程式(3.136)～(3.138)的变分公式为

$$0=\int_0^L\left(\sum_{i=1}^m a_i\frac{d^iv}{dx^i}\frac{d^iu}{dx^i}-vf\right)dx \tag{3.139}$$

相应于变分式的二次泛函为

$$I(u)=\int_0^L\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^m a_i\left(\frac{d^iu}{dx^i}\right)^2\right]dx-\int_0^L ufdx \tag{3.140}$$

现在讨论用N个等长h的单元将域进行有限元离散化的问题。如果u_h表示方程式(3.131)中有限元的解，由方程式(3.140)有：

$$I(u_h)=\int_0^L\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^m a_i\left(\frac{d^iu_h}{dx^i}\right)^2\right]dx-\int_0^L u_hfdx \tag{3.141}$$

下面我们将证明与有限元解有关的能量I接近于上述的真实能量，然后对误差进行估计。为了简单起见，只限于讨论二次方程式($m=1$)。

由方程式(3.140)和(3.141)以及

$$f=-\frac{d}{dx}\left(a_1\frac{du}{dx}\right)$$

有：

$$\begin{aligned}I(u_h)-I(u)&=\int_0^L\frac{1}{2}\left[a_1\left(\frac{du_h}{dx}\right)^2-a_1\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2f(u-u_h)\right]dx\\&=\int_0^L\left[\frac{a_1}{2}\left(\frac{du_h}{dx}\right)^2-\frac{a_1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right.\\&\qquad\left.-\frac{d}{dx}\left(a_1\frac{du}{dx}\right)(u-u_h)\right]dx\\&=\int_0^L\left\{\frac{a_1}{2}\left[\left(\frac{du_h}{dx}\right)^2-\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]\right.\\&\qquad\left.+a_1\frac{du}{dx}\frac{d}{dx}(u-u_h)\right\}dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^l \frac{a_1}{2}\left[\left(\frac{du_h}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 2\frac{du}{dx}\frac{du_h}{dx}\right]dx$$

$$= \int_0^l \frac{a_1}{2}\left(\frac{du_h}{dx} - \frac{du}{dx}\right)^2 dx \geqslant 0 \qquad (3.142)$$

由此可得：

$$I(u_h) \geqslant I(u) \qquad (3.143)$$

此等式只对$u = u_h$成立。方程式(3.143)意味着如果在每一点上它都收敛，则有限元解的能量收敛于上述的真实能量。因为方程式(3.143)中的关系对任何u_h都成立，此不等式也说明真实的解u使能量为最小。对于四次方程式（$m = 2$），可以建立类似的关系式。

现在假设有限元的插值函数$\Phi_I(I = 1,2,\cdots,M,)$是$k$次的完全多项式，则可以证明能量范数的误差满足不等式：

$$\|e\|_m = \|u - u_h\|_{k+1} \leqslant ch^p \qquad p = k + 1 - m > 0 \qquad (3.144)$$

式中，c为常数。这一估算意味着随着h的减小（或单元数的增加），误差将趋向于零。换句话说，能量范数中误差的对数与h的对数是一条斜率为$k+1-m$的直线。插值函数的次数愈高，收敛的速度愈快。还应注意，能量误差以$k+1-m$的速度趋向于零；在L_2范数中的误差甚至更快，即以$k+1$的速度趋向于零（换句话说，导数的收敛比解本身的收敛慢）。

方程式(3.144)中类型的误差估算是很有用的，因为不管我们是否知道真实解，它给出近似解的精度的概念。当这种估算给出有限元解是怎样迅速地收敛于真实解时，它并不告诉我们何时可以停止改进网格的划分。这要靠分析才能确定，因为只有分析才知道对于求解的问题多大的误差才是合理的。

作为近似式即方程式(3.144)误差估算的例子，考虑二次方程式($m = 1$)的线性（二节点）单元，对于一个单元有：

$$u_h = u_1(1 - s) + u_2 s \qquad (3.145)$$

式中，$s = \bar{x}/h$，$\bar{x}$为局部坐标。因为u_2可看作方程式(3.145)中u_1的函数，将u_2在节点1处展开成Taylor级数得：

$$u_2 = u_1 + u_1' + \frac{1}{2}u_1'' + \cdots \qquad (3.146)$$

式中，$u_1' = du_1/ds$。将这个表达式代入方程式(3.145)中得：

$$u_h = u_1 + u_1' s + \frac{1}{2} u_1'' s + \cdots \tag{3.147}$$

用Taylor级数在节点1处将真实解展开得：

$$u = u_1 + u_1' s + \frac{1}{2} u_1'' s^2 + \cdots \tag{3.148}$$

因此，由方程式(3.147)和(3.148)有：

$$|u_h - u| \leqslant \frac{1}{2}(s - s^2) \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| \frac{d^2 u}{ds^2} \right|$$

$$= \frac{1}{2}(s - s^2) h^2 \max_{0 \leqslant \bar{x} \leqslant h} \left| \frac{d^2 u}{d\bar{x}^2} \right| \tag{3.149}$$

和

$$\left| \frac{d}{d\bar{x}}(u_h - u) \right| \leqslant \frac{1}{2} h \max_{0 \leqslant \bar{x} \leqslant h} \left| \frac{d^2 u}{d\bar{x}^2} \right| \tag{3.150}$$

方程式(3.149)和(3.150)导出

$$\|u - u_h\|_0 \leqslant c_1 h^2 \quad 和 \quad \|u - u_h\|_1 \leqslant c_2 h \tag{3.151}$$

式中，常数c_1和c_2只取决于域的长度L。

请读者对四次方程式进行相似的误差分析。

例3.5 为了证实方程式(3.151)中的误差估算，我们来讨论一个算例。设微分方程式为：

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

精确解和有限元解为：

$$u(x) = x(1 - x) \tag{3.152}$$

$$N = 2, \qquad u_h = \begin{cases} h^2\left(\dfrac{x}{h}\right) & 0 \leqslant x \leqslant h \\ h^2\left(2 - \dfrac{x}{h}\right) & 对于 h \leqslant x \leqslant 2h \end{cases} \tag{3.153a}$$

$$N=3: \qquad u_h=\begin{cases} 2h^2\left(\frac{x}{h}\right) & 0\leqslant x\leqslant h \\ 2h^2\left(2-\frac{x}{h}\right)+2h^2\left(\frac{x}{h}-1\right) & h\leqslant x\leqslant 2h \\ 2h^2\left(3-\frac{x}{h}\right) & 2h\leqslant x\leqslant 3h \end{cases}$$

(3.153b)

$$N=4: \qquad u_h=\begin{cases} 3h^2\left(\frac{x}{h}\right) & 0\leqslant x\leqslant h \\ 3h^2\left(2-\frac{x}{h}\right)+4h^2\left(\frac{x}{h}-1\right) & h\leqslant x\leqslant 2h \\ 4h^2\left(3-\frac{x}{h}\right)+3h^2\left(\frac{x}{h}-2\right) & 2h\leqslant x\leqslant 3h \\ 3h^2\left(4-\frac{x}{h}\right) & 3h\leqslant x\leqslant 4h \end{cases}$$

(3.153c)

对于两个单元的情况，误差为($h=0.5$)：

$$\|u-u_h\|_0^2=\int_0^h(x-x^2-hx)^2dx+\int_h^{2h}(x-x^2-2h^2+xh)^2dx=0.002083$$

$$\left\|\frac{du}{dx}-\frac{du_h}{dx}\right\|_0^2=\int_0^h(1-2x-h)^2dx+\int_h^{2h}(1-2x+h)^2dx=0.08333 \qquad (3.154)$$

对于$N=3$和$N=4$的情况，可以进行类似的计算。下表列出$N=2$，3和4时的误差：

h	$\log_{10}h$	$\|e\|_0$	$\log_{10}\|e\|_0$	$\|e\|_1$	$\log_{10}\|e\|_1$
$\frac{1}{2}$	-0.301	0.04564	-1.341	0.2887	-0.5396
$\frac{1}{3}$	-0.477	0.02028	-1.693	0.1925	-0.7157
$\frac{1}{4}$	-0.601	0.01141	-1.943	0.1443	-0.8406

$\log\|e\|_0$和$\log\|e\|_1$与$\log h$的关系表明(见图3.15b)：

$$\log\|e\|_0 = 2\log h + \log c_1 \qquad (3.155)$$

$$\log\|e\|_1 = \log h + \log c_2$$

换句话说，验证方程式(3.151)中的估算时，在L_2范数中有限元解的收敛速率为2，而在能量范数中则为1。

本节中的许多讨论可用于曲线单元和二维单元。当包含有曲线单元(即具有非直线边的单元)时，误差的估算也取决于变换的Jacobi法。由于本书只介绍概论性知识，这些课题将不加讨论。有兴趣的读者可以参阅Ciarlet(1978)和Mitchell和Wait (1977)、Oden和Reddy(1976)以及Strang和Fix(1973)等人的文章(见第一章的参考文献)。

*3-5 与时间有关的问题

3-5-1 概述

本节讨论与时间有关的一维问题的有限元公式。作为一个标准的问题，我们讨论下列微分方程式：

$$c_1\frac{\partial u}{\partial t} + c_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + f = 0 \quad 0<x<L \qquad (3.156)$$

作为特殊情况，该方程式包含与时间有关的二次(当$c_2 = b = 0$ 或 $c_1 = b = 0$时)和四次(当$c_1 = a = 0$)问题。例如，二次问题包括求缆索的横向运动、杆件的纵向运动以及叶片的温度瞬时变化等。四次问题包括求梁的横向运动。在下面各节中，我们将讨论方程式(3.156)的半离散的变分式和有限元式，以及2-3-4节中讨论的范数的全离散式。

3-5-2 半离散的有限元模型

半离散式包括因变量空间变换的近似式，它实质上与前节中所述的步骤相同。第一步包括求典型单元上半离散的变分公式。对于方程式(3.156)，典型的单元既可以是3-2节中的杆单元(当$b = 0$时)，也可以是3-3节中的梁单元(当$a = 0$时)。

我们从半离散的变分公式开始讨论，有：

$$0=\int_{x_e}^{x_{e+1}} v\left[c_1\frac{\partial u}{\partial t}+c_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+f\right]dx$$

$$=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(c_1 v\frac{\partial u}{\partial t}+c_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+vf\right)dx$$

$$+\left\{v\left[-a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]\right\}_{x=x_e}^{x=x_{e+1}}-\left[b\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{x=x_e}^{x=x_{e+1}}$$

$$=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(c_1 v\frac{\partial u}{\partial t}+c_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+vf\right)dx$$

$$-\hat{Q}_1 v(x_e)-\hat{Q}_3 v(x_{e+1})-\hat{Q}_2\left[-\frac{dv}{dx}(x_e)\right]$$

$$-\hat{Q}_4\left[-\frac{dv}{dx}(x_{e+1})\right] \tag{3.157}$$

式中，由方程式(3.89)已知$\hat{Q}_2=Q_2$和$\hat{Q}_4=Q_4$，而$\hat{Q}_1$和$\hat{Q}_3$定义为：

$$\hat{Q}_1=\left[-a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]_{x=x_e}$$

$$\hat{Q}_3=\left[a\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]_{x=x_{e+1}} \tag{3.158}$$

其次，我们假设u用下面形式的表达式进行插值：

$$u=\sum_{j=1}^{r}u_j(t)\psi_j(x) \tag{3.159}$$

式中，当$b=0$和c_1或c_2等于零时$r\geqslant 2$，当$a=c_1=0$时$r=4$；ψ_j是相应的插值函数。方程式(3.159)意味着在任意人为规定的$t>0$的时刻，函数u总可以用单元第j个节点处的ψ_j以及时间为t时u的值u_j的线性组合来近似表示。换句话说，u的时间和空间变化是分开的。很显然，对于u的时间和空间变化不可分开的波传播问题，不能采用这种近似方法。将$v=\psi_i(x)$和方程式(3.159)代入方程式(3.157)得：

$$0=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\Big(c_1\psi_i\sum_{j=1}^{r}\frac{du_j}{dt}\psi_j+c_2\psi_i\sum_{j=1}^{r}\frac{d^2u_j}{dt^2}\psi_j$$

$$+a\frac{d\psi_i}{dx}\sum_{j=1}^{r}u_j\frac{d\psi_j}{dx}+b\frac{d^2\psi_i}{dx^2}\sum_{j=1}^{r}u_j\frac{d^2\psi_j}{dx^2}-\psi_i f\Big)dx-\hat{Q}_i$$

或

$$[M^1]\{\dot{u}\}+[M^2]\{\ddot{u}\}+([K^1]+[K^2])\{u\}=\{F\} \qquad (3.160)$$

式中

$$M^1_{ij}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}c_1\psi_i\psi_j dx \qquad M^2_{ij}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}c_2\psi_i\psi_j dx$$

$$K^1_{ij}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}a\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx \qquad K^2_{ij}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}b\frac{d^2\psi_i}{dx^2}\frac{d^2\psi_j}{dx^2}dx$$

$$F_i=-\int_{x_e}^{x_{e+1}}\psi_i f dx+\hat{Q}_i \qquad (3.161)$$

这样就完成了单元上方程式(3.156)的半离散的有限元公式的推导。

3-5-3 时间的近似性

作为一个特殊情况，方程式(3.160)包含方程式(2.123)和(2.124)中那种形式的方程式。因此，对于情况1 $c_2=0$和情况2 $C_1=0$的两种情况，方程式(3.160)的时间近似方法可按2-3-4节中说明的同样办法进行。为了完整起见，我们将主要步骤加以重复说明。

情况1 由方程式(3.160)有：

$$[M^1]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{F\} \qquad (3.162)$$

采用方程式(2.127)中近似的θ族，可将方程式(3.162)写成一组用矩阵形式表示的线性方程式[见方程式(2.130)]：

$$[\hat{K}^1]\{u\}_{n+1}=\{\hat{F}^1\} \qquad (3.163a)$$

式中

$$[\hat{K}^1]=[M^1]+\theta\Delta t[K]$$

$$\{\hat{F}^1\}=([M^1]-(1-\theta)\Delta t[K])\{u\}_n+\Delta t(\theta\{F\}_{n+1}+(1-\theta)\{F\}_n) \qquad (3.163b)$$

Δt为时间间隔。方程式(3.163)对典型单元是有效的。集合、边界条件的引入，以及集合方程式的求解均与前面所述的相同。为了计算$[\hat{K}]$和$\{\hat{F}\}$，要求知道初始条件$\{u\}_0$和$\{F\}$的时间变化。注意，当$\theta=0$时有$[\hat{K}^1]=[M^1]$。当质量矩阵$[M^1]$是对角矩阵时(即单元的质量均等地集中于单元的节点上时)，方程式(3.163)变成显函数，可以对$\{u\}_{n+1}$直接求解。

情况2　方程式(3.160)的形式为：

$$[M^2]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{F\}, \tag{3.164}$$

它类似于方程式(2.124)。在方程式(3.164)中采用Newmark直接积分法[即方程式(2.152)]时，得

$$[\hat{K}^2]\{u\}_{n+1}=\{\hat{F}^2\} \tag{3.165a}$$

式中

$$[\hat{K}^2]=[K]+a_0[M^2] \tag{3.165b}$$

$$\{\hat{F}^2\}=\{F\}_{n+1}+[M^2](a_0\{u\}_n+a_1\{\dot{u}\}_n+a_2\{\ddot{u}\}_n)$$

a_0、a_1、……是方程式(2.155)中定义的参数。同样，方程式(3.165)对一个典型的单元是有效的。注意，为了计算$[\hat{K}^2]$和$\{\hat{F}^2\}$，要求知道初始条件$\{u\}_0$，$\{\dot{u}\}_0$，和$\{\ddot{u}\}_0$。事实上我们并不知道$\{\ddot{u}\}_0$，它必须由方程式(3.164)计算：

$$\{\ddot{u}\}_0=[M^2]^{-1}(\{F\}-[K]\{u\}_0) \tag{3.166}$$

其余的步骤与静力(即与时间无关的)问题相同。

例3.6　讨论例2.10的瞬时热传导问题。有$a=1$，$b=0$，$c_1=1$，$c_2=0$和$f=0$。对于线性单元($r=2$)，方程式(3.162)的形式为：

$$\frac{h}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\hat{Q}_1=P_1\\\hat{Q}_3=P_2\end{Bmatrix} \tag{3.167}$$

式中，h是单元的长度。

对于一个单元的模型，有$h=1$及

$$
\begin{bmatrix} \frac{h}{3}+\frac{\theta\Delta t}{h} & \frac{h}{6}-\frac{\theta\Delta t}{h} \\ \frac{h}{6}-\frac{\theta\Delta t}{h} & \frac{h}{3}+\frac{\theta\Delta t}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \end{Bmatrix}
$$

$$
=\begin{Bmatrix} \left(\frac{h}{3}-\frac{\theta\Delta t}{h}\right)u_1^n+\left(\frac{h}{6}+\frac{\theta\Delta t}{h}\right)u_2^n+\Delta t P_1^n \\ \left(\frac{h}{6}+\frac{\theta\Delta t}{h}\right)u_1^n+\left(\frac{h}{3}-\frac{\theta\Delta t}{h}\right)u_2^n+\Delta t P_2^n \end{Bmatrix} \qquad (3.168)
$$

边界条件和初始条件为：

$$
u_1^n=0 \quad P_2^n=0 \quad \text{对任何} n(\text{j.e.}, t>0)
$$

$$
u_1^0=u_2^0=1 \quad \text{对任何} x \qquad (3.169)
$$

设$\theta=0.5$和$\Delta t=0.05$，则有：

$$
\begin{bmatrix} 0.3583 & 0.1416 \\ 0.1416 & 0.3583 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3083u_1^n+0.1913u_2^n+0.05P_1^n \\ 0.1913u_1^n+0.3083u_2^n \end{Bmatrix}
$$

或

$$
u_2^{n+1}=\frac{0.3083}{0.3583}u_2^n=0.86045u_2^n \qquad (3.170)
$$

很清楚，一个单元的模型是不精确的。注意，初始条件$u_1^0=1$和边界条件$u_1^n=0$是相互矛盾的（一种奇异现象）。因此，为了得到精确的解，希望采用在奇点附近具有小单元的不均匀网格。下面的线性和二次两种单元的不均匀网格被采用：

网 格	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
2(1)	0.0	0.2	1.0						
4(2)	0.0	0.2	0.5	0.75	1.0				
6(3)	0.0	0.1	0.2	0.35	0.5	0.75	1.0		
8(4)	0.0	0.1	0.2	0.35	0.5	0.6	0.75	0.9	1.0

第一列表示网格中线性（二次）单元的数量。对于两个不同时间间隔和参数θ的u（1，t）的结果列在表3.4中。与解析解〔方程式(2.150)〕相比，$\theta=0.5$和$\Delta t=0.025$时的结果最好。

表3.4 时间间隔、网格、近似程度以及参数θ对于例3.6解的精度的影响

情况*	t	解析解 $u(1,t)$	线性单元 2	线性单元 4	线性单元 6	线性单元 8	二次单元 1	二次单元 2	二次单元 3	二次单元 4
1	0.2	0.7723	0.8128	0.7614	0.7738	0.7393	0.7679	0.7632	0.7734	0.7732
	0.4	0.4745	0.4620	0.4648	0.4736	0.4771	0.4668	0.4710	0.4746	0.4741
	0.6	0.2897	0.2626	0.2822	0.2867	0.3242	0.2837	0.2883	0.2873	0.2890
	0.8	0.1769	0.1493	0.1711	0.1735	0.2360	0.1725	0.1761	0.1743	0.1764
	1.0	0.1080	0.0848	0.1037	0.1051	0.1860	0.1048	0.1074	0.1060	0.1076
2	0.2	0.7723	0.8129	0.7674	0.7753	0.7410	0.7680	0.7729	0.7710	0.7728
	0.4	0.4745	0.4627	0.4665	0.4727	0.4775	0.4672	0.4739	0.4740	0.4741
	0.6	0.2897	0.2632	0.2828	0.2870	0.3244	0.2841	0.2892	0.2895	0.2894
	0.8	0.1769	0.1497	0.1715	0.1742	0.2363	0.1728	0.1765	0.1767	0.1767
	1.0	0.1080	0.0851	0.1040	0.1057	0.1863	0.1051	0.1077	0.1079	0.1079
3	0.2	0.7723	0.8214	0.7723	0.7805	0.7466	0.7744	0.7768	0.7779	0.7773
	0.4	0.4745	0.4730	0.4747	0.4811	0.4851	0.4754	0.4820	0.4825	0.4825
	0.6	0.2897	0.2720	0.2904	0.2946	0.3311	0.2916	0.2967	0.2971	0.2971
	0.8	0.1769	0.1564	0.1776	0.1804	0.2416	0.1789	0.1826	0.1829	0.1829
	1.0	0.1080	0.0899	0.1086	0.1104	0.1902	0.1097	0.1124	0.1126	0.1126
4	0.2	0.7723	0.8170	0.7697	0.7775	0.7436	0.7712	0.7747	0.7749	0.7744
	0.4	0.4745	0.4682	0.4708	0.4772	0.4816	0.4715	0.4782	0.4786	0.4786
	0.6	0.2897	0.2677	0.2868	0.2910	0.3279	0.2881	0.2932	0.2935	0.2935
	0.8	0.1769	0.1533	0.1747	0.1775	0.2390	0.1760	0.1797	0.1800	0.1800
	1.0	0.1080	0.0877	0.1064	0.1082	0.1883	0.1075	0.1102	0.1103	0.1104

*情况1：$\theta=0.5$，$\Delta t=0.05$
情况2：$\theta=0.5$，$\Delta t=0.025$
情况3：$\theta=0.65$，$\Delta t=0.05$
情况4：$\theta=0.65$，$\Delta t=0.025$

例3.7 考虑例2.11中两端固定的梁的横向运动。$a=0$，$b=1$，$c_1=0$，$c_2=1$和$f=0$。对于典型的梁单元有：

$$\frac{h}{420}\begin{bmatrix}156 & -22h & 54 & 13h\\ -22h & 4h^2 & -13h & -3h^2\\ 54 & -13h & 156 & 22h\\ 13h & -3h^2 & 22h & 4h^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\\ \ddot{u}_3\\ \ddot{u}_4\end{Bmatrix}+$$

$$
+\frac{2}{h^3}\begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}
$$

(3.171)

对于半跨梁中只有一个单元的模型($h=0.5$)，边界条件和初始条件为：

$$u_1=u_2=u_4=0 \qquad \text{对所有}\ t\geqslant 0 \tag{3.172}$$

$$\left.\begin{aligned} u_3 &= 1-\frac{\pi}{4}=0.2146 \quad \dot{u}_3=0 \\ \ddot{u}_3 &= \frac{-K_{33}u_3}{M_{33}}=-110.932 \end{aligned}\right\}\text{对}\ t=0 \tag{3.173}$$

表3.5　时间间隔和网格对固支梁(见图3.11)瞬时反映的精度的影响

t	$\Delta t=0.005$		$\Delta t=0.0025$			空间的Galerkin解和时间的精确解〔见方程式(2.169)〕
	2*	4	2	4	6	
0.01	0.2098	0.2097	0.2098	0.2097	0.2097	0.2157
0.02	0.1950	0.1951	0.1950	0.1951	0.1951	0.1988
0.03	0.1698	0.1698	0.1695	0.1696	0.1696	0.1716
0.04	0.1347	0.1349	0.1345	0.1348	0.1348	0.1356
0.05	0.0931	0.0935	0.0930	0.0932	0.0933	0.0925
0.06	0.0482	0.0483	0.0480	0.0483	0.0483	0.0447
0.07	0.0014	0.0017	0.0014	0.0016	0.0016	−0.0055
0.08	−0.0460	−0.0455	−0.0464	−0.0458	−0.0458	−0.0553
0.09	−0.0923	−0.0916	−0.0928	−0.0921	−0.0920	−0.1023
0.10	−0.1341	−0.1335	−0.1346	−0.1341	−0.1341	−0.1441
0.11	−0.1684	−0.1682	−0.1685	−0.1682	−0.1681	−0.1783
0.12	−0.1932	−0.1931	−0.1932	−0.1932	−0.1932	−0.2034
0.13	−0.2088	−0.2087	−0.2089	−0.2086	−0.2086	−0.2179
0.14	−0.2150	−0.2148	−0.2154	−0.2152	−0.2151	−0.2211
0.15	−0.2112	−0.2110	−0.2113	−0.2112	−0.2112	−0.2129

*在半跨梁中的单元编号

令$\Delta t=0.0025$，$\alpha=0.5$和$\beta=0.25$，有：

$$a_0=\frac{4}{(\Delta t)^2} \qquad a_1=\frac{4}{\Delta t} \qquad a_2=1 \qquad a_3=a_4=0.5\Delta t$$

考虑边界条件(3.172)，由方程式(3.165)有：

$$(K_{33}+a_0M_{33})u_3^{n+1}=F_3^n\equiv M_{33}(a_0u_3^n+a_2\ddot{u}_3^n) \quad (3.174)$$

它可以对不同时间的u_3求解。当$t=\Delta t$(即$n=0$)时有

$$\left[\frac{156h}{420}+\frac{4}{(\Delta t)^2}\frac{12}{h^3}\right]u_3^1=\frac{12}{h^3}\left[\frac{4}{(\Delta t)^2}u_3^s-110.932\right] \quad (3.175)$$

$$u_3^1\approx u_3^s=0.2146$$

采用两个不同的时间间隔和不同的单元数量(半跨梁中)得出的有限元解，与方程式(2.169)的Galerkin解的对比，列在表3.5中。两种解答非常接近。两个单元的解答($\Delta t=0.0025$)与Galerkin解的图形比较示于图3.16中(见图2.5)。

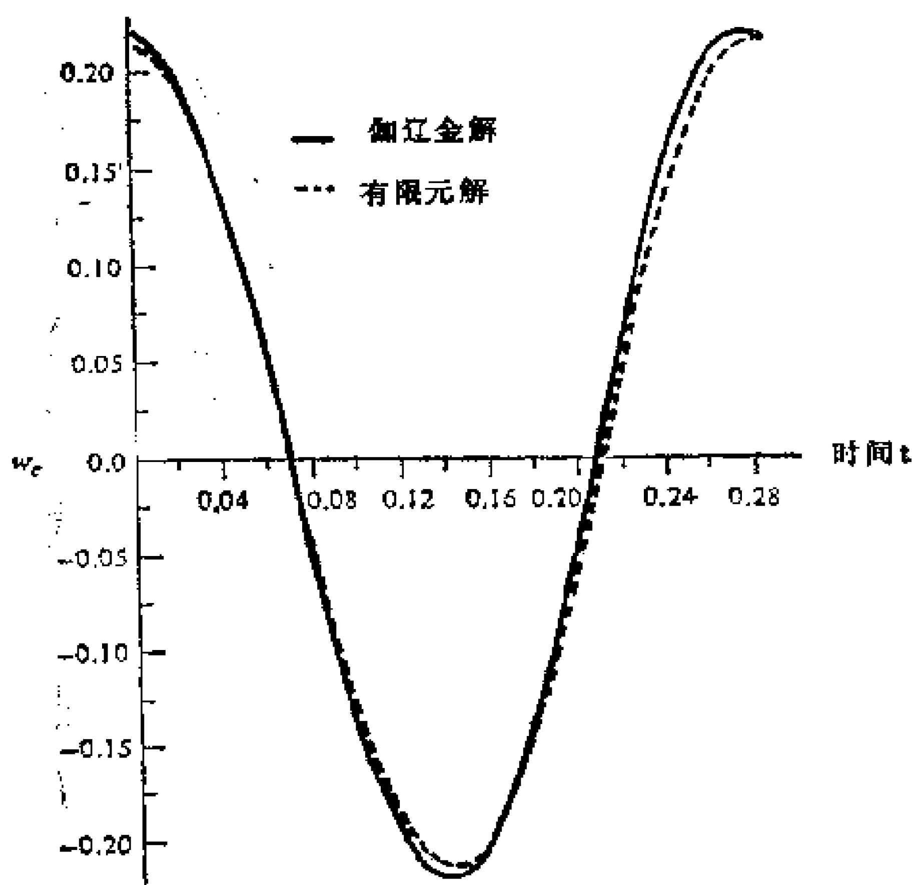


图3.16 初始条件不等于零的固端梁中点挠度按方程式(2.169)的Galerkin解与按有限元解的比较

习　题

3.59　证明四次方程式(3.86)的误差计算式为

$$\| w - w_h \|_2 \leqslant ch^2$$

式中，c为常数，w_h为用 Hermite 三次插值式得到的有限元解，w为问题的精确解。

3.60　研究在$-h \leqslant x \leqslant h$区间的$x=-h, x=\alpha h$和$x=h$处有三个节点的Lagrange二次单元。$x$与标准化坐标$\xi$之间的变换关系为：

$$x = h[\xi + \alpha(1-\xi^2)]$$

如果因变量用ξ的二次多项式进行插值，证明误差$e = u - u_h$为

$$||e||_1 \leqslant \frac{c\alpha}{(1-2\alpha)} h$$

提示：首先证明

$$|u - u_h| \leqslant c \max_{-1 \leqslant \xi \leqslant 1} \left| \frac{d^3 u}{d\xi^3} \right|$$

然后再证明

$$\frac{d^3 u}{d\xi^3} = -6h^2\alpha(1-2\alpha\xi)\frac{d^2 u}{dx^2} + h^3(1-2\alpha\xi)^3 \frac{d^3 u}{dx^3}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{h(1-2\alpha\xi)} \frac{d}{d\xi}$$

3.61　研究例3.6中两个线性单元的近似性。用求多项式$|[B]-\lambda[A]|=0$的根的方法求特征值λ，式中，$[A]$和$[B]$是方程式(2.31)中形式的矩阵(引入边界条件以后)。如果要求最小的特征值$\lambda > -1$(取$\theta=0.5$)，求有关比值$\Delta t/h^2$的条件。

用3-7-8节中讨论的计算机程序FEM1D解习题3.62～3.68。

3.62　考虑弹性杆件的轴向运动(由二次方程式$EA\partial^2 u/\partial x^2 = \rho\partial^2 u/\partial t^2$ $0 < X < L$控制)，有关数据如下：杆长$L=500\text{mm}$，横截面面积$A=1\text{mm}^2$，弹性模量$E=20000\text{N/mm}^2$，密度$\rho=0.008(\text{N}\cdot\mu\text{s}^2)/\text{mm}^4$，边界条件为：

$$u(0,t)=0 \qquad EA\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=1,$$

并有零初始条件。采用50个线性单元和$\Delta t = 0.002\mu\text{s}$时，求轴向位移，并绘出$t=0.08\mu\text{s}$时沿着杆件方向作为位置函数的位移图。

3.63　考虑下面控制平面墙体瞬时的无量纲微分方程式(见Myers

1971)第101页]：

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial T}{\partial t}=0 \qquad 0<X<1$$

边界条件为

$$T(0,\ t)=1 \qquad\qquad T(1,\ t)=0$$

初始条件为

$$T(x,0)=0$$

采用(a)4个、6个和8个线性单元和(b)2个、3个和4个二次单元求解此问题，并将有限元解与精确解进行比较。

3.64 考虑跨长为L，距梁的左端为C处有一集中荷载

$$P(t)=\begin{cases}P_0\sin\dfrac{\pi t}{\tau} & 对0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0 & 对t\geqslant\tau\end{cases}$$

作用的简支梁（假设$t=0$时为静止状态）。梁的横向挠度$w(x,\ t)$为[见Harris和Crede(1961)，第8～53页]：

$$w(x,t)=\frac{2P_0L^3}{\pi^4EI}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi c}{L}\sin\frac{i\pi x}{L}$$

$$\times\left[\frac{1}{1-T_i^2/4\tau^2}\left(\sin\frac{\pi t}{\tau}-\frac{T_i}{2\tau}\sin\omega_i t\right)\right] \qquad 对0\leqslant t\leqslant\tau$$

$$w(x,t)=\frac{2P_0L^3}{\pi^4EI}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi c}{L}\sin\frac{i\pi x}{L}$$

$$\times\left[\frac{(T_i/\tau)\cos(\pi\tau/T_i)}{T_i^2/4\tau^2-1}\sin\omega_i\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \quad 对t\geqslant\tau$$

式中

$$T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}=\frac{2L^2}{i^2\pi}\sqrt{\frac{A\rho}{EI}}=\frac{T_1}{i^2}$$

采用下列数据：

$P_0=1000\text{lb}$，$\tau=20\times10^{-6}\text{s}$，$L=30\text{in}$，

$E=30\times10^6\text{lb/in}^2$，$\rho=733\times10^{-6}\text{lb/in}^3$，$\Delta t=10^{-6}\text{s}$，

并假设梁为$\frac{1}{2}$吋×$\frac{1}{2}$吋的方形截面，半跨梁中采用5个单元，求有限元解，并将其与$C=L/2$时跨中的级数解进行比较。

3.65 当$C=L/4$和全跨为8个单元时，重解习题3.64。

3.66 当$C=L/8$和全跨为8个单元时，重解习题3.64。

3.67 考虑自由端承受集中荷载的悬臂梁，采用习题3.64 的荷载和数据，求横向挠度的有限元解。

3.68 当梁为跨中加载的固端梁时，重解习题3.64。

3.69 当采用例3.6中热传导的混合公式(取$\theta=0.5$)时，重解习题3.61。

3.70 对例3.7中的四次方程式采用习题3.61中所述的稳定准则（$\lambda_{min}>-1$)(采用Newmark参数的标准值)。

3-6 等参数单元和数值积分

3-6-1 一维单元的概要

在讨论等参数单元概念和数值积分方法之前，先来概括3-2节和3-3节中介绍的基本单元。本章以下各节将讨论两类一维边值问题的有限元公式：

1. 二次微分方程式(杆单元)
2. 四次微分方程式(梁单元)

由杆单元和梁单元迭加而成的框架单元已在3-3节中讨论过。值得注意的是，已知方程式在区间(X_A, X_B)上有限元模型的变分形式与单元的类型(线性、二次等)无关。因此，可以不需要先选择单元的类型才来建立已知方程式的有限元模型。

已知微分方程式的变分公式帮助我们鉴别初始变量和次变量，同时还帮助我们鉴别允许的插值函数的类型和最低次数。可以这样来建立有限元的插值函数，即它应使单元上有限元的近似式满足初始变量的端部条件（即满足问题的基本边界条件），并包括初始变量和次变量的单元不变状态。后面的要求保证这组有限元插值函数的完整性，因此也保证了收敛性。

表3.6对一般二次和四次方程式的一维Ritz有限元作了归纳。

3-6-2 自然坐标(或标准坐标)

本节中，我们讨论总的（或问题的）坐标系x对局部坐标系ξ的变换式。在局部坐标系中，原点设在单元的中点，且使左端节点的$\xi=1$和右端节点的$\xi=1$。这种变换是用

表3.6 一维问题有限元方程式的归纳

方程式的类型	二次方程	四次方程
1.微分方程	$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+cu=f$	$\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(a\frac{dw}{dx}\right)+cw=f$
2.变分形式	$0=\int_{x_A}^{x_B}\left[a\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}+cvu-vf\right]dx-P_Av(x_A)-P_Bv(x_B)$	$0=\int_{x_A}^{x_B}\left[b\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}+a\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx}+cvw-vf\right]dx-Q_1v(x_A)-Q_2\left(-\frac{dv}{dx}\right)_A-Q_3v(x_B)-Q_4\left(-\frac{dv}{dx}\right)_B$
	$P_A=-\left(a\frac{du}{dx}\right)_A,\quad P_B=\left(a\frac{dv}{dx}\right)_B$	$Q_1=\left[-a\frac{dw}{dx}+\frac{d}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_A,\quad Q_2=\left[b\frac{d^2w}{dx^2}\right]_A$
		$Q_3=\left[a\frac{dw}{dx}-\frac{p}{dx}\left(b\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right]_B,\quad Q_4=-\left[b\frac{d^2w}{dx^2}\right]_B$
3.主要的和次要的变量	主要变量：u	主要变量：$w,\theta\equiv-\frac{dw}{dx}$
	次要变量：$a\frac{du}{dx}$	次要变量：$\frac{d}{dx}\left[b\frac{d^2w}{dx^2}\right]-a\frac{dw}{dx}$，$b\frac{d^2w}{dx^2}$
4.有限元方程式	$[K^{(e)}]\{u\}=\{f\}+\{P\}$	$[K^{(e)}]\{\Delta\}=\{f\}+\{Q\}$
	$K_{ij}^{(e)}=\int_{x_A}^{x_B}\left(a\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}+c\psi_i\psi_j\right)dx$，$i,j=1,2,\cdots,n$	$K_{ij}^{(e)}=\int_{x_A}^{x_B}\left(b\frac{d^2\psi_i}{dx^2}\frac{d^2\psi_j}{dx^2}+a\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}+c\psi_i\psi_j\right)dx$，
	$f_i^{(e)}=\int_{x_A}^{x_B}\psi_i f dx$，$P_1=P_A$，$P_n=P_B$，$P_i$ = 规定的($i=2,3,\cdots,n-1$)	$f_i^{(e)}=\int_{x_A}^{x_B}\psi_i f dx$，$i$，$j=1,2,3,4$

续表

方程式的类型	二次方程	四次方程
5.典型单元	(a)广义位移：u_i (b) 广义力：F_i	(a) 广义位移：$w_1,\theta_1,w_2,\theta_2$ (b) 广义力：F_i
6.系数矩阵的明显形式	对Lagrange线性单元(以及a,c,和f是常数) $[K^{(e)}]=\frac{a}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\frac{ch}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ $\{f^{(e)}\}=\frac{fh}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$	对Hermite立方单元(以及a,b,c和f为常数) $[K^{(e)}]=\frac{2b}{h^3}\begin{pmatrix}6 & -3h & -6 & -3h\\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2\\ -6 & 3h & 6 & 3h\\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2\end{pmatrix}+\frac{a}{30h}\begin{pmatrix}36 & -3h & -36 & -3h\\ -3h & 4h^2 & 3h & -h^2\\ -36 & 3h & 36 & 3h\\ -3h & h^2 & 3h & 4h^2\end{pmatrix}+\frac{ch}{420}\begin{pmatrix}156 & -22h & 54 & 13h\\ -22h & 4h^2 & -13h & -3h^2\\ 54 & -13h & 156 & 22h\\ 13h & -3h^2 & 22h & 4h^2\end{pmatrix}$ $\{f^{(e)}\}=\frac{fh}{12}\{-6,h,-6,-h\}^T$

$$\xi = \frac{2x-(x_e+x_{e+1})}{h_e} \tag{3.176}$$

给出的线性"展开"变换来实现的。式（3.176）中，x_e和x_{e+1}分别表示单元e左端节点和右端节点的总的坐标，h为单元长度（见图3.17）。坐标ξ称为标准坐标（或自然坐标），以暗示它是经过标准化的（无量纲的）坐标，它的值总是介乎-1与1之间。变换式（3.176）使点$x(x_e\leqslant x\leqslant x_{e+1})$变换成点$\xi$（$-1\leqslant\xi\leqslant 1$）。

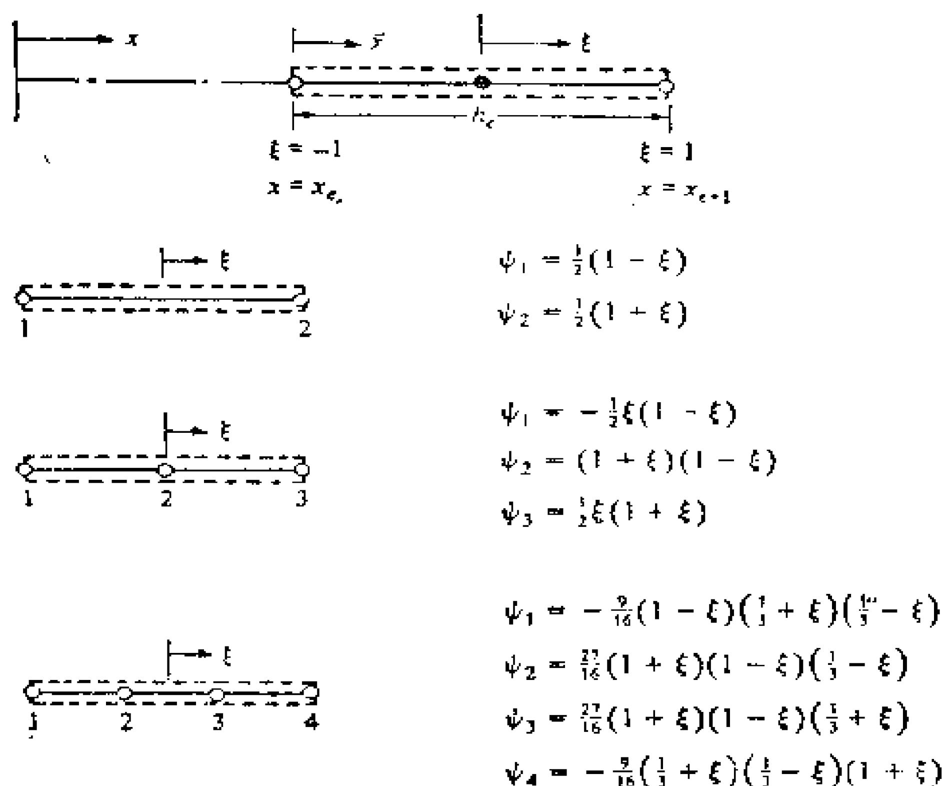


图3.17　自然（或标准）坐标和Lagrange插值函数

标准坐标系对于下面两种情况是方便的：（1）在建立插值函数时是方便的。（2）在系数矩阵的数值积分运算（用Gauss-Legendre法求积）时是方便的。我们先讨论自然坐标系中Lagrange插值函数族的推导问题。由方程式（3.13）可知，插值函数满足性质：

$$\psi_i(\xi_j)=\begin{cases}1 & 若i=j\\0 & 若i\neq j\end{cases} \tag{3.177}$$

式中，ξ_j表示单元中第j个节点的ξ坐标。对于具有n个节点的单元，$\psi_i(i=1, 2, \cdots, n)$是$n-1$次函数。为了求满足性质（3.177）的$\psi_i$，我们进行下面的讨论（另一种方法）。对于每一个$\psi_i$，可用$n-1$个线性函数$\xi-\xi_j(j=1, 2, \cdots i, -1, i+1, \cdots, n, j\neq i)$的乘积来表示：

$$\psi_i = c_i(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{i-1})(\xi-\xi_{i+1})\cdots(\xi-\xi_n) \tag{3.178a}$$

注意，ψ_i在除i外的所有节点处都等于零。我们再求$\xi=\xi_i$时$\psi_i=1$的常数c_i：

$$c_i = [(\xi_i-\xi_1)(\xi_i-\xi_2)\cdots(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})\cdots(\xi_i-\xi_n)]^{-1} \tag{3.178b}$$

因此，与节点i有关的插值函数为：

$$\psi_i(\xi) = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{i-1})(\xi-\xi_{i+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_i-\xi_1)(\xi_i-\xi_2)\cdots(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})\cdots(\xi_i-\xi_n)} \tag{3.179}$$

满足性质（3.177）的插值函数属于Lagrange插值函数族，而伴生的有限元属于Lagrange有限元族。方程式（3.176）中的插值函数提供Lagrange插值函数（$n=2$）的一个例子。方程式（3.97）中的插值函数ϕ_i不属于Lagrange插值函数族，因为不是所有的ϕ_i都满足性质（3.177）。图3.17包括以标准座标（对等距节点）表示的线性、二次和三次（Lagrange）插值函数。

由方程式（3.15）和（3.101）使我们想起单元矩阵包含插值函数对总坐标x的导数项。因为ψ_i是在自然坐标系中推导出的，为了改写成ξ的积分式，要求进行下列变换：

$$x = f(\xi), \quad \xi = g(x) \tag{3.180}$$

方程式（3.176）提供$f(\xi)$和$g(x)$的一个例子：

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\left(\xi h_e + x_e + x_{e+1}\right)$$
$$g(x) = \frac{2x-(x_e+x_{e+1})}{h_e} \tag{3.181}$$

此时，$f(\xi)$和$g(x)$分别为ξ和x的线性函数。应该指出，当f和g为

非线性函数时，直线变成（或绘成）与变换同次的曲线。

变换式(3.181)可以按照插值函数

$$x=\sum_{i=1}^{r}x_i\psi_i(\xi) \tag{3.182}$$

来选择，式中，ψ_i 是$r-1$次的Lagrange插值函数。方程式(3.182)说明单元的形状，因此，有时将ψ_i称为形状函数。于是有

$$dx=\left(\sum_{i=1}^{r}x_i\frac{d\psi_i}{d\xi}\right)d\xi=Jd\xi \tag{3.183}$$

式中，J为变换$J=dx/d\xi$的Jacobi式，

$$J=\sum_{i=1}^{r}x_i\frac{d\psi_i}{d\xi} \tag{3.184}$$

ψ_i对x的导数为：

$$\frac{d\psi_i}{dx}=\frac{d\psi_i}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{dx/d\xi}\frac{d\psi_i}{d\xi}=(J)^{-1}\frac{d\psi_i}{d\xi} \tag{3.185}$$

3-6-3　等参数单元

设因变量u近似用下式表示：

$$u=\sum_{i=1}^{s}u_i\psi_i \tag{3.186}$$

注意，u是用$s-1$次插值函数近似表示的。一般说来，通常说明坐标变换(3.182)近似性的次数与通常表示因变量近似性的次数并不相等。换句话说，在一个区域内可能存在两组独立的节点：一组节点用于坐标变换式(3.182)，它描述单元的形状；另一组节点用于因变量的插值式(3.186)。根据坐标变换采用的近似性次数r和插值采用的近似性次数s的大小，可以将单元分成三种类型：

1. 子参元：$r<s$
2. 等参元：$r=s$
3. 超参元：$r>s$　　(3.187)

在这三种单元中，等参元用得最广，因为它使有限元的运算工作来得容易和有效。

3-6-4 数值积分

当被积函数F具有复杂的形式时，用古典的（即精确的积分）方法计算积分式[见方程式（3.15）和（3.101)]

$$\int_a^b F(x)dx \tag{3.188}$$

是困难的甚至不可能的。例如，当采用等参元时，方程式(3.15)中积分计算由于被积函数中出现Jacobi式而发生困难（一些简单的情况除外)。当被积函数不是很精确地计算时（例如在罚函数中)，以及当被积函数只取决于在一些不连续点的量是已知的情况下(即在非线性问题中)，也要求采用数值积分。所有数值积分方法（也叫做求积方法）的基本概念，是寻找一个函数$P(x)$，使得它既与$F(x)$相当近似，同时又使积分简便。用P_n表示在区间[a, b]的$n+1$个点上对被积函数进行插值的n次插值多项式，常常产生较好的近似性和具有理想的简化积分运算的性质。同一个在横坐标指定各点处与函数$F(x)$完全相同的多项式$P_4(x)$作为$F(x)$的近似函数的例子，如图3.18a所示。方程式（3.188）的精确值为实线以下的面积，而近似值

$$\int_a^b P_4(x)dx \tag{3.189}$$

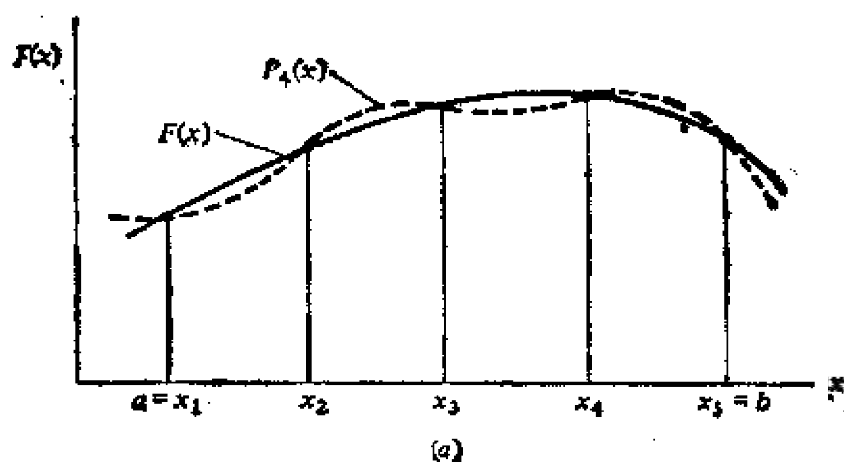
则为虚线以下的面积。应该注意，差值（即近似性的误差）$E=F(x)-P_4(x)$的符号不是永远相同的，因此，总的积分的误差可能很小（因为一部分的正误差抵消另一部分的负误差)，即使当P_4与F不是很近似时也是如此。

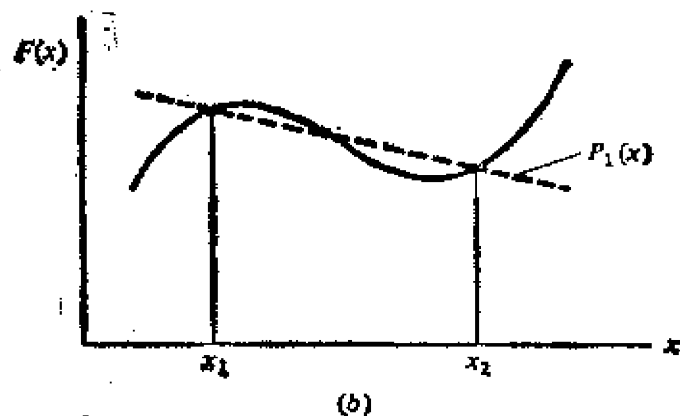
常用的积分法可以分为两个基本组：(1) Newton-Cotes公式，它采用横坐标的等距点或样点处的函数值。(2) Gauss求积公式，它采用不等距的样点。

Newton-Cotes求积法　对于横坐标上$n+1$个等距点，Newton-Cotes积分公式为：

$$\int_a^b F(x)dx=(b-a)\sum_{i=1}^{n+1} w_i F(x_i) \tag{3.190}$$

式中，w_i为加权系数，x_i为横坐标上的等距点。对于$n=1$的情况，





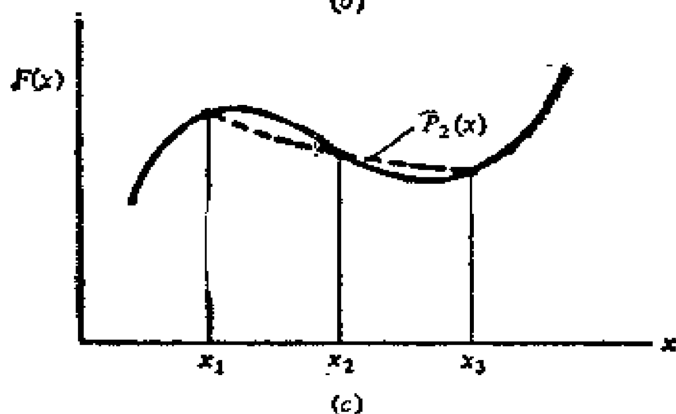


图3.18　用Newton-Cotes求积法的数值积分：(a)用$P_4(x)$近似式代替函数(b)梯形线(c)Simpson曲线

方程式（3.190）给出一条常见的梯形线，其中，图3.18b中实线下要求的面积用虚线下的面积近似表示[即$F(x)$用$P_1(x)$近似]，

$$\int_{a=x_1}^{b=x_2} F(x)dx = \frac{h}{2}[F(x_1)+F(x_2)] \qquad E=0(h^3) \quad (3.191)$$

式中，E表示近似性的误差，h为两基点之间的距离。当$n=2$时，方程式（3.190）给出熟知的Simpson曲线（见图3.18c），

$$\int_{a=x_1}^{b=x_3} F(x)dx = \frac{h}{3}[F(x_1)+4F(x_2)+F(x_3)]$$

$$E=0(h^4) \tag{3.192}$$

当$n=1,2,\cdots,6$时的加权系数列在表3.7中。注意$\sum_{i=1}^{n+1} w_i=1$。

表3.7　Newton-Cotes公式(3.190)的加权系数*

n	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
1	1/2	1/2					
2	1/6	4/6	1/6				
3	1/8	3/8	3/8	1/8			
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840

*对$n=0$，我们有$h=b-a$，$w_1=1$，$x_1=(b-a)/2$

对Newton-Cotes积分公式（3.190）进行讨论是必要的。当n是偶数时(即是当有一个偶数的区格或有奇数的基点时)，用$n+1$次或较低次的多项式代替$F(x)$是恰当的；当n是奇数时，用n次或更低次的多项式代替$F(x)$是合适的。相反地，第n次多项式要严格地选用$n+1$个基点进行积分。

Gauss-Legendre求积法　在Newton-Cotes求积中，基点被规定为等距的。如果x_i不受限制，则有$2n+2$个不定参数（权w_i和基点X_i），它要求$2n+1$次的多项式。Gauss-Legendre求积就是建立在这个概念的基础之上。当$F(x)$是$2n+1$次或较低次多项式时，基点x_i和权w_i的选择应使函数的$n+1$个适当的权值之和严格地符合这个积分。Gauss-Legendre求积公式为（见图3.19）

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^{1} \hat{F}(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{F}(\xi_i) \tag{3.193}$$

式中，w_i是加权因子，ξ_i是基点(Legendre多项式$P_{n+1}(\xi)$的根)，

$\hat{F}$是变换后的（对自然坐标系）被积函数：

$$\hat{F}(\xi)=F(x(\xi))\cdot J(\xi) \tag{3.194}$$

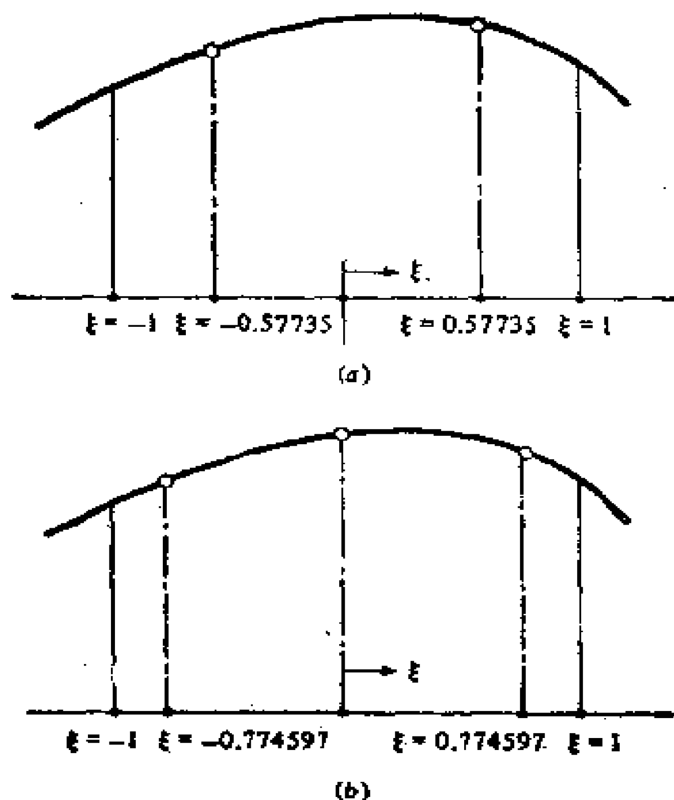


图3.19 Guass-Legendre求积：(a) 两点的Gauss-Legendre求积 (b) 三点的Gauss-Legendre求积

当$n=1$，…，6时，Gauss-Legendre求积的加权因子和Gauss点列在表3.8中。Gauss-Legendre求积法比Newton-Cotes求积法用得更多，因为在达到相同的精度的情况下，Gauss-Legendre求积法要求的基点较少（因此节省计算工作）。如果被积函数的第（$2n+2$）次导数等于零，则近似性的误差也等于零。换句话说，n次的多项式通过采用 $(n+1)/2$个Gauss点精确地被积分。当$n+1$为奇数时，应取相近的较大整数。

表3.8 Gauss–Legendre求积$\int_{-1}^{1}F(\xi)d\xi=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)w_i$的权和Gauss点

点ξ_i	n	权w_i
0.0000000000	一点公式	2.0000000000
±0.5773502692	两点公式	1.0000000000
0.0000000000	三点公式	0.8888888889
±0.7745966692		0.5555555555
±0.3399810435	四点公式	0.6521451548
±0.8611363116		0.3478548451
0.0000000000	五点公式	0.5688888889
±0.5384693101		0.4786286705
±0.9061798459		0.2369268850
±0.2386191861	六点公式	0.4679139346
±0.6612093865		0.3607615730
±0.9324695142		0.1713244924

例3.8 考虑下列两个积分的数值计算：

$$K_{11}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)^2dx,\quad G_{11}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}(\psi_1)^2dx \tag{3.195}$$

式中，ψ_1是二次 Lagrange 多项式，它与三个节点的 Lagrange 单元上的节点1有关（见图3.17）：

$$\psi_1(\xi)=-\frac{\xi}{2}(1-\xi)$$

如果我们选择线性变换（3.176），则有（$J_e=h_e/2$）

$$dx=\frac{h_e}{2}d\xi\qquad \frac{d\psi_1}{dx}=\frac{d\psi_1}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{2}{h_e}\frac{d\psi_1}{d\xi} \tag{3.196}$$

表达式K_{11}和G_{11}变成：

$$K_{11}=\frac{2}{h_e}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d\psi_1}{d\xi}\right)^2d\xi\quad G_{11}=\frac{h_e}{2}\int_{-1}^{1}(\psi_1)^2d\xi \tag{3.197}$$

式中，$h_e=x_{e+1}-x_e$。注意，在K_{11}中的被积函数是二次多项式，而G_{11}中的被积函数是四次多项式：

$$\frac{d\psi_1}{d\xi}=-\frac{1}{2}+\xi\qquad \left(\frac{d\psi_1}{d\xi}\right)^2=\frac{1}{4}+(\xi)^2-\xi$$

$$(\psi_1)^2 = \frac{1}{4}(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) \tag{3.198}$$

我们采用两种求积方法计算积分。

Newton-Cotes法求积　设$K_{11}^{(m)}$表示用m点Newton-Cotes公式得到的结果。我们有$b-a=2$，且

$$K_{11}^{(2)} = \frac{4}{2h_e}\left[\left(\frac{1}{4}+1+1\right)+\left(\frac{1}{4}+1-1\right)\right] = \frac{5}{h_e}$$

$$K_{11}^{(3)} = \frac{4}{6h_e}\left(\frac{5}{2}+4\times\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{3h_e}$$

$$K_{11}^{(4)} = \frac{4}{8h_e}\left[\frac{5}{2}+3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)2\right] = \frac{7}{3h_e}$$

$$G_{11}^{(2)} = \frac{h_e}{4}\frac{1}{2}[(1+2+1)+(1-2+1)] = \frac{h_e}{2} \tag{3.199}$$

$$G_{11}^{(3)} = \frac{h_e}{4}\frac{1}{6}(4+4\times 0) = \frac{h_e}{6}$$

$$G_{11}^{(4)} = \frac{h_e}{4}\frac{1}{8}\left[4+3\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{81}\right)2\right] = \frac{4h_e}{27}$$

$$G_{11}^{(5)} = \frac{h_e}{4}\frac{1}{90}\left[7(4)+32\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)2\right] = \frac{2h_e}{15}$$

$$G_{11}^{(6)} = \frac{h_e}{4}\frac{1}{288}\left[19(4)+75\left(\frac{9}{25}+\frac{81}{625}\right)2+50\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{625}\right)2\right]$$

$$= \frac{2h_e}{15}$$

因此，K_{11}是用三点公式精确地积分，而G_{11}是用五点公式精确地积分，这就证实了较早所作的论述。

Gauss-Legendre法求积　我们这时有：

$$K_{11}^{(1)} = \frac{2}{h_e}\left(\frac{1}{4}\right)2 = \frac{1}{h_e}$$

$$K_{11}^{(2)} = \frac{2}{h_e}\left[\frac{1}{4}+(-0.57735)^2\right]2 = \frac{2.33333}{h_e}\left(=\frac{7}{3h_e}\right)$$

$$K_{11}^{(3)} = \frac{2}{h_e}\left[\frac{1}{4}(0.88889)+2\left(\frac{1}{4}+0.77459^2\right)(0.55555)\right]$$

$$= \frac{2.33333}{h_e}\left(=\frac{7}{3h_e}\right)$$

$$G_{11}^{(2)} = \frac{h_e}{2}\frac{1}{4}[(0.57735)^2 + (0.57735)^4]2$$

$$= 0.11111 h_e\left(= \frac{h_e}{9}\right) \tag{3.200}$$

$$G_{11}^{(3)} = \frac{h_e}{2}\frac{1}{4}[(0.77459)^2 + (0.77459)^4](0.55555)2$$

$$= 0.13333 h_e\left(= \frac{2h_e}{15}\right)$$

注意，Gauss-Legendre 求积法对于较少的积分点有相同的精度。如同较早注意到的，二次多项式（$n=2$）用$\left[(n+1)/2=\frac{3}{2}\right]$个 两个点的Gauss 求积法准确地被积分，而四次多项式用三个点的高斯求积法准确的被积分。

当采用等参元时，手算K_{11}和G_{11}变得更复杂。然而，用数字计算机作这种运算却是很一般的。应该指出，当单元为直线，甚至当坐标变换包含二次或三次单元时，Jacobi矩阵将是相同的（$J_e = h_e/2$）。但是，当单元为曲线且变换包含非线性插值函数时，Jacobi矩阵为ξ的函数。例如，当采用二次的等参元时，由方程式（3.184）有：

$$J_e = \sum_{i=1}^{3} x_i^e \frac{d\psi_i^{(e)}}{d\xi}$$

式中，x_i^e为节点i的总的坐标。对于直线单元有$x_1^e = x_e, x_2^e = x_e + h_e/2$和$x_3^e = x_{e+1}$（$= x_e + h_e$）以及

$$J_e = x_e\left(-\frac{1}{2}+\xi\right) + \left(x_e + \frac{h_e}{2}\right)(-2\xi) + (x_e + h_e)\left(\frac{1}{2}+\xi\right)$$

$$= \frac{h_e}{2} \tag{3.201}$$

因此，J_e与ξ无关。

对于二次和三次插值函数（见图3.17），有限元矩阵

$$K_{ij} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx \qquad G_{ij} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i\psi_j dx$$

$$F_i = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i dx \tag{3.202}$$

由Gauss-Legendre求积得出下列数值（直至小数点后第五位）：

二次的（三点公式）

$$[K]=\frac{1}{h_e}\begin{bmatrix} 2.33333 & -2.66667 & 0.33333 \\ -2.66667 & 5.33333 & -2.66667 \\ 0.33333 & -2.66667 & 2.33333 \end{bmatrix}$$

$$[G]=\frac{h_e}{10}\begin{bmatrix} 1.33333 & 0.66667 & -0.33333 \\ 0.66667 & 5.33333 & 0.66667 \\ -0.33333 & 0.66667 & 1.33333 \end{bmatrix} \tag{3.203}$$

$$\{F\}=h_e\begin{Bmatrix} 0.166667 \\ 0.666667 \\ 0.166667 \end{Bmatrix}$$

三次的（四点公式）

$$[K]=\frac{1}{h_e}\begin{bmatrix} 3.7 & -4.725 & 1.35 & -0.325 \\ -4.725 & 10.8 & -7.425 & 1.35 \\ 1.35 & -7.425 & 10.8 & -4.725 \\ -0.325 & 1.35 & -4.725 & 3.7 \end{bmatrix}$$

$$[G]=\frac{h_e}{10}\begin{bmatrix} 0.761905 & 0.589286 & -0.214286 & 0.113095 \\ 0.589286 & 3.85714 & -0.482143 & -0.214286 \\ -0.214286 & -0.482143 & 3.85714 & 0.589286 \\ 0.113095 & -0.214286 & 0.589286 & 0.761905 \end{bmatrix}$$

$$\{F\}=h_e\begin{Bmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \end{Bmatrix} \tag{3.204}$$

可以运用这些结果分析任何一组边界条件下带常系数a和源

项f的二次微分方程式（3.1）。

例3.9 考虑长圆柱体径向轴对称的热流问题（见习题3.31）。控制的微分方程式为：

$$-\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)=Qr \qquad r_i<r<r_0$$

$$T(r_i)=T_i \qquad T(r_0)=T_0 \qquad (3.205)$$

点A和点B之间单元方程的变分公式为：

$$0=\int_{r_A}^{r_B}\left(kr\frac{dv}{dr}\ \frac{dT}{dr}-vQr\ \right)dr-q_Av(r_A)-q_Bv(r_B) \quad (3.206)$$

式中，v是试函数，且

$$q_A=-\left(kr\frac{dT}{dr}\right)_{r=r_A} \qquad q_B=\left(kr\frac{dT}{dr}\right)_{r=r_B} \qquad (3.207)$$

假定有限元的插值式为：

$$T=\sum_{i=1}^{n}T_i\psi_i \qquad (3.208)$$

式中，n为每个单元的节点数，ψ_i为$n-1$次Lagrange插值函数。单元的有限元方程式为：

$$0=\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{r_A}^{r_B}\left(kr\frac{d\psi_i}{dr}\ \frac{d\psi_j}{dr}-\psi_iQr\right)dr\right]T_j$$
$$-q_A\psi_i(r_A)-q_B\psi_i(r_B) \qquad (3.209)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

应该指出，如果$n>2$，且在两个端节点之间的某一节点或某些节点上有给定的热流q_0时，变分公式就必须附加一项$-q_0v(r_0)$，其中，r_0为有给定q_0的节点的总的座标。另一方面，可以将（单元）内部节点上所有给定的热流直接地包含在总的力矢量中，两种方法是等效的。考虑到给定的点源，可对微分方程式（3.205）进行修改。假设有m个强度为q_j的这样的点源作用于域的点r_j上（$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,M$），则微分方程（3.205）变为：

$$-\frac{d}{dt}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)-Qr-\sum_{j=1}^{M}q_j\delta(r-r_j)=0 \qquad (3.210)$$

式中，$\delta(r-r_j)$ 为方程式(3.122)定义的Dirac变量的增量函数。变分式变为：

$$0=\int_{r_A}^{r_B}\left(kr\frac{dv}{dr}\frac{dT}{dr}-vQr\right)dr-q_Av(r_A)-q_Bv(r_B)$$

$$-\sum_{j=1}^{m}q_jv(r_j) \qquad (3.211)$$

式中，m为单元中点源的数量(不包括端节点A和B的点源)。

方程式(3.209)可以表示成矩阵的形式

$$[K^{(e)}]\{T^{(e)}\}=\{F^{(e)}\} \qquad (3.212a)$$

和

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{r_A}^{r_B}kr\frac{d\psi_i}{dr}\frac{d\psi_j}{dr}dr$$

$$F_i^{(e)}=\int_{r_A}^{r_B}Qr\psi_idr+q_A\psi_i(r_A)+q_B\psi_i(r_B) \qquad (3.212b)$$

对于任何Lagrange单元，r_A和r_B分别表示单元的第一个和最后一个节点的总的座标。注意，F_i中后面两项对于单元的任意中间节点都等于零（因为当$i\neq1$时$\psi_i(r_A)=0$和当$i\neq n$时$\psi_i(r_B)=0$）。

采用n点 Gauss求积法时（n为单元的节点数），单元矩阵的计算是直截了当的。利用变换式(3.176)，我们有

$$\xi=\frac{2r-(r_A+r_B)}{h_e} \qquad h_e=r_B-r_A$$

或

$$r=\frac{1-\xi}{2}r_A+\frac{1+\xi}{2}r_B \qquad (3.213)$$

对于任何直线单元和常数k有：

$$K_{ij}^{(e)}=\frac{2k}{h_e}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-\xi}{2}r_A+\frac{1+\xi}{2}r_B\right)\frac{d\psi_i}{d\xi}\frac{d\psi_j}{d\xi}d\xi \qquad (3.214)$$

对于线性的($n=2$)、二次的($n=3$)和三次的($n=4$)Lagrange单元，网格中第一个单元的系数矩阵为($h_e=0.25$)：

$$[K^{(1)}]_{线性}=k\begin{bmatrix}7.5 & -7.5\\ -7.5 & 7.5\end{bmatrix}$$

$$[K^{(1)}]_{二次}=k\begin{bmatrix} 8.6667 & -10.0000 & 1.3333 \\ -10.0000 & 21.3333 & -11.3333 \\ 1.3333 & -11.3333 & 10.0000 \end{bmatrix} \tag{3.215}$$

$$[K^{(1)}]_{三次}=k\begin{bmatrix} 9.0583 & -11.6625 & 3.5250 & -0.9208 \\ -11.6625 & 28.5750 & -21.0375 & 4.1250 \\ 3.5250 & -21.0375 & 32.6250 & -15.1125 \\ -0.9208 & 4.1250 & -15.1125 & 11.9083 \end{bmatrix}$$

其余的步骤，即单元的集合、边界条件的引入以及方程式(在计算机上)的求解，到现在为止应该为读者所熟悉。采用6个线性单元、3个2次单元和两个三次单元得到的有限元解与精确解的比较列在表3.9中《数据和精确解见习题3.31)。注意，当网格中节点的总数相同时，三次的单元给出的结果最好。

表3.9 例3.9径向轴对称热流问题的有限元解与精确解的比较

	线性 (6个单元)	二次 (3个单元)	三次 (2个单元)	精确解
1.75	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000
2.00	331.0090	330.9848	330.9615	330.9736
2.25	270.1346	270.0892	270.7763	270.0879
2.50	215.6680	215.6293	215.6240	215.6242
2.75	166.3887	166.3560	166.3525	166.3553
3.00	121.3946	121.3789	121.3734	121.3767
3.25	80.0000	80.0000	80.0000	80.0000

在3-7节中，我们将要讨论一维问题有限元分析的计算机执行步骤。本节介绍的数值积分概念的计算机运算，将作为单元计算的一部分进行研究。一个求解本章讨论的一维问题的标准有限元程序（FEM1D）也将被介绍）并且将通过几个例题来说明它的应用方法。读者将会发现，这个程序是容易理解的，因为它真实地反映了理论上讨论的步骤。

3-7 计算机执行程序

3-7-1 概 述

读者现在应该清楚，一般问题（即一维二次问题、一维四次问题等）的有限元分析中所包含的步骤是有规律的，因此可以在数字式计算机上运算。事实上，有限元法的广泛应用，很大程度上是由于不管是否为特殊问题，都可以比较容易地在数字式计算机上计算。对于不同几何形状、边界条件以及问题数据的情况，一般类型中的特殊问题可以用简单对程序读入数据的方法求解。例如，如果我们提供一个一般程序解下列形式的方程式

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2u}{dx^2}\right)+cu=f \quad 0<x<L \qquad (3.216)$$

则任何复杂边界条件下方程式(3.1)(见表2.1)描述的所有物理问题以及梁的问题都可以求解。

本节的目的在于讨论有关提供一维二次和四次微分方程式计算机程序的一些基本概念。所提供的概念也在于说明一个典型的有限元程序的发展过程。读者可以运用这些概念来发展自己的程序（对于你所感兴趣的问题）。

3-7-2 总 论

有限元程序由三个基本部分组成(见图3.20)：

1.预处理程序

2.处理程序

3.后处理程序

在程序的预处理部分，读入和(或)产生问题的输入数据。这包括几何特征（即域的长度、边界条件等）、问题的数据(即微分方程中的数字、源项等)、有限元网格的信息（即单元数、单元长、连缀性矩阵等）以及各种选择指令（打印、不打印、静力分析、瞬时分析、插值次数等）。在程序的处理部分，前节讨论的有限元法中除开与后处理有关的步骤外，所有的步骤都将被执行。这包

括采用数值积分形成单元矩阵、单元方程式的集合、边界条件的引入以及方程式的求解得出各节点的初始变量值。在程序的后处理部分，输出的数据按照要求的格式打印出来和(或)绘成图形，由解导出的次变量被计算和打印。

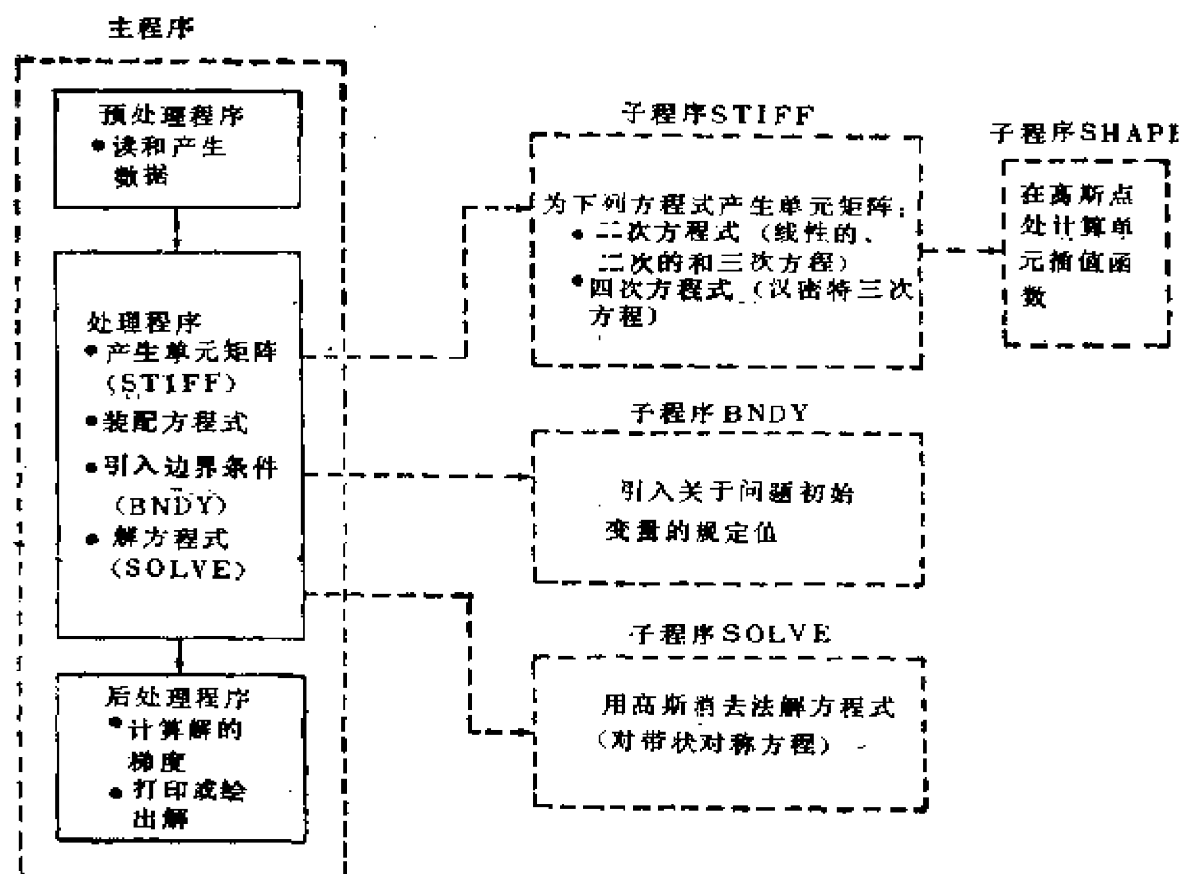


图3.20 有限元程序中的三个组成部分及其功能

预处理程序和后处理程序可以是几句 Fortran 的读和打印有关信息的语句，也可以是简单的子程序（即形成网格和计算解的梯度的子程序），或者是通过磁盘和磁带与其它设备联系的复杂程序。需要花费大量时间的典型处理程序可能是由几个子程序组成，每一个子程序都有特定的目的（即一个子程序计算单元矩阵、一个子程序引入边界条件和一个子程序解方程式）。有限元程序的复杂程度取决于编写程序问题的一般类型、方程式中数据的形成情况，以及打算使用程序的人。通常希望能够用说明语句说明计算

机程序中所有变量代表的意义。

3-7-3 输入的数据(预处理程序)

有限元程序输入的数据包括读单元类型（即Lagrange单元或梁单元），单元数（如果不得不采用一组均匀网格，则需给出单元的最小数和最大数），规定的边界点源（数量、总的自由度数，以及规定的力的数值），规定的边界条件（数量、总的自由度数、以及规定的位移的数值）以及单元的总的坐标和单元的材料性质。如果采用均匀网格，应该读入域的长度，节点的总的坐标可以在程序中得到。计算机程序 FEM1D 中采用的变量说明如下。在下一节中，将要讨论典型有限元程序的基本组成部份，然后用 Fortran语句（取自FEM1D）说明这些概念。

变 量 说 明

AL——域的长度；

AX0、AX1、BX0、BX1、CX0、CX1 —— 定义微分方程式中系数线性变换的参数。

(见表3.6)：A = AX0 + X*AX1，B = BX0 + X*BX1，CX = CX0 + X*CX1。

ALFA、BETA、A0、A1、A2、A3、A4——时间近似性问题中的参数；

COEF (I, J)——贮存第i个单元的AX0、AX1、……F0、F1 (F = F0 + X*F1) 的数组：

A×0 = COEF(I, 1)、A×1 = COEF(I, 2)、等等；

DT——与时间有关问题的时间增量；

EC(I, J)——单元I上节点J的总坐标的数组；

ELX——单元节点的总坐标的数组

ELSTIF——单元系数（刚度）矩阵；

ELF——单元力矢量；

GF、GF0、GF1、GF2——位移及其时间导数的列矢量；

ICONT——网格的系数和均匀性指令，ICONT = 1，A，B等是连续的，且网格是均匀的。ICONT = 0则相反；

IELEM——单元类型指令，IELEM = 0为四次问题的二节点单元，

IELEM = 1为二次问题的二节点单元，IELEM = 2为二次问题的

三节点单元，IELEM = 3为二次问题的四节点单元；

ITEM——瞬时（与时间有关）分析的指令；ITEM = 0为静态（与时间无关）分析，ITEM = 1为包含一次时间导数，ITEM = 2为包含二次时间导数；

GSTIF——上半带形式中集合系数（刚度）矩阵，(NEQXNHBW)；

GF——子程序 'SOLrE'被调用前为集合(总)力矢量，子程序 'SOLVE' 调用后为方程式的解；

NBDY——规定的初始自由度数量；

IBDY——规定的初始自由度的列数；

VBDY——在IBDY中规定的输入值的列数；

NBF——规定次自由度的数量；

IBF——规定次自由度的列数；

VBF——IBF中规定输入值的列数；

NRMAX——维数语句中 'GSTIF' 的行数；

NCMAX——维数语句中 'GSTIF' 的列数；

NPE——每个单元的节点数；

NDF——每个节点的自由度数；

NEM——网格中的单元数；

NEQ——有限元模型中方程式数；

NHBW——总刚度矩阵的半带宽；

NGP——积分中采用的Gauss点数；

NN——单元中的总自由度数；

NNM——有限元网格中的节点数；

NOD(I, J)——第I个单元中与第J个节点对应的总的节点编号（相关矩阵）；

NPRNT——单元矩阵和总的矩阵打印（NPRNT = 1或不打印（NPRNT = 0）的指令；

NTIME——时间间隔数；

X——总的坐标的矢量（列）。

3-7-4 单元矩阵计算（处理程序）

在子程序STIFF中，单元矩阵是通过计算方程式（3.15）形式的积分进行计算的。为了在程序中包含线性的、二次的和三次

的Lagrange单元以及梁单元。相应的插值函数（或形函数）SF及其对总坐标的一次导数GDSF和二次导数GDDSF在子程序SHAPE中计算，它由子程序 STIFF 得名（见图 3.20）。注意，有两种单元，即杆单元和梁单元。对于杆单元，有三种不同阶次的插值函数。因此，需要对指令IELEM规定单元的类型和阶次。

总的节点信息可以借助数组NOD变换成相应的单元节点。例如，总的节点N与单元N－1的局部节点2以及单元N的局部节点1相同。但是，这种对应已经贮存在NOD中：

N＝NOD（N－1，2）＝NOD（N，1）

例如，单元N节点1和2的总坐标为：

单元N：ELX（1）＝X（N）＝X（NOD（N，1））

单元N－1：ELX(2)＝X(N)＝X（NOD（N－1，2））

为了能够计算六次以内的多项式（三次多项式的平方），我们需要将与二、三、四点积分有关的Gauss的权和点加以贮存。这可以通过定义矩阵数组WT（4，4）和GAUSS（4，4）来实现。WT和GAUSS的n列分别包含相应于n点Gauss积分的权和零（未定义的入口应该填零）。例如，WT的第3列包括

WT(1，3)＝0.55555　　WT(2，3)＝0.88888

WT(3，3)＝0.55555　　WT(4，3)＝0.0

因此，

GAUSS(NI，NGP)＝相应于NGP点Gauss法则的第NI个Gauss的权

式中，NGP表示Gauss点的数量，必须使这些点选择得能很好地满足单元矩阵的精度。对于梁单元，NGP应该等于4，而对于杆单元，NGP应该等于$(n+1)/2$，式中，n是单元矩阵中出现的多项式的最高次数。最高的多项式是$n=2r$次，其中，r是插值多项式的次数。它出现在‘质量’矩阵

$$C_{ij}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\psi_i\varphi_j dx$$

的计算中。因此，对于r次Lagrange插值函数（相应的单元有$r+$

1个节点），积分法则应该采用$\left(r+\frac{1}{2}\right)$个点或（取整数）$r+1$个点。换句话说，NGP应该等于每个单元的节点数。

单元的变换式为：

$$\xi=\frac{2x-(x_e+x_{e+1})}{x_{e+1}-x_e}=\frac{2(x-x_e)-h_e}{h_e}$$

或
$$x=\frac{h_e}{2}(1+\xi)+x_e \tag{3.217}$$

方程式（3.185）和（3.217）往往必须将总坐标系x中已知的所有函数改写为单元坐标中的函数。

Gauss积分公式（3.193）中的求和由DOLOOP70代替，其中，被积函数在Gauss点用Gauss权相乘进行计算。系数AX，BX和CX定义微分方程式（3.216）中的系数。例如，考虑对应于方程式（3.216）中第一项的有限元矩阵（对于$a=1+x=1+x(\xi)$的情况）：

$$A_{ij}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}(1+x)\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(1+x)\left(\frac{1}{GJ}\frac{d\psi_i}{d\xi}\right)\times\left(\frac{1}{GJ}\frac{d\psi_j}{d\xi}\right)Jd\xi$$

$$=\sum_{I=1}^{n}\left[(1+x)\left(\frac{1}{GJ}\frac{d\psi_i}{d\xi}\right)\left(\frac{1}{GJ}\frac{d\psi_j}{d\xi}\right)GJ\right]_{\xi=\xi_I}W_I \tag{3.218}$$

式中，GJ是变换的Jacobi式。写成Fortran形式有：

$$A(I,\ J)=\sum_{NI=1}^{NGP}AX\ GDSF(I)GDSF(J)GJ\ W_{NI} \tag{3.219}$$

上面讨论的Fortran程序如下：

```
C      ..............................................................
C
C    CALCULATION OF COEFFICIENT MATRICES AND COLUMN
C                          VECTOR FOR THE MODEL EQUATION
```

```
C
C              -(AX. U')' + (BX. U'')'' + CX. U = F
C
C     HERE THE SYMBOL ' DENOTES DIFFERENTIATION  WITH
C     RESPECT TO X,  AND AX,  BX,  CX AND F ARE GIVEN
C     FUNCTIONS OF THE GLOBAL COORDINATE X (SEE TABLE
C     3.6 FOR ONE-DIMENSIONAL EQUATIONS)
C
C     ..........................................................................
C
C     X.........GLOBAL COORDINATE APPEARING IN THE EQUATION
C     XI.........LOCAL COORDINATE
C     ELX(I)...GLOBAL COORDINATE  OF  THE  ELEMENT'S  I-TH
C     NODE
C     GAUSS...MATRIX  OF  GAUSS  POINTS;  VALUES  IN  N-TH
C     COLUMN CORRESPOND TO  GAUSS  POINTS  FOR  N-POINT
C     FORMULA
C     WT......GAUSS WEIGHTS CORRESPONDING TO GAUSS POINTS
C     SF(I)...ELEMENT INTERPOLATION FUNCTION FOR  NODE  I
C     GDSF(I)...FIRST DERIVATIVE OF SF(I) WITH RESPECT TO X
C     GDDSF(I)...SECOND DERIVATIVE OF SF (I) WITH  RESPECT
C     TO X
C     GJ...............JACOBIAN OF THE TRANSFORMATION
C     H ...............ELEMENT LENGTH
C     NPE ............NODES PER ELEMENT
C
C     NOTE:IT IS ASSUMED THAT ALL NECESSARY VARIABLES,
C          SUCH AS NPE, NN, IELEM,ELX,ETC. ARE TRANSFERRED
C          FROM THE MAIN PROGRAM(SEE PROGRAM FEM1D IN
C          APPENDIX I)
C
C     ..........................................................................
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
      DIMENSION  ELSTIF (4,4), ELF(4), ELX(4),  GAUSS(4,4),
      WT(4,4) DATA  GAUSS/4*0.0D0,  -0.57735027D0, 0.57735027D0,
```

```
     2*0.0D0, * -0.77459667D0,0.0D0,0.77459667D0,0.0D0, -0.86113631D0,
    * -0.33998104D0,0.33998104D0,0.86113631D0/
     DATA WT/2.0D0, 3*0.0D0, 2*1.0D0,2*0.0D0, 0.55555555D0,
    *0.88888888D0, 0.55555555D0, 0.0D0, 0.34785485D0,
    *0.02*0.65214515D0, 0.34785485D0/
C
     NN=NPE*NDF
C
C    INITIALIZE ALL ARRAYS
C
     DO 10 I=1, NN
     ELF(I)=0.0
     DO 10 J=1, NN
  10 ELSTIF(I,J)=0.0
C
C    DO-LOOP ON NUMBER OF GAUSS POINTS BEGINS HERE
C
     DO 40 NI=1, NGP
     XI=GAUSS(NI, NGP)
C
C    CALL SUBROUTINE 'SHAPE' TO EVALUATE THE
     INTERPOLATION
C    FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES AT THE GAUSS
        POINTS
C
     CALL SHAPE(XI, H, NPE, NN)
     CNST=GJ*WT(NI, NGP)
     X=0.5*H*(1.0+XI)+ELX(1)
C
C    DEFINE THE COEFFICIENTS OF THE DIFFERENTIAL
C       EQUATIONS (ONLY UPTO LINEAR VARIATION IS
        ACCOUNTED HERE)
C
     AX=AX0+AX1*X
     BX=BX0+BX1*X
     CX=CX0+CX1*X
```

```
      F = FO + F1*X
C
C     COMPUTE THE  COEFFICIENT  MATRIX  AND  COLUMN
C        VECTOR FOR THE DIFFERENTIAL  EQUATION
C
      DO 20 I = 1, NN
      ELF(I) = ELF(I) + CONST*SF(I)*F
      DO 20 J = 1, NN
      ELSTIF(I, J) = ELSTIF(I, J) + AX*CNST*GDSF(I)*GDSF(J)
     *                            + BX*CNST*GDDSF(I)*GDDSF(J)
     *                            + CX*CNST*SF(I)*SF(J)
   20 CONTINUE
   40 CONTINUE
      STOP
      END
```

3-7-5 带形矩阵的集合

每个单元的单元矩阵一旦被算出，就应该立即对其进行集合，不必等所有单元的单元矩阵都计算完毕后才去集合。后者要求贮存每个单元的单元矩阵。在前一种情况下，我们可以在同一个循环中进行集合，这个循环中的子程序STIFF叫做计算单元矩阵的子程序。此外，主对角线以上带形的单元矩阵进行集合，可以使我们节省贮存单元和计算时间。当单元矩阵为对称矩阵时（本书中我们感兴趣的大多数问题都属于这种情况），总矩阵（或集合矩阵）也是对称的，远离主对角线的许多元素都是零（见图3.21）。因此，它使我们产生只贮存集合矩阵上半带的观念。对于这种带形方程组，总目标方程式的解算方法是有效的。

集合的（总的）有限元矩阵的半带宽NHBW可以由有限元程序本身确定。有限元插值函数的紧凑性（即$\psi_i^{(e)}$只由单元e上非零元素确定）决定集合矩阵的带形特征。回顾前面的讨论可知，如果两个总的节点不属于同一个单元，则在集合矩阵中相应的元素应为零：

$$K_{IJ} = 0 \text{（若}I\text{和}J\text{不属于同一单元）}$$

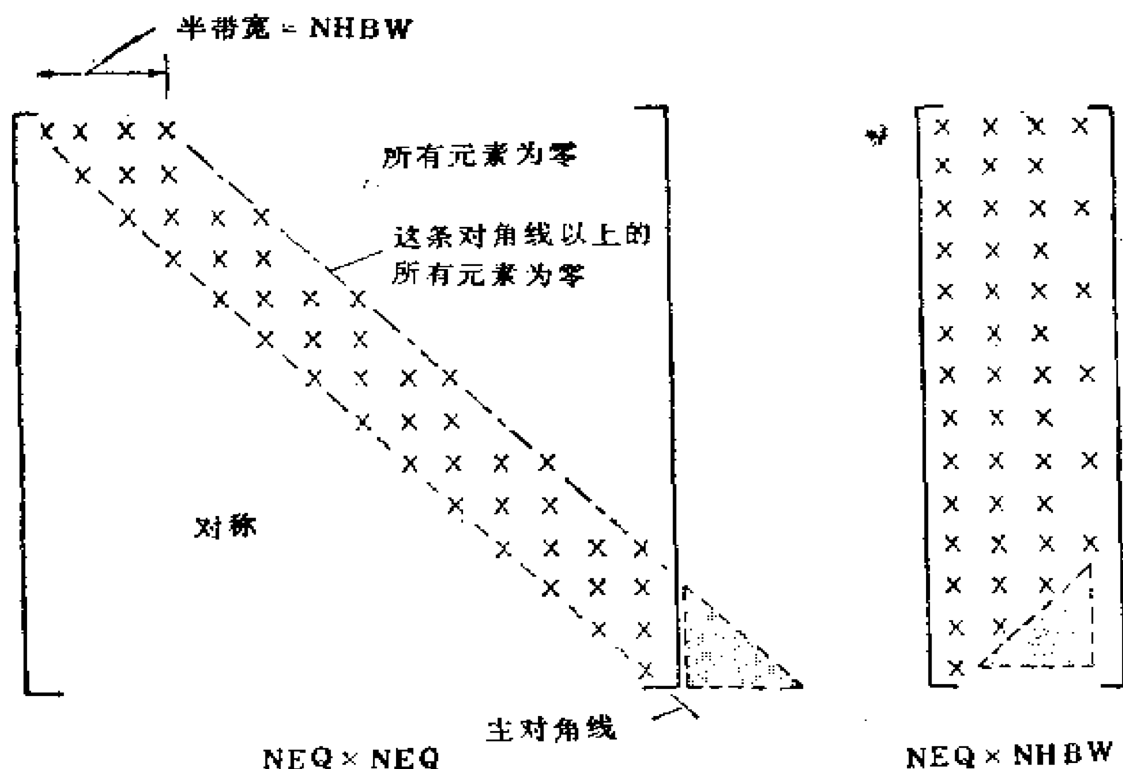


图3.21　上半带有限元矩阵的贮存方法

这个性质使我们能够求出集合矩阵的半带宽度NHBW：

$$\mathrm{NHBW} = \max_{\substack{1 \leqslant N \leqslant \mathrm{NEM} \\ 1 \leqslant I, J \leqslant \mathrm{NPE}}} [|\mathrm{NOD}(N, I) - \mathrm{NOD}(N, J)| + 1] \times \mathrm{NDF} \tag{3.220}$$

式中　NDF = 每个节点的自由度（即初始未知数）数目；

NEM = 有限元网格中的单元数目；

NPE = 每个单元的节点数目。

很清楚，对于一维问题，单元节点间的最大差值等于NPE－1。因此，

$$\mathrm{NHBW} = [(\mathrm{NPE} - 1) + 1] \times \mathrm{NDF} = \mathrm{NPE} \times \mathrm{NDF} \tag{3.221}$$

当然，NHBW总是小于或等于问题的有限元网格中初始自由度的总数。

我们现在说明带形矩阵的集合方法。当$J<I$和$J>$NHBW 时，单元矩阵的集合逻辑上应该省略。方形集合矩阵（即全贮存形式矩阵）的主对角线I＝J变成了带形集合矩阵的第一列，如图3.21所示。上部（与主对角线平行的）对角线在带形矩阵中成了相应的列。因此，带形矩阵的（真实的）维数是NEQ×NHBW，式中NEQ表示方程式的总数（或初始未知数的总数）。下列Fortran 语句表示将有限元矩阵集合成带形矩阵：

```
C     ELX(I)…GLOBAL COORDINATE OF THE I-TH  NODE  OF AN
                 ELEMENT
C     ELSTIF…ELEMENT  COEFFICIENT(STIFFNESS)MATRIX
C     ELF………ELEMENT  FORCE  VECTOR
C     GF ………COLUMN  OF  GLOBAL(ASSEMBLED)FORCES
C     GSTIF …UPPER-HALF  BANDED  FORM  OF  THE  COEFFICIENT
                 MATRIX
C     NPE………NUMBER  OF  NODES  PER  ELEMENT
C     NDF  ……NUMBER  OF  PRIMARY  UNKNOWNS  PER  NODE
C     NEQ  ……NUMBER  OF  EQUATIONS  IN  THE  FINITE  ELEMENT
                 MODEL
C     NHBW…HALF  BAND  WIDTH  OF  THE  GLOBAL  COEFFICIENT
                 MATRIX
C     NN ………NUMBER  OF  UNKNOWNS  PER  ELEMENT
C     NOD  ……CONNECTIVITY  MATRIX
C     X  ………GLOBAL  COORDINATE  OF  GLOBAL  NODE  I
      ………………………………………………………………………………………………
C     INITIALIZE  GLOBAL  MATRICES
   60 DO 70 I=1, NEQ
      GF(I)=0.0
      DO 70 J=1,NHBW
   70 GSTIF(I, J)=0.0
C     DO-LOOP ON NUMBER OF ELEMENTS BEGINS HERE
      DO 150 N=1, NEM
C     TRANSFER THE GLOBAL DATA TO THE ELEMENT
      DO 100 I=1,NPE
      NI=NOD(N,I)
```

```
  100 ELX(I) = X(NI)
C     CALL SUBROUTINE 'STIFF' TO CALCULATE ELEMENT
      EQUATIONS
C     SUBROUTINE STIFF COMPUTES MATRIX ELSTIF AND
      VECTOR ELF CALL STIFF(NN,NPE,ELSTIF, ELF)
C     ASSEMBLY OF ELEMENT MATRICES AND VECTORS BEGIN
      HERE
      DO 140 I = 1,NPE
      NR = (NOD(N,I) - 1)*NDF
      DO 140 II = 1,NDF
      NR = NR + 1
      L = (I - 1)*NDF + II
      GF(NR) = GF(NR) + ELF(L)
      DO 140 J = 1,NPE
      NCL = (NOD(N,J) - 1)*NDF
      DO 140 JJ = 1,NDF
      M = (J - 1)*NDF + JJ
      NC = NCL - NR + JJ + 1
      IF(NC)140,140,130
  130 GSTIF(NR, NC) = GSTIF(NR, NC) + ELSTIF(L, M)
  140 CONTINUE
  150 CONTINUE
```

3-7-6 边界条件的引入

边界条件（初始未知数）可以象前面所述的方法引入（见习题3.30）。步骤包括将已知的乘数移到矩阵方程式等式的右边，除主对角线上的元素以外，与已知初始变量对应的列和行的所有元素都用零代替，并且用规定的变量值代替等式右边列向量中相应的元素。为了说明此概念，考虑下面以矩阵形式表示的 n 个代数方程式：

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (3.222)$$

假设$U_2=\alpha$是规定的（记住当节点上广义的位移已知时，相应的广义力便未知；反之亦然），我们现在开始迫使边界条件为下面的形式。设$K_{22}=1$和$F_2=\alpha$，当$i\neq2$（$i=1, 3, \cdots, n$）时，再设$K_{2i}=K_{i2}=0$，则有

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & K_{14} & \cdots & K_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} & \cdots & K_{3n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ K_{n1} & 0 & K_{n3} & K_{n4} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \alpha \\ \\ \vdots \\ \hat{F}_n \end{Bmatrix} \tag{3.223}$$

式中

$$\hat{F}=F_i-K_{i2}\alpha \qquad i=1, 3, 4, 5, \cdots, n \qquad i\neq2 \tag{3.224}$$

因此，一般说来，如果$U_k=\alpha$是已知的时有：

$$\begin{aligned} &K_{kk}=1 \qquad F_k=\alpha \\ &F_i\rightarrow F_i-K_{ik}\alpha \\ &K_{ki}=K_{ik}=0 \end{aligned} \tag{3.225}$$

式中　　$i=1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n, i\neq k$

这个步骤使我们保留矩阵的原始次数，并且引入的边界条件作为解的一部分被打印出来。然而，贮存单元没有减少（如果我们可以消去与规定自由度对应的列和行，这一点应该是可行的）。下面的Fortran 语句说明带形矩阵的相同步骤（见附录I中子程序BNDY）：

```
C    ......................................................................
C
C    GSTIF......GLOBAL (ASSEMBLED) COEFFICIENT MATRIX
C               IN UPPER-HALF BANDED FORM (NEQ BY NHBW)
C    GF.........GLOBAL(ASSEMBLED)VECTOR OF FORCES
C    NBDY ......NUMBER OF SPECIFIED PRIMARY DEGREES OF
C               FREEDOM
```

```
C    IBDY  ......COLUMN OF SPECIFIED PRIMARY DEGREES OF
               FREEDOM
C    VBDY  ......COLUMN OF SPECIFIED VALUES OF ENTRIES IN
               IBDY
C    NBF   ......NUMBER OF SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF
               FREEDOM
C    IBF   ......COLUMN OF SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF
               FREEDOM
C    VBF......COLUMN OF SPECIFIED VALUES OF FORCES IN IBF
C    NRMAX......ROW-DIMENSION OF GSTIF IN THE DIMENSION
               STATEMENT
C    NCMAX......COLUMN-DIMENSION OF GSTIF IN DIMENSION
               STATEMENT
C    NEQ..........TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE FEM
               MODEL
C    NHBW ......HALF BAND WIDTH OF MATRIX GSTIF
C
C    ..............................................................................
C
C
C    IMPOSE SPECIFIED VALUES OF THE SECONDARY VARIABLES
           (FORCES)
C
     IF(NBF.EQ.0)GOTO 170
     DO 160 NF=1,NBF
     NB=IBF(NF)
 160 GF(NB)=GF(NB)+VBF(NF)

C    IMPOSE SPECIFIED VALUES OF THE PRIMARY DEGREES
C          OF FREEDOM
C
 170 CALL BNDY(NRMAX, NCMAX, NEQ, NHBW,GSTIF,GF, NBDY,
           IBDY, VBDY)
C
C    SUBROUTINE BNDY IS GIVEN BELOW
C
```

```
      SUBROUTINE BNDY(NRMAX, NCMAX, NEQ, NHBW, S, SL,
     *           NBDY, IBDY, VBDY)
C
C     ..........................................................................
C
C     SUBROUTINE USED TO INCLUDE THE SPECIFIED PRIMARY
C           DEGREES OF FREEDOM INTO THE ASSEMBLED SYSTEM
C           OF EQUATIONS
C
C     ..........................................................................
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION S(NRMAX, NCMAX), SL(NRMAX)
      DIMENSION IBDY(NBDY), VBDY(NBDY)
      DO 300 NB=1, NBDY
      IE=IBDY(NB)
      SVAL=VBDY(NB)
      IT=NHBW-1
      I=IE-NHBW
      DO 100 II=1, IT
      I=I+1
      IF (I.LT.1)GO TO 100
      J=IE-I+1
      SL(I)=SL(I)-S(I, J)*SVAL
      S(I, J)=0.0
  100 CONTINUE
      S(IE, 1)=1.0
      SL(IE)=SVAL
      I=IE
      DO 200 II=2, NHBW
      I=I+1
      IF (I.GT.NEQ) GO TO 200
      SL(I)=SL(I)-S(IE, II)*SVAL
      S(IE, II)=0.0
  200 CONTINUE
  300 CONTINUE
```

```
      RETURN
      END
```

3-7-7 方程式的解和后处理程序

附录I中子程序SOLVE用于解算带形方程组，并且将解的结果返存在数组GF中。为了求得此解，采用Gauss消元和向后回代法。对于大多数计算体系而言，方程解算方法的多样化是有效的，可以根据需要采用任何程序。

后处理程序包括解的梯度的计算及绘图。下列的子程序STRESS说明单元内部各点w和dw/dx的计算。

```
      SUBROUTINE STRESS(NPE, NDF, IELEM, WO, ELX)
C
C     ..........................................................................
C
C     X..........GLOBAL COORDINATE
C     XI ........LOCAL COORDINATE
C     SF ........ELEMENT INTERPOLATION FUNCTIONS
C     GDSF ...FIRST DERIVATIVE OF SF WITH RESPECT  TO  X
C     GDDSF...SECOND DERIVATIVE OF SF WITH RESPECT TO X
C     WO........COLUMN OF NODAL VALUES OF PRIMARY
                UNKNOWNS
C     W  ........PRIMARY DEGREES OF FREEDOM AT GAUSS POINTS
C     DW.........FIRST DERIVATIVE OF W: DW/DX
C     DDW ......SECOND DERIVATIVE OF W: D(DW)/DX
C
C     NOTE:  W, DW, AND DDW ARE COMPUTED AT NINE POINTS
             OF EACH ELEMENT (DW AND DDW ARE NOT
C            EXPECTED TO BE ACCURATE AT THE NODAL POINTS
C            OF THE ELEMENT)
C     ..........................................................................
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      COMMON/SHP/SF(4), GDSF(4), GDDSF(4), GJ
      DIMENSION    GAUSS(9), WO(4), ELX(4)
      DATA GAUSS/-1.0D0, -0.75D0, -0.50D0, -0.25D0,0.0D0,0.25D0,
```

```
*             0.50D0, 0.75D0, 1.0D0/
C
      NET = NPE
      IF(IELEM.EQ.0)NET = 4
      H = ELX(NPE) - ELX(1)
      DO 70 NI = 1,9
      XI = GAUSS(NI)
      CALL SHAPE(XI, H, NPE, NET, IELEM)
      X = 0.5*H*(1.0 + XI) + ELX(1)
      W = 0.0
      DW = 0.0
      DDW = 0.0
      DO 65 I = 1, NET
      W = W + SF(I)*WO(I)
      DW = DW + GDSF(I)*WO(I)
      IF(IELEM.NE.O)GOTO 65
      DDW = DDW + GDDSF(I)*WO(I)
   65 CONTINUE
      IF(IELEM.EQ.O)PRINT 10, X, W, DW, DDW
      IF(IELEM.GT.O)PRINT 10, X, W, DW
   70 CONTINUE
   10 FORMAT(10X, 8E13.5)
      RETURN
      END
```

3-7-8 计算机程序FEM1D的应用

附录I所列的计算机程序在于说明一维线性问题有限元法计算中的某些基本步骤。你可以将程序的某些部分修改，使其能用来解算更特殊或更一般的问题。不要忘记，有限元分析中的基本步骤是建立方程式的有限元模型和选择适当的插值函数。单元矩阵容易用修改STIFF中的适当语句编写程序。

在这里，我们再用例3.1、3.3、3.6和3.7中的问题做例子，说明输入计算机程序FEM1D的数据的形成方法。每个问题中典型的程序输出也将被给出。输入FEM1D的数据中的各变量列在表

3.10中。

表3.10　　输入FEM1D数据中各变量的说明

列	变量	变量说明
* 问题的数据卡1 (20A4)		问题名称卡
1-80	题目	为了对输出加以标记，应输入问题的名称，每一个问题应该有一个题目。
* 问题的数据卡2(16I5)		正确判断每一个输入。
1-5	NPRNT	打印单元或总矩阵指令：NPRNT = 0 时不打印，NPRNT = 1时只打印单元矩阵，NPRNT = 2时只打印总矩阵。
6-10	IELEM	单元类型：IELEM = 0时为梁单元，IELEM = 1,2 或 3 时，分别为线性、二次或三次杆单元。
11-15	NPE	每个单元的节点：NPE = 2 为梁单元节点，NPE = IELEM + 1为杆单元节点。
16-20	NDF	每个节点的自由度（初始未知数）数目：IELEM = 0时NDF = 2，否则为1。
21-25	NEM	网格中的单元数目。
26-30	NBDY	梁模型中规定初始自由度的数目，第N个总节点有N * (NDF - 1) + 1 和 N * (NDF - 1) + 2个自由度。
31-35	NBF	只包含非零力的模型中规定的次生自由度的数目。
36-40	ICONT	数据（系数AX、BX、CX、F及网格信息）连续性指令：如果AX、BX、CX和F是连续函数，且网格全部为均匀的时，ICONT = 1；否则ICONT = 0，这时，单元和数据后面再读。
41-45	ITEM	瞬时问题的指令：ITEM = 0为稳定状态或静定的，ITEM = 1为一次时间导数的瞬时分析，ITEM = 2 为二次时间导数的瞬时

分析。

46-50 NTIME 时间间隔数目。

* 问题的数据卡3(8F10.4) 一个卡上两个读数。

  1-10 AL 域长。

  11-20 XO 第一个节点的坐标。

* 问题的数据卡4(8F10.4) * * * 如果ICONT = 0则省略 * * * 读微分方程式 $-(AX\cdot U')'+(BX\cdot U'')''+CX\cdot U=F$的系数，直到线性函数被采用为止。

  1-10, 11-20 AX0, AX1 AX的系数：AX = AX0 + AX1 * X

  21-30, 31-40 BX0, BX1 BX的系数：BX = BX0 + BX1 * X

  41-50, 51-60 CX0, CX1 CX的系数：CX = CX0 + CX1 * X

  61-70, 71-80 F0, F1 F的系数：F = F0 + F1 * X

* 问题的数据卡5 * * * 如果IEFM = 0则省略 * * *

  1-10,11-20 ALFA,BETA 时间积分图的参数：当ITEM = 1时ALFA = THETA(BETA不需要,赋零)，ITEM = 2时赋NEWMARK图的ALFA和BETA值。

  21-30 DT 瞬时问题的时间间隔

  31-40 C0 方程式中时间导数的系数值。

* 问题的数据卡6(16I5) * * * 如果NBDY = 0则输零 * * *

  1-80 IBDY(I) 规定初始自由度的数组，每张卡片为16。

* 问题的数据卡7(8F10.4) * * * 如果NBDY = 0输零 * * *

  1-80 VBDY (I) IBDY中规定自由度的值的数组（应与IBDY中输入的数有相同的次），每张卡片8个输入数。

* 问题的数据卡8(16I5) * * * 如果NBF = 0则略去 * * *

  1-80 IBF(I) 规定非零次生自由度的数组

* 问题的数据卡9(8F10.4) * * * 略去NBF = 0 * * *

  1-80 VBF(I) 数组IBF中输入值的数组。

* * * 注意：如果ICONT = 0和ITEM = 0则略去其余数据卡 * * *

* 问题的数据卡10(8F10.4) * * * 如果ITEM = 0则略去 * * *

  1-80 GFO U的初始条件。

* 问题的数据卡11(8F10.4)　　* * * 如果ITEM = 0则略去 * * *

1-80　GF1　　$U^* = DU/DT$的初始条件

* 问题的数据卡12(8F10.4)　　* * * 如果ITEM = 0则略去 * * *

1-80　GF2　　DU^*/DT的初始条件

注意：下面的卡片在各单元编号的DO循环中都被读。因此，对每个单元都应读数据卡13和14。

* 问题的数据卡13(8F10.4)　　* * * 如果ICONT = 1则略去 * * *

1-80　ELX(I)　　单元节点总坐标的数组

* 问题的数据卡14(8F10.4)　　* * * 如果ICONT = 1则略去 * * *

1-80　COEF(I, J)　　每个单元的系数AX、BX、CX和FX，见有关变量说明

例3.10 （例3.1：两端固定的缆索的横向挠度）。

采用例3.1中的有限元网格和数据，求得

单元类型　$IELEM = 1$　$NPE = 2$　$NDF = 1$　$NEM = 4$

因为指望找一个静力稳定(即平衡)解，故设

$ITEM = 0$　　$NTIME = 0$

对问题起控制作用的微分方程式为式(3.1)。因此，对域(0, 1)中所有的x有

$a = 1 + x$　(AX0 = 1, AX1 = 1)　$b = c = 0$

$f = 1 + 4x$(F0 = 1, F1 = 4)

因为对所有单元的数据都相同，所以$ICONT = 1$。

问题的边界条件是$u(0) = u(1) = 0(U_1 = U_5 = 0)$，在此例中没有规定的非零力。因此，有

NBF = 0　NBDY = 2　IBDY(1) = 1　IBDY(2) = 5

VBDY(1) = 0.0　VBDY(2) = 0,0

该问题Fortran形式的数据概括如下。

```
TRANSVERSE DEFLECTION OF A CABLE FIXED AT BOTH ENDS (SEE EXAMPLE 3.1)
  2    1    2    1    4    2    0    1    0    0
1.0       0.0
1.0       1.0       0.0       0.0       0.0       0.0       1.0       4.0
  1    5
0.0       0.0
```

程序的输出列在表3.11中。

表3.11 例3.10的计算机输出

```
*** S E C O N D - O R D E R P R O B L E M S ***
TRANSVERSE DEFLECTION OF A CABLE FIXED AT BOTH ENDS (SEE EXAMPLE 3.1)

     NO. OF ELEMENTS IN THE MESH ........ =    4
     NO. OF NODES IN THE MESH ............ =    5
     NO. OF DEC. OF FREEDOM PER NODE ... -    1

     FEM MESH AND COEFFICIENTS (AX0,AX1,ETC.) FOLLOW:
          0.0             0.25000D+00   0.50000D+00   0.75000D+00   0.10000D+01
          0.10000D+01     0.10000D+01   0.0           0.0           0.0           0.0
          0.10000D+01     0.40000D+01
ELEMENT MATRICES :
      0.45000D+01     -0.45000D+01
     -0.45000D+01      0.45000D+01
      0.16667D+00      0.20833D+00

SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:

    1       5

VALUES OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:

 0.0          0.0

SPECIFIED NONZERO SECONDARY DEGREES OF FREEDOM :

    0
VALUES OF THE SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF FREEDOM :
 0.0
S O L U T I O N :
    0.0              0.18750D+00        0.25000D+00    0.18750D+00    0.0
```

续表

x	DISPL.	1ST DERIV.	2ND DERIV.
0.0	0.0	0.75000D+00	
0.31250D-01	0.23437D-01	0.75000D+00	
0.62500D-01	0.46875D-01	0.75000D+00	
0.93750D-01	0.70312D-01	0.75000D+00	
0.12500D+00	0.93750D-01	0.75000D+00	
0.15625D+00	0.11719D+00	0.75000D+00	
0.18750D+00	0.14062D+00	0.75000D+00	
0.21875D+00	0.16406D+00	0.75000D+00	
0.25000D+00	0.18750D+00	0.75000D+00	
0.25000D+00	0.18750D+00	0.25000D+00	
0.28125D+00	0.19531D+00	0.25000D+00	
0.31250D+00	0.20312D+00	0.25000D+00	
0.34375D+00	0.21094D+00	0.25000D+00	
0.37500D+00	0.21875D+00	0.25000D+00	
0.40625D+00	0.22656D+00	0.25000D+00	
0.43750D+00	0.23437D+00	0.25000D+00	
0.46875D+00	0.24219D+00	0.25000D+00	
0.50000D+00	0.25000D+00	0.25000D+00	
0.50000D+00	0.25000D+00	-0.25000D+00	
0.53125D+00	0.24219D+00	-0.25000D+00	
0.56250D+00	0.23437D+00	-0.25000D+00	
0.59375D+00	0.22656D+00	-0.25000D+00	
0.62500D+00	0.21875D+00	-0.25000D+00	
0.65625D+00	0.21094D+00	-0.25000D+00	
0.68750D+00	0.20312D+00	-0.25000D+00	
0.71875D+00	0.19531D+00	-0.25000D+00	
0.75000D+00	0.18750D+00	-0.25000D+00	
0.75000D+00	0.18750D+00	-0.75000D+00	
0.78125D+00	0.16406D+00	-0.75000D+00	
0.81250D+00	0.14062D+00	-0.75000D+00	
0.84375D+00	0.11719D+00	-0.75000D+00	
0.87500D+00	0.93750D-01	-0.75000D+00	
0.90625D+00	0.70312D-01	-0.75000D+00	
0.93750D+00	0.46875D-01	-0.75000D+00	
0.96875D+00	0.23437D-01	-0.75000D+00	
0.10000D+01	0.0	-0.75000D+00	

例3.11 （例3.3，非连续加载梁的弯曲） 问题的控制方程式为式（3.86），式中，b和f由式（3.87）给出（注意，方程式(3.86)中的f等于程序中的$-f$）。对于例3.3中考虑的有限元网格和数据有

IELEM = 0　NPE = 2　NDF = 2　NEM = 3　ICONT = 0

ITEM = NTIME = 0　NBDY = 3　IBDY(1) = 1　IBDY(2) = 7

IBDY(3) = 8　VBDY(I) = 0.0，$I = 1,2,3$　NBF = 1　IBF(1) = 5

VBF(1) = −10000.0　AL = 28.0　X0 = 0.0

每个单元的单元坐标和数据为：

$x_1^{(1)} = 0.0$　$x_2^{(1)} = 10.0$　[ELX(1) = 0.0, ELX(2) = 10.0]

$b = 2(10^7)$　$f = -2400$　$a = c = 0.0$

单元2

$$x_1^{(2)} = 10.0 \quad x_2^{(2)} = 22.0$$

$$b = 1(10^7) \quad a = c = f = 0.0$$

单元3

$$x_1^{(3)} = 22.0 \quad x_2^{(3)} = 28.0$$

$$b = 1(10^7) \quad a = c = f = 0.0$$

数据的Fortran格式如下。

```
BENDING OF DISCONTINUOUSLY LOADED BEAM (SEE EXAMPLE 3.3)
     2     0     2     2     3     3     1     0     0     0
28.0         0.0
     1     7     8
0.0          0.0          0.0
     5
-10000.0
0.0          10.0
0.0          0.0          2.0          0.0          0.0          0.0          -2400.0          0.0
10.0         22.0
0.0          0.0          1.0          0.0          0.0          0.0          0.0          0.0
22.0         28.0
0.0          0.0          1.0          0.0          0.0          0.0          0.0          0.0
```

问题的输出列在表3.12中。

表3.12 例3.11的输出

```
*** F O U R T H - O R D E R  P R O B L E M S ***
BENDING OF DISCONTINUOUSLY LOADED BEAM (SEE EXAMPLE 3.3)
        NO. OF ELEMENTS IN THE MESH ......... =    3
        NO. OF NODES IN THE MESH ............ =    4
        NO. OF DEG. OF FREEDOM PER NODE ... =    2
        FEM MESH AND COEFFICIENTS (AX0.AX1,ETC.) FOLLOW :

            1    0.0            0.1000D+02
            0.0            0.0            0.20000D+01    0.0          0.0          0.0
            -0.24000D+04   0.0
```

续表

```
ELEMENT MATRICES :
      0.24000D-01   -0.12000D+00   -0.24000D-01   -0.12000D+00
     -0.12000D+00    0.80000D+00    0.12000D+00    0.40000D+00
     -0.24000D-01    0.12000D+00    0.24000D-01    0.12000D+00
     -0.12000D+00    0.40000D+00    0.12000D+00    0.80000D+00
     -0.12000D+05    0.20000D+05   -0.12000D+05   -0.20000D+05

      2   0.1000D+02   0.2200D+02
      0.0           0.0           0.10000D+01   0.0           0.0           0.0
      0.0           0.0

      3   0.2200D+02   0.2800D+02
      0.0           0.0           0.10000D+01   0.0           0.0           0.0
      0.0           0.0
SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM :
      1      7      8
VALUES OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:
    0.0           0.0           0.0
SPECIFIED NONZERO SECONDARY DEGREES OF FREEDOM :
      5
VALUES OF THE SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF FREEDOM :
  -0.100D+05
S O L U T I O N :
      0.0           0.38555D+06   -0.28084D+07   0.12142D+06   -0.11033D+07   -0.27517D+06
      0.0           0.0
       X            DISPL.         1ST DERIV.     2ND DERIV.
    0.0             0.0           -0.38555D+06    0.10000D+05
    0.12500D+01    -0.47306D+06   -0.37049D+06    0.14103D+05
    0.25000D+01    -0.92409D+06   -0.35030D+06    0.18207D+05
```

续表

0.37500D+01	-0.13467D+07	-0.32497D+06	0.22310D+05
0.50000D+01	-0.17344D+07	-0.29452D+06	0.26414D+05
0.62500D+01	-0.20808D+07	-0.25894D+06	0.30517D+05
0.75000D+01	-0.23798D+07	-0.21823D+06	0.34621D+05
0.87500D+01	-0.26242D+07	-0.17239D+06	0.38724D+05
0.10000D+02	-0.28084D+07	-0.12142D+06	0.42828D+05
0.10000D+02	-0.28084D+07	-0.12142D+06	0.65655D+05
0.11500D+02	-0.29197D+07	-0.29046D+05	0.57504D+05
0.13000D+02	-0.29017D+07	0.51096D+05	0.49352D+05
0.14500D+02	-0.27726D+07	0.11901D+06	0.41200D+05
0.16000D+02	-0.25507D+07	0.17470D+06	0.33049D+05
0.17500D+02	-0.22546D+07	0.21816D+06	0.24897D+05
0.19000D+02	-0.19024D+07	0.24939D+06	0.16745D+05
0.20500D+02	-0.15125D+07	0.26839D+06	0.85936D+04
0.22000D+02	-0.11033D+07	0.27517D+06	0.44192D+03
0.22000D+02	-0.11033D+07	0.27517D+06	0.44192D+03
0.22750D+02	-0.89791D+06	0.27116D+06	-0.11134D+05
0.23500D+02	-0.69876D+06	0.25847D+06	-0.22710D+05
0.24250D+02	-0.51238D+06	0.23709D+06	-0.34286D+05
0.25000D+02	-0.34529D+06	0.20704D+06	-0.45861D+05
0.25750D+02	-0.20399D+06	0.16830D+06	-0.57437D+05
0.26500D+02	-0.95004D+05	0.12088D+06	-0.69013D+05
0.27250D+02	-0.24836D+05	0.64783D+05	-0.80589D+05
0.28000D+02	0.0	0.0	-0.92165D+05

例3.12 （例3.6：叶片的瞬时热传导） 由例3.6有（对二次单元的两个单元网格）

IELEM = 2　NPE = 3　NDF = 1　NEM = 2　NBDY = 1

IBDY(1) = 1　VBDY(1) = 0,0　IVBF = 0

ICONT = 0（由于非均匀网格）

ITEM = 1（带一次时间导数的瞬时分析）

NTIME = 16（时间间隔数） DT = 0.025　AL = 10

X0 = 0.0　ALFA(theta) = 0.5　C0 = 1

GF0(I) = 1.0　I = 1,2,…,5（初始条件）

GF1(I) = GF2(I) = 0.0（问题中不要求，但应读）

单元 1

$x_1^{(1)} = 0.0$　$x_2^{(1)} = 0.2$　$x_3^{(1)} = 0.5$

$a = 1.0$　$b = c = f = 0.0$

单元 2

$x_1^{(2)} = 0.5$　$x_2^{(2)} = 0.75$　$x_3^{(2)} = 1.0$

$a = 1.0$　$b = c = f = 0.0$

输入数据的Fortran格式如下。

```
TRANSIENT HEAT CONDUCTION IN A FIN (SEE EXAMPLE 3.6)
   2     2     3     1     2     1     0     0     1    16
1.0        0.0
0.5        1.0        0.025      1.0
   1
0.0
1.0        1.0        1.0        1.0        1.0
0.0        0.0        0.0        0.0        0.0
0.0        0.0        0.0        0.0        0.0
0.0        0.2        0.5
1.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0
0.5        0.75       1.0
1.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0
```

程序的输出列在表3.13中。

表3.13 例3.12编辑的计算机输出

```
*** S E C O N D - O R D E R   P R O B L E M S ***
TRANSIENT HEAT CONDUCTION IN A FIN (SEE EXAMPLE 3.6)
      TIME-DEPENDENT (TRANSIENT) ANALYSIS
      ALFA =  0.5000D+00  BETA =  0.1000D+01  TIME INCREMENT =  0.2500D-01  C9 =  0.1000D+01

      NO. OF ELEMENTS IN THE MESH ......... =    2
      NO. OF NODES IN THE MESH ............ =    5
      NO. OF DEG. OF FREEDOM PER NODE ... =    1
```

续表

```
FEM MESH AND COEFFICIENTS (AX0,AX1,ETC.) FOLLOW :

TIME=  0.25000D-01

 1   0.0              0.2000D+00   0.5000D+00
 0.10000D+01   0.0          0.0          0.0          0.0          0.0
 0.0           0.0
 2   0.5000D+00  0.7500D+00   0.1000D+01
 0.10000D+01   0.0          0.0          0.0          0.0          0.0
 0.0           0.0
SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:
    1
VALUES OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:
 0.0
SPECIFIED NONZERO SECONDARY DEGREES OF FREEDOM :
    0
VALUES OF THE SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF FREEDOM :
 0.0
GLOBAL MATRICES :
   0.12500D+00   -0.33333D-01   -0.83333D-02
   0.40000D+00   -0.33333D-01    0.0
   0.25000D+00   -0.33333D-01   -0.83333D-02
   0.40000D+00   -0.33333D-01    0.0
```

续表

```
        0.12500D+00      0.0              0.0
        0.83333D-01      0.33333D+00      0.16667D+00      0.33333D+00      0.83333D-01
 S O L U T I O N :
        0.0              0.91286D+00      0.95436D+00      0.99585D+00      0.99585D+00
       -0.20000D+02     -0.17427D+01     -0.91286D+00     -0.82988D-01     -0.82988D-01
 (STRESS CALCULATIONS ARE ELIMINATED IN THIS OUTPUT)
      TIME =    0.50000D-01
 S O L U T I O N :
        0.0              0.62415D+00      0.97528D+00      0.98408D+00      0.99964D+00
       -0.10000D+02     -0.86285D+01     -0.20156D-01     -0.25827D+00      0.52935D-01
```

例3.13 （例3.7:固端梁的瞬时反应） 由例3.7的讨论有（对半跨梁模型）

IELEM = 0　NPE = 2　NDF = 2　NEM = 4　NBDY = 3

NBF = 0　ICONT = 1（均匀网格和连续数据）

ITEM = 2　（具有二次时间导数的瞬时分析）

NTIME = 20　AL = 0.5　X0 = 0.0　$a = 0.0$　$b = 1.0$

$c = f = 0.0$

ALFA = 0.5　BETA = 0.25　DT = 0.0025　C0 = 1.0

IBDY(1) = 1　IBDY(2) = 2　IBDY(3) = 10

$(U_1 = U_2 = U_{10} = 0.0)$

VBDY(I) = 0.0, I = 1,2,3

GF0(1)(= $w(0)$) = 0.0

GF0(2)(= $\theta(0)$) = 0.0

GF0(3)(= $w(0.125)$) = −0.0391

GF0(4)(= $\theta(0.125)$) = 0.5463, etc.

$$\left.\begin{aligned} w &= -\sin\pi x + \pi x(1-x) \\ \theta &= \pi\cos\pi x - x(1-2x) \end{aligned}\right\}$$

GF1(I) = GF2(I) = 0.0, I = 1,2,…,10($\dot{w} = \dot{\theta} = 0.0$)

GF2(I) 在程序中不采用，但是在时间为 0 时它由已知的GF1(I)产生。输入程序中的数据的Fortran格式如下。

```
TRANSIENT RESPONSE OF A CLAMPED BEAM (SEE EXAMPLE 3.7)
  1     0     2     2     4     3     0     1     2     20
 0.5        0.0
 0.0        0.0       1.0             0.0       0.0         0.0       0.0       0.0
 0.5        0.25      0.0025    1.0
  1     2     10
 0.0        0.0       0.0
 0.0        0.0       0.0391          0.5463   -0.1181      0.6506   -0.1876    0.4168
-0.2146     0.0
 0.0        0.0       0.0             0.0       0.0         0.0       0.0       0.0
 0.0        0.0
 0.0        0.0       0.0             0.0       0.0         0.0       0.0       0.0
 0.0        0.0
```

程序的输出(为本书编辑的)列在表3.14中。

表3.14 例3.13编辑的计算机输出

```
*** F O U R T H - O R D E R   P R O B L E M S ***
TRANSIENT RESPONSE OF A CLAMPED BEAM (SEE FXAMPLE 3.7)
      TIME-DEPENDENT (TRANSIENT) ANALYSIS
      ALFA =  0.5000D+00  BETA -  0.2500D+00  TIME INCREMENT -  0.2500D  02  C0 =  0.1000D+01
      NO. OF ELEMENTS IN THE MESH ......... =    4
      NO. OF NODES IN THE MESH ............ =    5
      NO. OF DEG. OF FREEDOM PER NODE ... -    2
      FEM MESH AND COEFFICIENTS (AX0.AX1.ETC.) FOLLOW :
```

续表

```
0.0        0.12500D+00   0.25000D+00   0.37500D+00   0.50000D+00
0.0        0.0           0.10000D+01   0.0           0.0           0.0
0.0        0.0
```

```
ELEMENT MATRICES :
  0.46429D-01   -0.81845D-03    0.16071D-01    0.48363D-03
 -0.81845D-03    0.18601D-04   -0.48363D-03   -0.13951D-04
  0.16071D-01   -0.48363D-03    0.46429D-01    0.81845D-03
  0.48363D-03   -0.13951D-04    0.81845D-03    0.18601D-04
 -0.30451D+02    0.62736D+01    0.30451D+02   -0.24672D+01
SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:
    1    2   10
VALUES OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:
 0.0        0.0        0.0
SPECIFIED NONZERO SECONDARY DEGREES OF FREEDOM:
  0
VALUES OF THE SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF FREEDOM:
 0.0
TIME =    0.25000D-02
SOLUTION :
  0.0            0.0           -0.38983D-01    0.54565D+00   -0.11788D+00    0.65002D+00
 -0.18731D+00    0.41613D+00   -0.21431D+00    0.0
  0.0            0.0            0.93979D-01    0.51826D+00    0.17410D+00   -0.46645D+00
```

```
        0.22872D+00   -0.53898D+00    0.23514D+00    0.0
        0.0            0.0            0.37750D+02   -0.79060D+03    0.63608D+02   -0.35812D+03
        0.89590D+02    0.20434D+03    0.10134D+03    0.0
       (STRESS CALCULATIONS ARE NOT INCLUDED IN THIS OUTPUT)
      TIME=    0.50000D-02
SOLUTION:
        0.0            0.0           -0.38648D-01    0.54224D+00   -0.11724D+00    0.64801D+00
       -0.18647D+00    0.41516D+00   -0.21340D+00    0.0
        0.0            0.0            0.17334D+00   -0.22095D+01    0.34236D+00   -0.11391D+01
        0.45044D+00   -0.23778D+00    0.48803D+00    0.0
        0.0            0.0            0.25740D+02   -0.58240D+03    0.70998D+02   -0.17998D+03
        0.87786D+02    0.35619D+02    0.10097D+03    0.0
TIME=   0.10000D-01
SOLUTION:
        0.0            0.0           -0.37527D-01    0.52856D+00   -0.11450D+00    0.63935D+00
       -0.18310D+00    0.41106D+00   -0.20976D+00    0.0
        0.0            0.0            0.27197D+00   -0.34308D+01    0.70090D+00   -0.26011D+01
        0.89983D+00   -0.11361D+01    0.96758D+00    0.0
        0.0            0.0            0.20612D+02   -0.83069D+03    0.55704D+02   -0.61909D+03
        0.93177D+02    0.45732D+03    0.10147D+03    0.0
        X           DISPL.        1ST DERIV.     2ND DERIV.
        0.0            0.0            0.0           -0.59534D+01
```

续表

0.15625D-01	-0.70919D-03	-0.82653D-01	-0.55222D+01
0.31250D-01	-0.27666D-02	-0.17257D+00	-0.50910D+01
0.46875D-01	-0.60669D-02	-0.24875D+00	-0.46597D+01
0.62500D-01	-0.10505D-01	-0.31818D+00	-0.42285D+01
0.78125D-01	-0.15975D-01	-0.38089D+00	-0.37973D+01
0.93750D-01	-0.22372D-01	-0.43635D+00	-0.33660D+01
0.10938D+00	-0.29591D-01	-0.48607D+00	-0.29348D+01
0.12500D+00	-0.37527D-01	-0.52856D+00	-0.25036D+01
0.12500D+00	-0.37527D-01	-0.52856D+00	-0.24543D+01
0.14063D+00	-0.46069D-01	-0.56385D+00	-0.20623D+01
0.15625D+00	-0.55115D-01	-0.59301D+00	-0.16703D+01
0.17188D+00	-0.64569D-01	-0.61604D+00	-0.12783D+01
0.18750D+00	-0.74335D-01	-0.63296D+00	-0.88623D+00
0.20313D+00	-0.84317D-01	-0.64374D+00	-0.49426D+00
0.21875D+00	-0.94420D-01	-0.64840D+00	-0.10224D+00
0.23438D+00	-0.10455D+00	-0.64694D+00	0.28977D+00
0.25000D+00	-0.11460D+00	-0.63935D+00	0.68179D+00
0.25000D+00	-0.11460D+00	-0.63935D+00	0.73471D+00
0.26563D+00	-0.12449D+00	-0.62573D+00	0.10076D+01
0.28125D+00	-0.13414D+00	-0.60786D+00	0.12805D+01
0.29688D+00	-0.14347D+00	-0.58572D+00	0.15534D+01
0.31250D+00	-0.15242D+00	-0.55932D+00	0.18263D+01
0.32813D+00	-0.16092D+00	-0.52865D+00	0.20991D+01

续表

0.34375D+00	-0.16892D+00	-0.49372D+00	0.23725D+01
0.35938D+00	-0.17633D+00	-0.45452D+00	0.26449D+01
0.37500D+00	-0.18310D+00	-0.41106D+00	0.29178D+01
0.37500D+00	-0.18310D+00	-0.41106D+00	0.29143D+01
0.39063D+00	-0.18916D+00	-0.36480D+00	0.30078D+01
0.40625D+00	-0.19449D+00	-0.31707D+00	0.31014D+01
0.42188D+00	-0.19906D+00	-0.26788D+00	0.31950D+01
0.43750D+00	-0.20285D+00	-0.21723D+00	0.32885D+01
0.45313D+00	-0.20584D+00	-0.16511D+00	0.33821D+01
0.46875D+00	-0.20801D+00	-0.11154D+00	0.34756D+01
0.48438D+00	-0.20932D+00	-0.56499D-01	0.35692D+01
0.50000D+00	-0.20976D+00	0.0	0.36627D+01

这便完成了所述问题的讨论。读者可以采用程序FEM1D 解下面的部分习题。

习 题

3.71 推导三个节点的单元在自然坐标系中的二次插值函数，内节点距离左端节点为S。

3.72 将方程式（3.97）中的Hermite三次多项式按自然坐标改写。

3.73 将习题3.52的插值函数按自然坐标改写。

3.74 考虑一个三个节点的单元（等距节点）。假定插值函数的形式为

$$\psi_i = \sin[\pi(a_i + b_i\xi + c_i\xi^2)],$$

求最低次多项式ψ_i，使其满足下列插值要求：

$$\psi_i(\xi_i) = \delta_{ij} \qquad \xi_1 = 1 \qquad \xi_2 = 0 \qquad \xi_3 = 1$$

讨论这类单元的单元矩阵数值计算问题。

3.75 有限元近似性的误差通常用与所考虑问题的能量进行度量，对于方程式（3.1）所考虑的二次问题，其能量用泛函I表示：

$$I = \sum_{e=1}^{N} I_e(u_e) \tag{a}$$

式中，N是有限元网格中单元的总数，I_e是方程式（3.5）中给定的泛函。解的误差定义为真实解或精确解u_0与有限元解u_h之差：

$$E = u_0 - u_h \tag{b}$$

能量误差定义为

$$\|E\|_1 \equiv \sum_{e=1}^{N} I_e(E) \tag{c}$$

如果有限元的近似解u_h是真实解u_0的插值，当(a) u_h是线性插值和(b)u_h是二次插值时，求解的误差和方程式（3.1）中能量。（提示：采用本章末尾有关的参考文献求网格参数（间距）h的插值误差，并采用方程式（c）的结果求能量$\|E\|_1 = c_0 h^p$的误差，式中，C_0和p是常数；P为给定的收敛率（$p>0$）或发散率($p<0$)。

在习题3.76—3.80中，采用线性变换（3.176）以及（a）Newton—Cotes积分公式（b）Gauss—Legendre积分计算矩阵系数。采用合适的积分点数，将所得结果与精确积分结果进行比较。

3.76

$$K_{12} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} (1+x) \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} dx$$

$$G_{12} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} (1+x) \psi_1 \psi_2 dx$$

式中，ψ_i是线性Lagrange插值函数。

3.77 当ψ_i为二次插值函数时，重解习题3.76。

3.78

$$K_{11} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)^2 dx$$

$$G_{11} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\psi_1)^2 dx$$

式中，ψ_i是方程式（3.97）中Hermite三次函数（见习题3.72）。

3.79 当插值函数为习题 3.73 的 五 次 Hermite 多项式时，重解习题 3.78。

3.80

$$K_{11} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)^2 dx$$

式中，$\psi_1 = \sin[\pi(\xi + 3\xi^2)/4]$。采用三点和五点Gauss求积法计算$K_{11}$。

3.81 采用二次插值函数解例3.1中的问题。采用一个单元和两个单元的网格，将所得结果与例3.1结果进行比较。

3.82 对下列边界条件修改有限元方程式（3.58）：

(a) $u(0) =$ $\left(u + a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1} = \beta,$

(b) $\left(u + a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0} = \alpha$ $\left(u + a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1} = \beta$

包含计算机程序的练习

3.83 编写子程序PREPRO，用以读和形成解一般二次方程式（3.1）的数据。要求调试此程序，以保证逻辑上无错误。

3.84 编写子程序SHAPE2，使得当ψ_i为习题3.52中的Hermite五次多项式时，用以计算ψ_i、$d\psi_i/dx$和$d^2\psi_i/dx^2$，以及对已知的Gauss点计算Jacobi变换。

3.85 编写（或修改）子程序STRESS，用以计算长圆柱体轴对称热流

（习题3.31）的次变量（即热流应力）以及轴对称的弹性变形(习题3.32)。

3.86 修改（或自己编写）附录I中给出的程序FEM1D，以便包含前面习题中的子程序PREPRO和SHAPE1。

3.87 编写一个计算机程序（或改写FEM1D），用以分析当采用习题3.52中讨论的高次单元时的梁的问题。

3.88 提供计算机程序FRAME，以便当采用3-3节讨论的框架单元时对框架进行分析。注意，可以用改写子程序STIFF和增加一个子程序TRANS(为了将单元矩阵从局部坐标变换成总的坐标)的方法修改FEM1D。

3.89 修改子程序STIFF，以便包括梁弯曲问题的罚有限元模型。不要忘记采用对罚项降阶的积分（见Reddy(1982))。

3.90 修改FEM1D中的主程序，以便计及热传导问题中对流的边界条件（见例3.2以及习题3.10和3.31）。

采用程序FEM1D或你自己的计算机程序分析下列习题以及习题3.61—3.69。

3.91 采用2，4和6个线性单元解例3.1中的问题。

3.92 采用二次单元解习题3.91。

3.93 采用4个线性单元解习题3.10的热传导问题。

3.94 采用6个线性单元（非均匀网格）解习题3.16无侧限的蓄水层问题。

3.95 采用4个单元解习题3.17的一维流问题。

3.96 采用(a)4个和6个单元的（非均匀）线性单元网格和（b）相等的二次单元网格，解习题3.29的Couette流问题。

3.97 采用6个线性单元解长圆柱体径向轴对称热流的问题。

3.98 采用(a) 4个线性单元和（b）2个二次单元解圆形圆柱体的轴对称变形问题（习题3.32)。

3.99—3.110 采用最小数目的Hermite三次单元解习题3.35～3.46的梁的问题。

3.111—3.112 在半域中采用(a)4个线性单元和(b) 2个二次单元解固定边界条件及简支边界条件下圆板的轴对称弯曲问题。

参 考 文 献

流体力学参考文献

Duncan, W. J., A. S. Thom, and A. D. Young: *Mechanics of Fluids*, 2d ed., American Elsevier, New York (1970).

deVries, G., and D. H. Norrie, "The Application of the Finite-Element Technique to Potential Flow Problems," *Trans ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics*, 38, pp. 798—802 (1971).

Harr, M. E.: *Ground Water and Seepage*, McGraw-Hill, New York (1962).

Shames, I. H.: *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, New York (1962).

Vallentine, H. R.: *Applied Hydrodynamics*, Butterworths, London (1959).

热传导参考文献

Kreith, F.: *Principles of Heat Transfer*, 3d ed., Harper & Row, New York (1973).

Myers, G. E.: *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1971).

Nagotov, E. P.: *Applications of Numerical Methods to Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1978).

弹性理论(固体力学)参考文献

Boresi, A. P., and P. P. Lynn: *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1974).

Dym, C. L., and I. H. Shames: *Solid Mechanics: A Variational Approach*, McGraw-Hill, New York (1973).

Timoshenko, S. P., and J. N. Goodier: *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York (1970).

变分法参考文献(亦见第二章附加阅读参考文献)

Crandall, S. H.: *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, New York (1956).

Finlayson, B. A.: *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York

(1972).

Lynn, P.P., and S. K. Arya: "Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6, pp. 75—83 (1973).

Reddy, J.N.: "Some Computational Aspects of Mixed Finite-Element Approximations," *Proceedings of the 12th Annual Meeting of the Society of Engineering Science*, The University of Texas, Austin, pp. 965—980(1975).

Reddy, J. N., and M. L. Rasmussen: *Advanced Engineering Analysis*, John Wiley, New York (1982).

罚函数法参考文献

Courant, R.:"Variational Methods for the Solution of Equilibrium and Vibrations, "*Bulletin of the American Mathematical Society*, 49, pp.1-23(1943).

Fiacco, A.V.,and G.P.McCormick: *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Methods for Solving Constrained Minimization Techniques*, John Wiley,NeW York (1975) (history of the penalty-function method).

Reddy,J.N.(ed.): *Penalty-Finite Element Methods in Mechanics*, AMD-vol. 51, The American Society of Mechanical Engineers,345 East 47th St.,New York (1982).

Reddy, J.N.: "On Penalty Function Methods in the Finite-Element Analysis of Flow Problems," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*,2,pp.110-120(1982).

其他参考文献

Carnahan, B.,H.A.Luther, and J.O. Wilkes: *Applied Numerical Methods*, John Wiley, New York (1969) (interpolation and numerical integration).

Conte, S.D.: *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York (1965) (numerical integration).

Harris, C.M., and C.E.Crede: *Shock and Vibration Handbook*, vol.1, McGraw-Hill, New York (1961).

Martin, H. C., *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York (1966) (frame-element applications).

第四章　二维问题的有限元分析

4-1　概述

二维问题有限元分析包含的基本步骤，与第三章中所述的一维问题有限元的分析步骤一样。二维问题因为要用偏微分方程来描述，分析来得复杂一些。二维域Ω的边界Γ通常是曲线。因此，有限单元是一简单的二维几何图形，该图形能用于对一个已知的二维域近似描述。换句话说，在二维问题中，我们不仅要寻求一个已知的偏微分方程式的近似解，而且还要用一适当的有限元网格来近似已知的域。所以，在二维问题的有限元分析中，将会出现近似误差（由于解的近似），以及离散误差（由于域的离散性）。有限元网格（离散化）由简单的二维单元组成，例如三角形、矩形和四边形单元，它们彼此在单元边界的结点处相联。用有限单元的集合能表示不规则几何图形的域，它为解决出现在各种工程领域中的边界值问题，提供了一个很有实用价值的方法。

本章的目的是将前面讨论一维问题的基本步骤推广到二维问题。我们重新从用二次偏微分方程式来描述问题的讨论开始。我们将研究二次方程式的两种形式：（1）方程式包含一个因变未知量u，它是在Ω中位置的标量函数；（2）方程式包含一个因变未知量$u=(u_1, u_2)$，它是在Ω中位置的矢量函数。u的分量u_1和u_2用一对偏微分方程式来表示，通常成对出现。第一种形式方程式出现在各类物理现象的数学描述之中，例如热的传递、渗流，薄膜的横向挠曲，以及圆柱形构件的扭转（见表2.2）。第二种形式的方

程式出现在平面弹性问题的描述（u表示位移的矢量）和在不可压缩的流体问题（u表示速度的矢量）之中。出现在弹性平板的弯曲方面和出现在不可压缩流体流量函数公式中的四次偏微分方程式的讨论在这本概论性的书中不予考虑。然而，我们将研究包含在一组二次方程式（见4-5-4）中解的平板弯曲的替换公式。

4-2 含有一个标量函数的二次方程式

4-2-1 标准方程式的描述

研究二次偏微分方程式

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+a_{00}u-f=0 \tag{4.1}$$

当已知a_{ij}（i，$j=1$，2），a_{00}和f的数值和特定边界条件时，其u值的求解问题。边界条件用变分公式来近似。作为特殊情况，假设$a_{11}=a_{22}=a$和$a_{12}=a_{21}=a_{00}=0$，从方程式（4.1）能得到Poisson方程式

$$-\nabla\cdot(a\nabla u)=f \quad 在\Omega中 \tag{4.2}$$

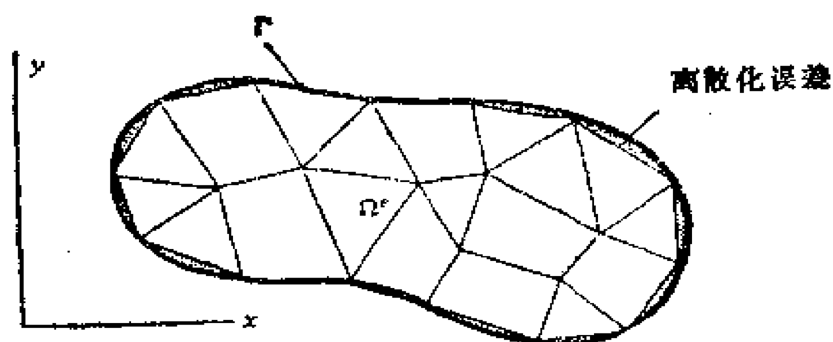
式中，∇是梯度算子。假设$\mathbf{i}$和$\mathbf{j}$分别代表x轴和y轴方向的单位矢量，梯度算子能表示如下（见2-1-4节）

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.3}$$

下面我们将讨论标准方程式(4.1)的变分公式和有限元公式。

4-2-2 变分公式

在二维问题中，有多种几何形状能用作有限单元（见图4.1）。我们很快将会看到，插值函数不仅取决于单元结点的数量，而且取决于单元的形状。在推导阶段，不必限制对任何特殊单元的讨论。我们假定Ω^e是有限元网格的典型单元，无论是三角形或是四边形，我们将建立方程式(4.1)的有限元模型。各种二维单元将在下节中讨论。



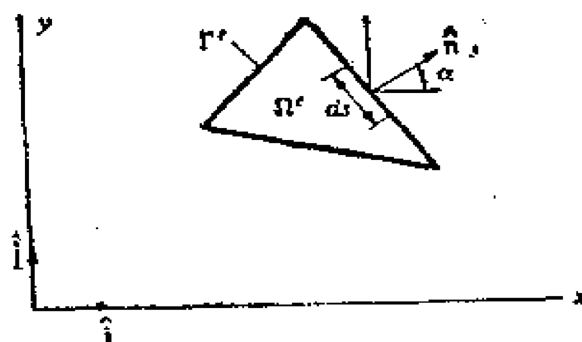


图4.1 不规则域的有限元离散化：(a) 用三角形和四边形单元将域离散；(b) 典型的三角形单元（边界Γ^e，单元边界上单位法线$\hat{\mathbf{n}}$）。

按照第二章的方法，我们来建立典型单元上方程(4.1)的变分形式。我们用试验函数v（假定对x和y是可微分的函数）乘方程式(4.1)，并沿单元域Ω^e积分：

$$0=\int_{\Omega^e} v\left[-\frac{\partial}{\partial x}(F_1)-\frac{\partial}{\partial y}(F_2)+a_{00}u-f\right]dxdy \tag{4.4}$$

式中

$$F_1=a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad F_2=a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}$$

为了分别对u和v进行同样的积分，我们用分部积分方法积分在方程式(4.4)中的前两项。首先注意到

$$-v\frac{\partial F_1}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}(vF_1)+\frac{\partial v}{\partial x}F_1 \tag{4.5}$$

$$-v\frac{\partial F_2}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}(vF_2)+\frac{\partial v}{y}F_2$$

然后利用方程式(2.19)中梯度（或散度）法则讨论下列分量形式

$$\int_{\Omega^e}\frac{\partial}{\partial x}(vF_1)dxdy=\oint_{\Gamma^e}vF_1n_xds \tag{4.6a}$$

$$\int_{\Omega^e}\frac{\partial}{\partial y}(vF_2)dxdy=\oint_{\Gamma^e}vF_2n_yds \tag{4.6b}$$

式中，n_x和n_y是在边界Γ^e上单位法线$\hat{\mathbf{n}}$的分量(即方向余弦)。ds是

$$\hat{\mathbf{n}}=n_x\mathbf{i}+n_y\mathbf{j}=\cos\alpha\mathbf{i}+\sin\alpha\mathbf{j} \tag{4.7}$$

沿边界(见图4.1b）无穷小微元的长度。在方程式(4.4)中使用方程式(4.5)和(4.6)，我们得到

$$\begin{aligned}0=\int_{\Omega^e}\Big[&\frac{\partial v}{\partial x}\Big(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial v}{\partial y}\Big(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\\&+a_{00}vu-vf\Big]dxdy-\oint_{\Gamma^e}v\Big[n_x\Big(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\\&+n_y\Big(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]ds\end{aligned} \tag{4.8}$$

观察方程式(4.8)各项，我们发现u的特性构成公式的基本边界条件(此处u是初始变量)，而

$$q_n\equiv n_x\Big(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+n_y\Big(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\Big) \tag{4.9}$$

的特性构成公式的基本边界条件（此处q_n是次变量)。函数$q_n=q_n(s)$表示沿单位法线$\hat{\mathbf{n}}$矢量$F=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}$的投影。当$a_{11}=a_{22}=a$和$a_{12}=a_{21}=0$时，$q_n$正好等于$a$和$u$对$\hat{\mathbf{n}}$方向导数的乘积。在大多数问题中，次变量$q_n$有物理意义。例如，在通过不均匀导体时热传导的情况（a_{ij}表示导体的传导率)中，q_n表示通过单元边界的热通量。

方程式(4.1)的变分形式用下式给出：

$$0=\int_{\Omega^e}\Big[\frac{\partial v}{\partial x}\Big(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial v}{\partial y}\Big(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)$$

$$+a_{00}vu-vf\Big]dxdy-\oint_{\Gamma^e}vq_n ds \qquad (4.10)$$

这变分方程式(4.10)成为方程式(4.1)有限元模型的基础。

4-2-3 有限元公式

方程式(4.10)的变分式表明：u的近似式在x和y上至少是双直线的，所以方程式(4.10)中的头两项和方程式(4.9)中的q_n是非零的。假设u用下述表达式来近似

$$u=\sum_{j=1}^{n}u_j\psi_j \qquad (4.11)$$

式中，u_j是在点(x_j, y_j)处的u值，ψ_j是线性插值函数，它具有下述性质

$$\psi_j(x_j, y_j)=\delta_{ij} \qquad (4.12)$$

在4-2-4节（亦见4-4节）中将对线性的三角形和矩形单元推导其ψ_i的具体形式。

用方程式(4.11)的u和v用ψ_i代入变分式(4.10)并以Ψ_i代v，我们得到

$$0=\sum_{j=1}^{n}\left\{\iint_{\Omega^e}\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)+a_{00}\psi_i\psi_j\right]dxdy\right\}u_j$$
$$-\int_{\Omega^e}f\psi_i dxdy-\oint_{\Gamma^e}\psi_i q_n ds \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

或

$$\sum_{j=1}^{n}K_{ij}^{(e)}u_j^{(e)}=F_i^{(e)} \qquad (4.13)$$

式中

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega^e}\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)+a_{00}\psi_i\psi_j\right]dxdy$$

$$(4.14)$$

$$F_i^{(e)}=\int_{\Omega^e}f\psi_i dxdy+\oint_{\Gamma^e}q_n\psi_i ds$$

注意，仅仅当$a_{12}=a_{21}$时，$K_{ij}^{(e)}=K_{ji}^{(e)}$（即$[K]$是对称的）。方程式(4.13)表示方程式(4.1)的有限元模型。在下一节中，我们将讨论插值函数的推导。

4-2-4　插值函数

分析变分式（4.10）和方程式（4.14）中的有限元矩阵表明，ψ_i至少应是x和y的双线性函数。正如以前指出的一样，不仅结点的数量和位置相一致，而且在一个有限单元里每结点的基本未知量的数量，和单元上使用应变量的多项近似式中的项数也是一致的。在一维二次问题中，在一单元里，由于n和r间的对应关系是$n=r+1$，结点n的数量就能唯一确定多项式的次数r。在二维二次问题中，结点（它等于近似多项式的项数）数量和多项式次数的对应不是唯一的。例如，多项式

$$u(x,y)=c_1+c_2x+c_3y \tag{4.15}$$

包含三项（线性无关的），而对x和y二者来说都是线性的。从另一方面来说，多项式

$$u(x,y)=c_1+c_2x+c_3y+c_4xy \tag{4.16}$$

包含四项（线性无关的），但是对x和y二者来说也是线性的。前者需要三个结点的单元（每结点具有一个基本未知量），而后者需要四个结点的单元。具有三个结点的二维单元是一个在三角形顶点上有结点的三角形。当结点数量等于4时，可以选择三角形中心(或重心)处为第四个结点的三角形，或矩形顶点上为结点的矩形(或四边形)。五个常数的多项式是（不完全的）二次多项式

$$u(x,y)=c_1+c_2x+c_3y+c_4xy+c_5(x^2+y^2) \tag{4.17}$$

它能被用来构成五个结点的单元（例如，在矩形的每个角点和中心处带结点的矩形）。类似地，二次多项式

$$u(x,y)=c_1+c_2x+c_3y+c_4xy+c_5x^2+c_6y^2 \tag{4.18}$$

有六个常数，能用来构成六个结点的单元（例如，在每个顶点和每条边的中点处带结点的三角形）。三、四、五和六个结点单元的例子如图4.2所示。

这里我们将推导三个结点的三角形单元和四个结点的矩形单

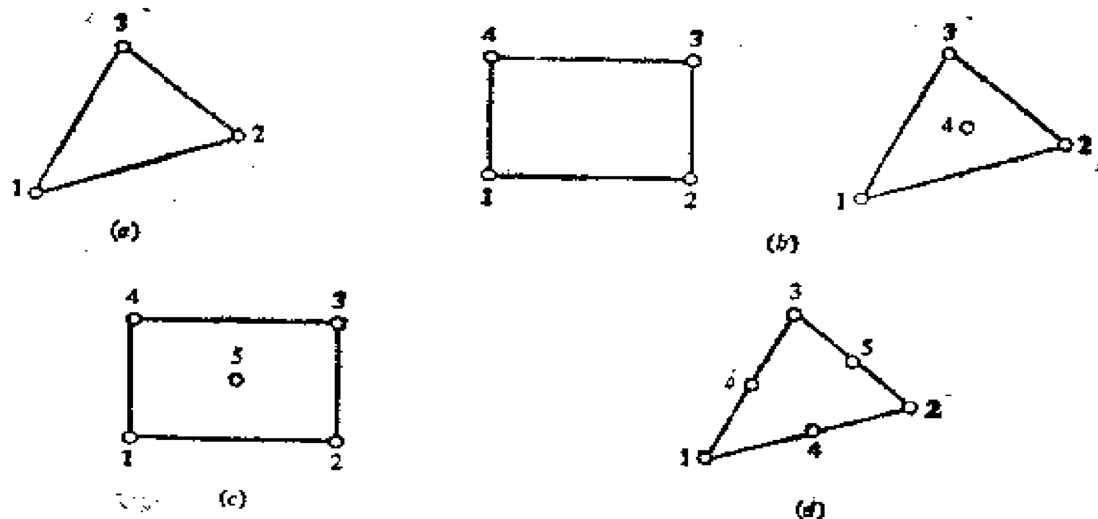


图4.2　在二维问题中的有限单元：(a) 三结点单元；(b) 四结点单元；(c) 五结点单元；(d) 六结点单元

元的线性插值函数。步骤与用于一维线性单元的相同。

三结点的三角形单元的插值函数

我们来考察线性近似式(4.15)。集合$\{1,x,y\}$是线性无关的和完全的。我们必须改写近似值(4.15)，使它满足下述条件

$$u(x_i,\ y_i)=u_i \qquad i=1,2,3 \tag{4.19}$$

式中，$(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 是三角形三顶点的（总的）坐标。换句话说，据据方程式(4.19)，我们将式(4.15)中三个常数c_i表示成u_i的形式

$$\begin{aligned}u_1&\equiv u(x_1,y_1)=c_1+c_2x_1+c_3y_1\\u_2&\equiv u(x_2,y_2)=c_1+c_2x_2+c_3y_2\\u_3&\equiv u(x_3,y_3)=c_1+c_2x_3+c_3y_3\end{aligned} \tag{4.20}$$

矩阵式为[见方程式(3.10)]

$$\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_2 & y_2\\1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

注意，结点是按逆时针方向编号，对$c_i=(i=1,2,3)$解方程式(4.21)得到

$$c_1 = \frac{1}{2A_e}[u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)]$$

$$c_2 = \frac{1}{2A_e}[u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)]$$

$$c_3 = \frac{1}{2A_e}[u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)]$$

(4.22)

式中，A_e是三角形面积

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)$$

(4.23)

假如结点按顺时针编号，行列式会有负号。将方程式(4.22)得到的c_i代入方程式(4.15)，我们得到

$$u(x,y) = u_1\psi_1(x,y) + u_2\psi_2(x,y) + u_3\psi_3(x,y) = \sum_{i=1}^{3} u_i\psi_i^{(e)} \tag{4.24}$$

式中，$\psi_i^{(e)}$是三角形单元的线性插值函数

$$\psi_i^{(e)} = \frac{1}{2A_e}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \qquad i = 1,2,3 \tag{4.25a}$$

而α_i、β_i和γ_i是常数

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= x_jy_k - x_ky_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j \end{aligned}\right\} \quad i \neq j \neq k，而i、j和k在正常顺序里置换$$

(4.25b)

例如，在方程式(4.25b)中，用$i=2, j=3$和$k=1$的方法给出了α_2

$$\alpha_2 = x_3y_1 - x_1y_3$$

线性插值函数$\psi_i^{(e)}$如图4.3所示。注意到$\psi_i^{(e)}$有如下性质

$$\psi_i(x_j,y_j) = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} \psi_i = 1 \tag{4.26}$$

也要注意到方程式（4.24）求出了一个通过u_1，u_2和u_3的平面表面。这里，利用三角形的线性插值函数ψ_i得到用一平面函数$\sum_{i=1}^{3} u_i\psi_i$（见图4.4）表示的曲面$u(x,y)$的近似式。

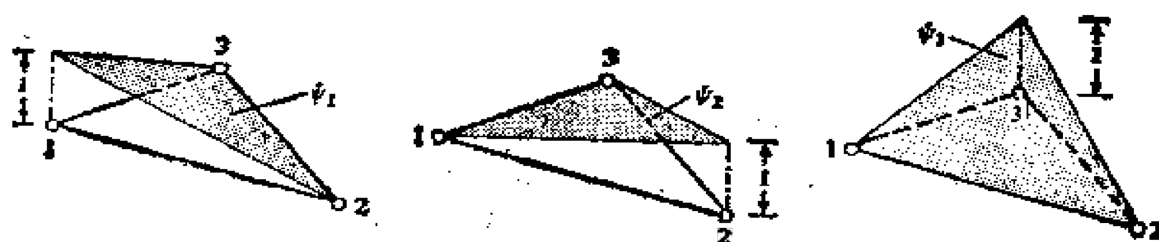


图4.3　三结点三角形单元的线性插值函数

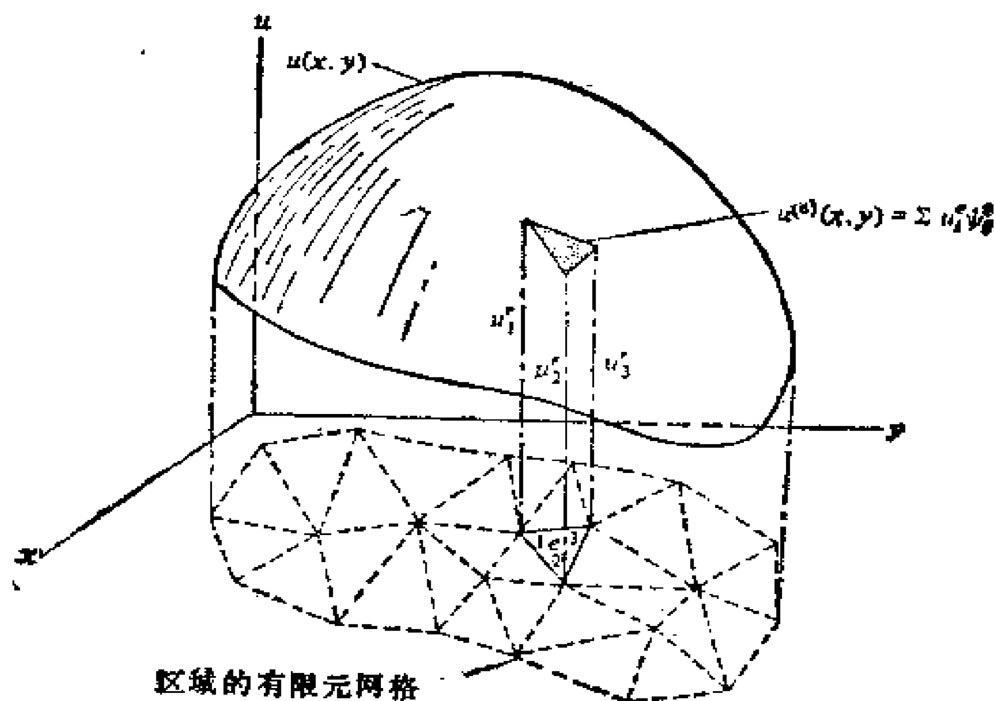


图4.4　用三结点三角形单元的插值函数来表示连续函数$u(x,y)$

四结点矩形单元的线性插值函数

我们这里考虑形式为式（4.16）的近似式，并使用一个边长为a和b（见图4.5a）的矩形单元。为方便起见，我们选择局部坐标

系(ξ,η)来导出插值函数。假设

$$u(\xi,\eta)=c_1+c_2\xi+c_3\eta+c_4\xi\eta \tag{4.27}$$

并要求

$$\begin{aligned}
u_1&=u(0,0)=c_1\\
u_2&=u(a,0)=c_1+c_2a\\
u_3&=u(a,b)=c_1+c_2a+c_3b+c_4ab\\
u_4&=u(0,b)=c_1+c_3b
\end{aligned} \tag{4.28}$$

解$c_i(i=1,2,3,4)$ 得到

$$\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&a&0&0\\1&a&b&ab\\1&0&b&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{ab}\begin{bmatrix}ab&0&0&0\\-b&b&0&0\\-a&0&0&a\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix} \tag{4.29}$$

将方程式（4.29）代入方程式（4.27）得到

$$u(\xi,\eta)=\{1\quad\xi\quad\eta\quad\xi\eta\}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{Bmatrix}=\{\psi_1\ \ \psi_2\ \ \psi_3\ \ \psi_4\}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{4}u_i\psi_i(\xi,\eta) \tag{4.30}$$

式中

$$\begin{aligned}
\psi_1(\xi,\eta)&=\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\left(1-\frac{\eta}{b}\right)\\
\psi_2(\xi,\eta)&=\frac{\xi}{a}\left(1-\frac{\eta}{b}\right)\\
\psi_3(\xi,\eta)&=\frac{\xi}{a}\,\frac{\eta}{b}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\psi_4(\xi,\eta)=\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\frac{\eta}{b}$$

插值函数如图4.5b所示。再次取

$$\psi_i(\xi_j,\eta_j)=\delta_{ij}\qquad i,j=1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4}\psi_i=1\tag{4.32}$$

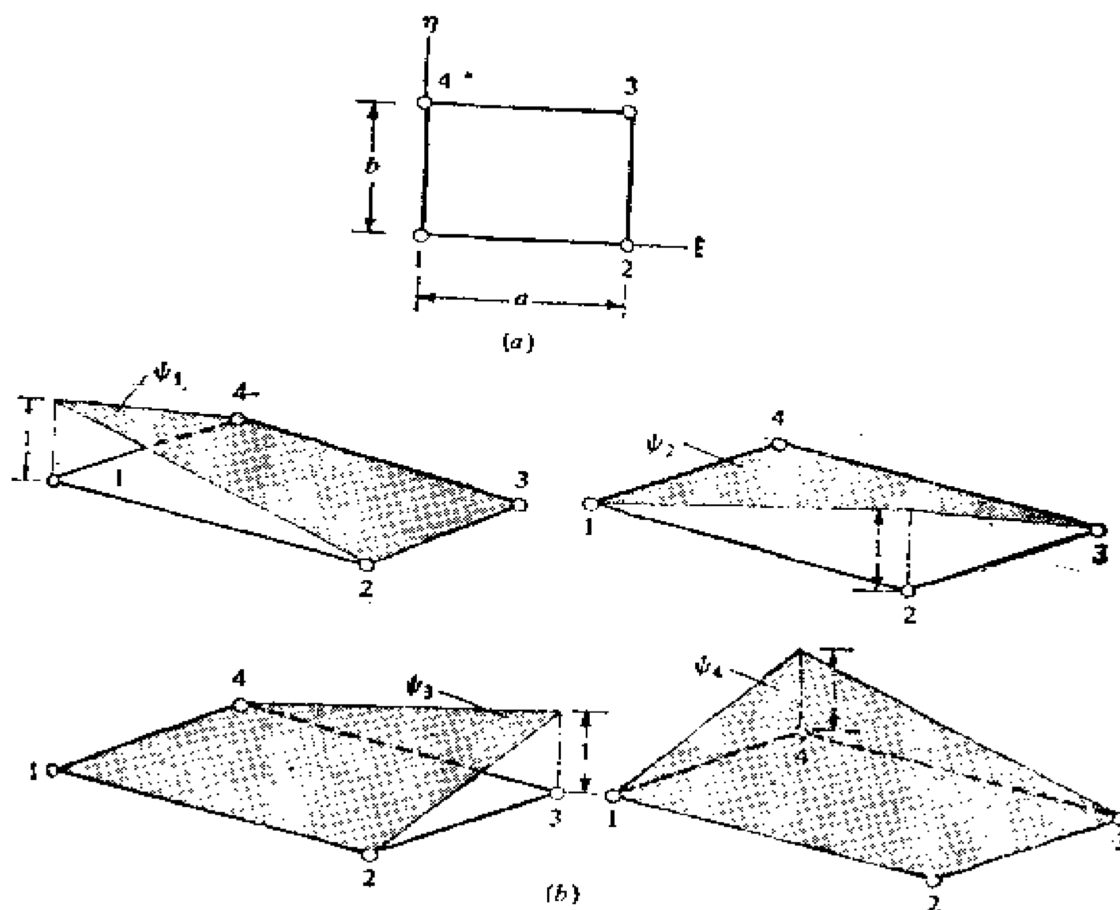


图4.5 线性矩形单元和有关的插值函数：
(a) 四结点矩形单元；(b) 线性插值函数

注意，用对于边1—2和2—3（它们可以视作为线性单元）有关的线性插值函数（3.17b）取张量分量的方法，也能得到四个结点的矩形单元的线性插值函数：

$$\begin{Bmatrix} 1-\dfrac{\xi}{a} \\ \dfrac{\xi}{a} \end{Bmatrix} \left\{1-\frac{\eta}{b} \;\vdots\; \frac{\eta}{b}\right\} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_4 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

上面所给插值函数的构成的常规办法包括对 $n\times n$ 阶 的矩阵[见方程式(4.29)]求逆，这里的n是单元的结点数。当n大时，求逆变得很冗长。在习题3.1中对一维单元讨论的另一种方法证明数学上是简单的。这里我们用四个结点的矩形单元说明这种方法。方程式（4.32）的性质 1 要求如下

$$\psi_1(\xi_i,\eta_i)=0 \qquad i=2,3,4$$

$$\psi_1(\xi_1,\eta_1)=1$$

也就是说，ψ_1在$\xi=a$和$\eta=b$的直线上恒等于零。这里，$\psi_1(\xi,\eta)$必须是下述形式

$$\psi_1(\xi,\eta)=c_1(a-\xi)(b-\eta)$$

利用条件$\psi_1(\xi_1,\eta_1)=\psi_1(0,0)=1$，我们得到$c_1=1/ab$，所以

$$\psi_1(\xi,\eta)=\frac{1}{ab}(a-\xi)(b-\eta)=\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\left(1-\frac{\eta}{b}\right)$$

用同样的方法，能够获得余下的3个插值函数。

4-2-5 单元矩阵的计算

方程式（4.14）中单元矩阵$[K^{(e)}]$和$\{F^{(e)}\}$的计算，用常用的方法（也就是用精确的积分方法）通常是不容易的。然而，当a_{ij}、a_{00}和f是常数时，对于在上节中讨论的三角形和矩形单元能够精确地计算积分。每当q_n已知时，方程式（4.14）在$\{F^{(e)}\}$中的边界积分总是能够计算。对于内部单元（也就是在问题的边界上没有任何边的单元），边界积分的影响与网格相邻单元的同样影响相抵消（类似于在一维问题中的$P_i^{(e)}$和$Q_i^{(e)}$）。下面给出更详细的讨论。

为了简便起见，将方程式（4.14）中$[K^{(e)}]$改写为四个基本矩阵$[S^{\alpha\beta}](\alpha,\beta=1,2)$与矩阵$[S]$之和

$$[K^{(e)}]=a_{11}[S^{11}]+a_{12}[S^{12}]+a_{21}[S^{12}]^T+a_{22}[S^{22}]+a_{00}[S] \tag{4.34a}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} S_{ij}^{11} &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dxdy \quad S_{ij}^{12} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dxdy \\ S_{ij}^{22} &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dxdy \quad S_{ij} = \int_{\Omega^e} \psi_i \psi_j dxdy \end{aligned}\right\} \tag{4.34b}$$

且令

$$f_i^{(e)} = \int_{\Omega^e} f\psi_i dxdy \qquad Q_i^{(e)} = \oint_{\Gamma^e} q_n \psi_i ds \tag{4.35}$$

我们现在利用在上节中推导出的线性插值函数计算方程式(4.34)和(4.35)的矩阵。

线性三角形单元的单元矩阵

对一个三角形，下述精确的积分公式是适合计算积分的。令

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dxdy \tag{4.36}$$

而且存在

$$\begin{aligned} I_{00} &= \text{三角形的面积} A \\ I_{10} &= A \cdot \bar{x} \qquad \bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} x_i \\ I_{01} &= A \cdot \bar{y} \qquad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} y_i \\ I_{11} &= \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i y_i + 9\bar{x}\bar{y} \right) \\ I_{20} &= \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 9\bar{x}^2 \right) \\ I_{02} &= \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^{3} y_i^2 + 9\bar{y}^2 \right) \end{aligned} \tag{4.37}$$

在方程式（4.34b）和（4.35）中使用线性插值函数(4.25)，并注意到

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x}=\frac{\beta_i}{2A} \qquad \frac{\partial\psi_i}{\partial y}=\frac{\gamma_i}{2A} \tag{4.38}$$

得到

$$S_{ij}^{11}=\frac{1}{4A}\beta_i\beta_j \qquad S_{ij}^{12}=\frac{1}{4A}\beta_i\gamma_j \qquad S_{ij}^{22}=\frac{1}{4A}\gamma_i\gamma_j$$

$$S_{ij}=\frac{1}{4A}\Big\{[\alpha_i\alpha_j+(\alpha_i\beta_j+\alpha_j\beta_i)\bar{x}+(\alpha_i\gamma_j+\alpha_j\gamma_i)\bar{y}]$$

$$+\frac{1}{A}[I_{20}\beta_i\beta_j+I_{11}(\gamma_i\beta_j+\gamma_j\beta_i)+I_{02}\gamma_i\gamma_j]\Big\} \tag{4.39a}$$

考虑到恒等式 $\alpha_i+\beta_i\bar{x}+\gamma_i\bar{y}=2A/3$（它是从方程式（4.25$b$）和（4.37）得到的），得出

$$f_i^{(e)}=\frac{f}{2}(\alpha_i+\beta_i\bar{x}+\gamma_i\bar{y})=\frac{fA}{3} \tag{4.39b}$$

在单元结点坐标已知时，从方程式（4.25b）能算出α_i、β_i和γ_i，并代入方程式（4.39）得到单元矩阵。

线性矩形单元的单元矩阵

因为a_{00}、a_{ij}和f是常数，我们能利用方程式（4.31）用x和y分别代替ξ和η的插值函数，得出

$$[S^{11}]=\frac{b}{6a}\begin{bmatrix}2&-2&-1&1\\-2&2&1&-1\\-1&1&2&-2\\1&-1&-2&2\end{bmatrix}$$

$$[S^{12}]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$[S^{22}]=\frac{a}{6b}\begin{bmatrix}2&1&-1&-2\\1&2&-2&-1\\-1&-2&2&1\\-2&-1&1&2\end{bmatrix}$$

$$[S]=\frac{ab}{36}\begin{bmatrix}4&2&1&2\\2&4&2&1\\1&2&4&2\\2&1&2&4\end{bmatrix} \tag{4.40}$$

$$\{f\}=\frac{fab}{4}\{1\quad 1\quad 1\quad 1\}^T$$

边界积分的计算

这里我们研究下述形式的边界积分计算：

$$Q_i^{(e)}=\oint_{\Gamma^e} q_n^{(e)}\psi_i^{(e)}(s)ds \tag{4.41}$$

这时，$q_n^{(e)}$是已知的沿边界Γ^e距离s的函数。当Γ^e的一部分与域Ω的边界Γ不重合时，没有必要计算这种积分。在域内部的Γ^e部分

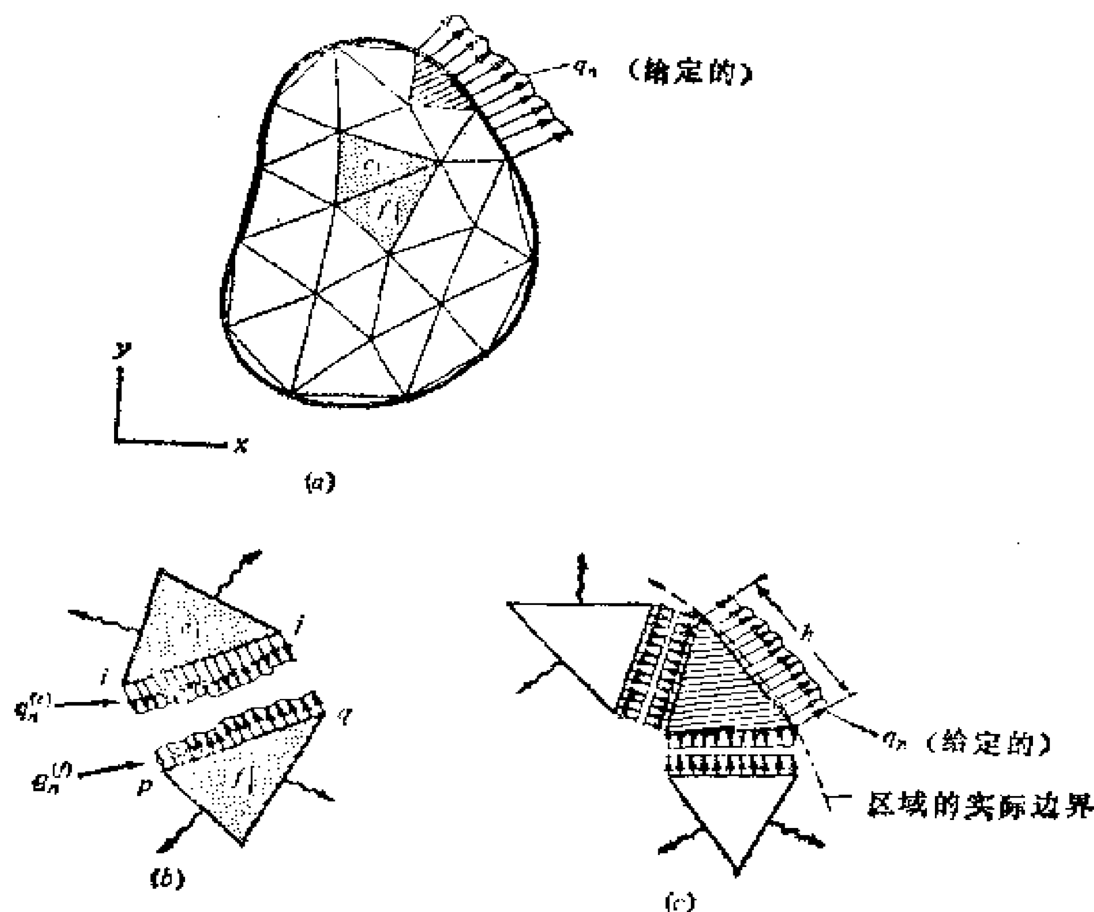


图4.6 边界力的计算和在内部单元边界上次变量的平衡：(a) 有限元离散化；(b) 在内表面上力的平衡；(c) 在实际边界上力的计算

里，当单元e的边（i, j）和单元f的边（p、q）是相同时（也就是单元e和单元f共面），单元e边（i, j）上的$q_n^{(e)}$和单元f边（p、q）上的$q_n^{(f)}$抵消。可视为内力平衡（见图4.6b,c）。当Γ^e落在域边界上时，$q_n^{(e)}$或者是已知的（通常，如s的函数），或者是在以后计算中去确定。在后一种情况下，基本的变量将是确定的（在局部边界上，q_n是不确定的）。

线性二维单元的边界Γ^e是线性一维单元的集合，因此，边界积分的计算等于计算线性积分。当二维插值函数限定于（即计算）边界时，我们获得相应的一维插值函数，读者不会感到意外。为了记住这个概念，研究一个部分边界在域边界上的有限单元（见图4.6c），并假设在此q_n是已知的。于是

$$\int_0^h q_n(s)\psi_i(s)ds = Q_i \tag{4.42}$$

它给出了q_n对结点i的影响。这里，h代表承受力q_n的边长，而$\psi_i(s)$是一维插值函数。当$\psi_i(x, y)$是线性时〔则$\psi_i(s)$是线性的〕，i取值1和2，而当$\psi_i(x,y)$是二次方程式时〔则$\psi_i(s)$是二次方程式〕，i取值1,2和3。例如，当ψ_i是线性时（$\psi_1 = 1 - s/h$, $\psi_2 = s/h$），我们取：

$$Q_i = \begin{cases} \int_0^h q_n\psi_i ds & \text{当} q_n \text{为任意值时} \\ \dfrac{q_n h}{2} & \text{当} q_n \text{为常数时} \end{cases} \tag{4.43}$$

4-2-6 单元矩阵的集合

有限元方程式的集合以一维问题的相同原理为基础。我们用一个三角形单元和一个四边形单元组成的有限元网格说明其步骤（见图4.7a）。令$K_{ij}^{(1)}$（i, $j = 1$, 2, 3）表示相应于三角形单元的系数矩阵，而$K_{ij}^{(2)}$（i, $j = 1$, 2, 3, 4）表示相应于四边形单元的系数矩阵。从图4.7a所示的有限元网格中，我们注意到总的和单元的结点值间的下述对应关系：

$$U_1 = u_1^{(1)} \qquad U_2 = u_2^{(1)} = u_1^{(2)} \qquad U_3 = u_3^{(1)} = u_4^{(2)}$$
$$U_4 = u_2^{(2)} \qquad U_5 = u_3^{(2)} \tag{4.44}$$

注意，单元间结点上结点值的连续性，保证了在整个单元间边界范围内主要变量的连续性。为了说明这点，可回顾有限元近似式在线性三角形和四边形单元的边界范围上是线性的。因为一个线性多项式用两个常数（即在边界上的结点值）可以唯一确定，而常数在共用边界上两个单元中是相同的，由此得出在单元间边界中主要变量的确定是唯一的。

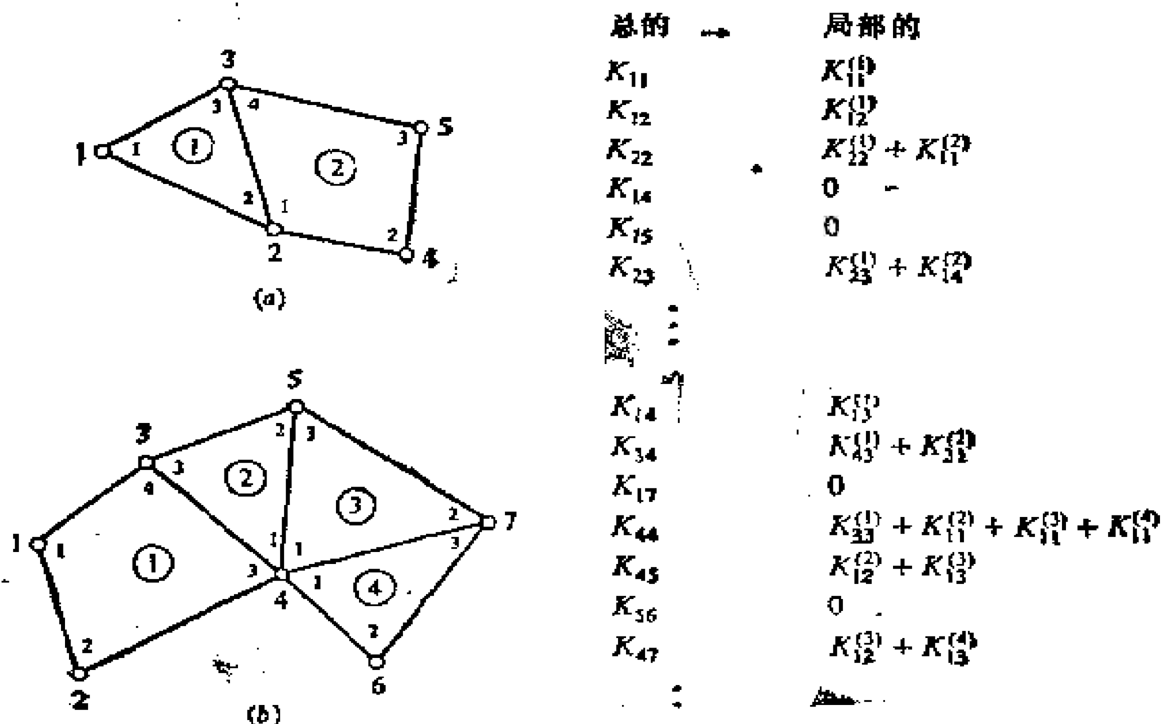


图4.7 利用总的和单元的结点（每结点已知）间的对应关系有限元系数矩阵的集合：(a) 2个单元的集合；(b) 若干单元的集合

下面我们利用单元间连续条件（4.44）和方程式（3.25）集合单元方程式

$$0=\sum_{e=1}^{2}\{\delta u^{(e)}\}^{T}([K^{(e)}]\{u^{(e)}\}-\{F^{(e)}\})$$

$$=\sum_{e=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_e}\delta u_i^{(e)}\left[\sum_{j=1}^{n_e}K_{ij}^{(e)}u_j^{(e)}-F_i^{(e)}\right]\quad n_1=3\quad n_2=4$$

或

$$
\begin{aligned}
0=&\delta U_1[K_{11}^{(1)}U_1+K_{12}^{(1)}U_2+K_{13}^{(1)}U_3-F_1^{(1)}]\\
&+\delta U_2[K_{21}^{(1)}U_1+K_{22}^{(1)}U_2+K_{23}^{(1)}U_3-F_2^{(1)}]\\
&+\delta U_3[K_{31}^{(1)}U_1+K_{32}^{(1)}U_2+K_{33}^{(1)}U_3-F_3^{(1)}]\\
&+\delta U_2[K_{11}^{(2)}U_2+K_{12}^{(2)}U_4+K_{13}^{(2)}U_5+K_{14}^{(2)}U_3-F_1^{(2)}]\\
&+\delta U_4[K_{21}^{(2)}U_2+K_{22}^{(2)}U_4+K_{23}^{(2)}U_5+K_{24}^{(2)}U_3-F_2^{(2)}]\\
&+\delta U_5[K_{31}^{(2)}U_2+K_{32}^{(2)}U_4+K_{33}^{(2)}U_5+K_{34}^{(2)}U_3-F_3^{(2)}]\\
&+\delta U_3[K_{41}^{(2)}U_2+K_{42}^{(2)}U_4+K_{43}^{(2)}U_5+K_{44}^{(2)}U_3-F_4^{(2)}]
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

分别集合δU_i（$i=1, 2, \cdots\cdots 5$）的系数，且令它们分别为0，得到

$$
\begin{bmatrix}
K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0\\
K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{23}^{(1)}+K_{14}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)}\\
K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)}+K_{41}^{(2)} & K_{33}^{(1)}+K_{44}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)}\\
0 & K_{21}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)}\\
0 & K_{31}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)}
\end{bmatrix}
\times\begin{Bmatrix} U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\\ U_5\end{Bmatrix}
=\begin{Bmatrix} F_1^{(1)}\\ F_2^{(1)}+F_1^{(2)}\\ F_3^{(1)}+F_4^{(2)}\\ F_2^{(2)}\\ F_3^{(2)}\end{Bmatrix}
\tag{4.46}
$$

注意，在两个单元共用的总结点2和3的对应的位置处，单元矩阵叠加。

上述描述的组合方法能用这样的方法来整理分析，该方法能避免方程式（4.45）中冗长的代数运算。对图4.7a中有限元网格细致的观察表明，在每组总结点和每组单元结点间有下述对应的关系(见下页表)。

这种对应关系为我们提供一个组合单元矩阵的简单方法，该法从单元矩阵用相对应的表获得总的系数矩阵。例如，研究如图4.7b所示的有限元网格。总的系数矩阵位置(3,4)包含$K_{43}^{(1)}+K_{31}^{(2)}$，而位置（4，4）包含$K_{33}^{(1)}+K_{11}^{(2)}+K_{11}^{(3)}+K_{11}^{(4)}$。在组合的列矢量中，

总的结点	单元的结点
(1,1)	单元1的(1,1)
(1,2)	单元1的(1,2)
(1,3)	单元1的(1,3)
(1,4)	不存在相应关系
(1,5)	不存在相应关系
(2,2)	单元1的(2,2)和单元2的(1,1)
(2,3)	单元1的(2,3)和单元2的(1,4)
(2,4)	单元2的(1,2)
(2,5)	单元2的(1,3)
(3,3)	单元1的(3,3)和单元2的(4,4)
(3,4)	单元2的(4,2)
(3,5)	单元2的(4,3)
(4,4)	单元2的(2,2)
(4,5)	单元2的(2,3)
(5,5)	单元2的(3,3)

位置4包含$F_3^{(1)}+F_1^{(2)}+F_1^{(3)}+F_1^{(4)}$。总的矩阵位置(1, 5),(1, 6),(1, 7),(2, 5),(2, 6),(2, 7),(3, 6),(3, 7)和(5, 6)是0[因为当(i, j)不是在同单元里时，$K_{ij}=0$]。

例题4.1 研究 Poisson 方程式（见例题2.8）

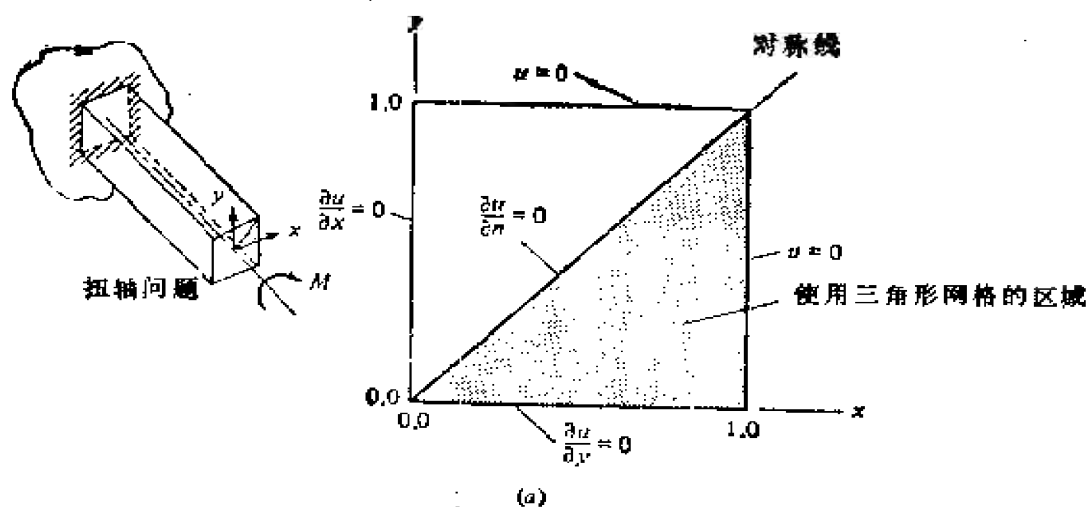
$$-\nabla^2 u = 1 \quad 在\Omega=\{(x,\ y): 0<(x,\ y)<1\}中$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0)=0 \qquad u(1,\ y)=u(x,\ 1)=0 \tag{4.47}$$

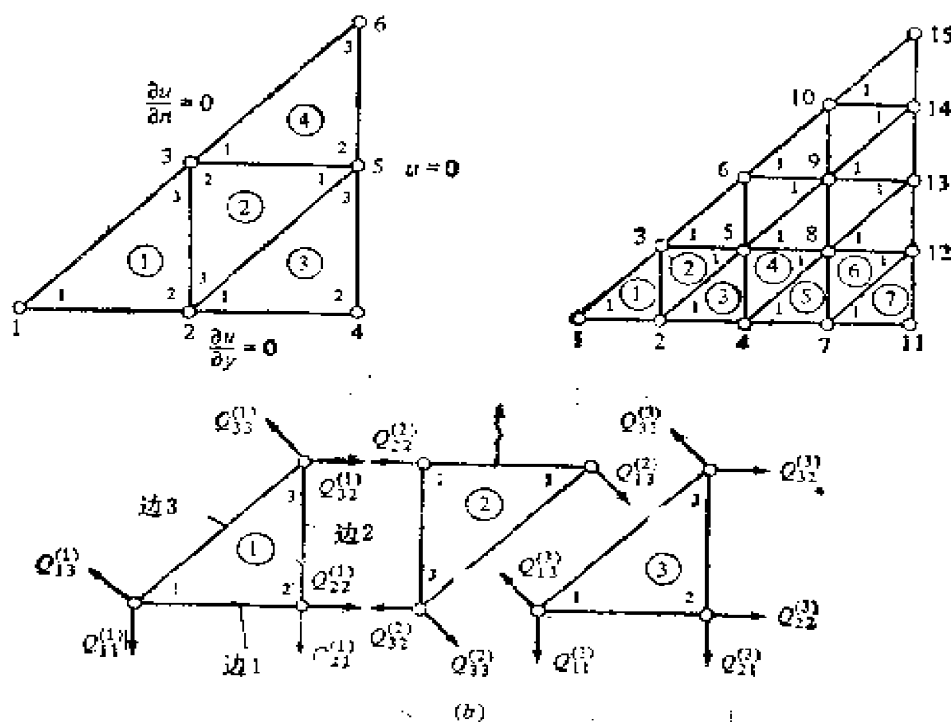
希望用线性的三角形和矩形单元来解此题。

用线性三角形单元的解

由于刚度矩阵沿对角线$x=y$对称，仅需要研究上部的或下部的三角形域（见图4.8）即可。沿对称线，主要变量的法向导数是零。假设第一次选择时，我们用4个线性三角形单元的（相等的）网格表示（也就是离散）域。在此情况下，解题中不存在离散误差。



(a)



(b)

图4.8 用三角形单元有限元离散和在单元间边界上次变量的平衡：(a) 例4.1的域和边界条件；(b) 用三角形单元的有限元离散（2×2和4×4）

注意，单元1，3和4是完全相同的(在几何排列方向上一致)。单元2在几何形状上与单元1相同，但其方向不同。如果我们按照单元1来编单元2局部结点的号码（也就是对角线编码为 3 和1），

则所有 4 个单元具有相同的单元矩阵，且计算它们仅需要计算单元1(用计算机计算单元矩阵时，我们不必为提供这个单元矩阵编局部结点号码担心)。对于网格的一个典型单元，用下式给出单元方程式

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A}(\beta_i^{(e)}\beta_j^{(e)} + \gamma_i^{(e)}\gamma_j^{(e)}) \quad f_i^{(e)} = \frac{fA}{3} \tag{4.48}$$

例如，对单元1具有

$$\alpha_1 = x_2y_3 - x_3y_2 = \frac{1}{4} \qquad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = 0$$

$$\beta_1 = y_2 - y_3 = -\frac{1}{2} \qquad \beta_2 = \frac{1}{2} \qquad \beta_3 = 0$$

$$\gamma_1 = x_3 - x_2 = 0 \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{2} \qquad \gamma_3 = \frac{1}{2}$$

$$\psi_1 = (1-2x) \qquad \psi_2 = 2(x-y) \qquad \psi_3 = 2y$$

$$[K^{(1)}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F^{(1)}\} = \frac{1}{24}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} \end{Bmatrix}$$

式中，$Q_i^{(1)}$用下式给出

$$\begin{aligned} Q_i^{(1)} &= \oint_{\Gamma_e} q_n^{(1)}\psi_i^{(1)}(s)ds \\ &= \int_0^{0.5} [q_n^{(1)}\psi_i^{(1)}(x, y)]_{y=0}dx \\ &\quad + \int_0^{0.5} [q_n^{(1)}\psi_i^{(1)}(x, y)]_{x=0.5}dy \\ &\quad + \int_{0.5}^{0} [q_n^{(1)}\psi_i^{(1)}(x, y)]_{x=y}dx \\ &= Q_{i1}^{(1)} + Q_{i2}^{(1)} + Q_{i3}^{(1)} \end{aligned}$$

这里$Q_{ij}^{(e)}$表示单元e边$j(j=1, 2, 3)$上$Q_i^{(e)}$值。例如，$Q_1^{(1)}$用下式给出（因为当$x=0.5$时$\psi_1^{(1)}=0$）

$$Q_1^{(1)} = Q_{11}^{(1)} + Q_{13}^{(1)}$$

注意，$Q_i^{(e)}$是标量，而在图4.8b中指示的箭头表示$q_n^{(e)}$的方向，不是$Q_i^{(e)}$的符号。

在计算机中有限元方法执行过程中感兴趣的是确定相关矩阵(3.21)。对本例的网格，存在

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

集合矩阵的半带宽度等于4。

有限元网格集合系数矩阵是6×6(因为有六个总结点，每个结点有一个未知量)。利用总结点和局部结点间的对应关系，集合矩阵能直接得到

$$[K] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{22}^{(1)}+K_{33}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{23}^{(1)}+K_{32}^{(2)} & K_{12}^{(3)} & K_{13}^{(3)}+K_{31}^{(2)} & 0 \\ & & K_{33}^{(1)}+K_{22}^{(2)}+K_{11}^{(4)} & 0 & K_{21}^{(2)}+K_{12}^{(4)} & K_{13}^{(4)} \\ & & & K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(3)} & 0 \\ & \text{对称的} & & & K_{11}^{(2)}+K_{33}^{(3)}+K_{22}^{(4)} & K_{23}^{(4)} \\ & & & & & K_{33}^{(4)} \end{array} \tag{4.49a}$$

$$\{F\} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)}+F_3^{(2)}+F_1^{(3)} \\ F_3^{(1)}+F_2^{(2)}+F_1^{(4)} \\ F_2^{(3)} \\ F_1^{(2)}+F_3^{(3)}+F_2^{(4)} \\ F_3^{(4)} \end{Bmatrix} \tag{4.49b}$$

注意到$[K^{(1)}]=[K^{(2)}]=[K^{(3)}]=[K^{(4)}]$和$\{F^{(1)}\}=\{F^{(2)}\}=\{F^{(3)}\}=\{F^{(4)}\}$，我们从方程式(4.48)和(4.49)得到下述组合的方程式组：

$$
\frac{1}{2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\
\hdashline
0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}
U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \hdashline U_4 \\ U_5 \\ U_6
\end{array}\right\}+
$$

$$
=\frac{1}{24}\left\{\begin{array}{c}
1 \\ 3 \\ 3 \\ \cdots \\ 1 \\ 3 \\ 1
\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}
Q_1^{(1)} \\
Q_2^{(1)}+Q_3^{(2)}+Q_1^{(3)} \\
Q_3^{(1)}+Q_2^{(2)}+Q_1^{(4)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_2^{(3)} \\
Q_1^{(2)}+Q_3^{(3)}+Q_2^{(4)} \\
Q_3^{(4)}
\end{array}\right\} \tag{4.50}
$$

该题在初始的自由度方面给定的边界条件是

$$
U_4=U_5=U_6=0 \tag{4.51}
$$

确定的第二自由度（即q_n）和次变量的内部平衡用下式给出

$$
Q_1^{(1)}=Q_{11}^{(1)}+Q_{13}^{(1)}=\text{确定是零}=0
$$

$$
Q_2^{(1)}+Q_3^{(2)}+Q_1^{(3)}=(Q_{21}^{(1)}+Q_{11}^{(3)})+[(Q_{22}^{(1)}+Q_{32}^{(2)})+(Q_{13}^{(3)}+Q_{33}^{(2)})]
$$

$$
=\text{确定是零}+[\text{消去给出零}]=0
$$

$$
Q_3^{(1)}+Q_2^{(2)}+Q_1^{(4)}=Q_{33}^{(1)}+Q_{13}^{(4)}=0 \tag{4.52}
$$

$$
Q_2^{(3)}=Q_{21}^{(3)}+Q_{22}^{(3)}=\text{确定是零}+\text{未知量}=Q_{22}^{(3)}\text{，未知量}
$$

$$
Q_1^{(2)}+Q_3^{(3)}+Q_2^{(4)}=Q_{32}^{(3)}+Q_{22}^{(4)}\text{，未知量}
$$

$$
Q_3^{(4)}=Q_{31}^{(4)}+Q_{33}^{(4)}=\text{未知量}+\text{由于对称为}\ 0=Q_{32}^{(4)}\text{，未知量}
$$

上述给出的“平衡”表明在图4.8b中。于是，有下述3个未知的广义位移U_1,U_2和U_3和3个未知的广义力$Q_{22}^{(3)}$，$Q_{32}^{(3)}+Q_{22}^{(4)}$和$Q_{32}^{(4)}$［见方程式（4.50）和（4.52）］的方程式：

$$
\begin{bmatrix}
0.5 & -0.5 & 0 \\
-0.5 & 2.0 & -1.0 \\
0 & -1.0 & 2.0
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}
U_1 \\ U_2 \\ U_3
\end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}
1 \\ 3 \\ 3
\end{bmatrix} \tag{4.53}
$$

$$
\begin{bmatrix} Q_{22}^{(3)} \\ Q_{32}^{(3)}+Q_{22}^{(4)} \\ Q_{32}^{(4)} \end{bmatrix} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} \tag{4.54}
$$

解方程式（4.53）的U_i（$i=1, 2, 3$），得到

$$
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 7.5 \\ 5.5 \\ 4.25 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0.31250 \\ 0.22917 \\ 0.17708 \end{bmatrix} \tag{4.55}
$$

且从方程式(4.54)有

$$
\begin{bmatrix} Q_{22}^{(3)} \\ Q_{32}^{(3)}+Q_{22}^{(4)} \\ Q_{32}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{24}-0.5U_2 \\ -\frac{1}{8}-U_3 \\ -\frac{1}{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.197917 \\ -0.302083 \\ -0.041667 \end{bmatrix} \tag{4.56}
$$

用线性矩形单元的解

注意，当采用矩形单元时，不能利用对我们有利的沿对角线$x=y$的对称性。因此，使用4个线性矩形单元的2×2均匀网格(见图4.9)来离散一四边形域。在此情况中也不产生离散误差。

因为在网格中所有单元是完全相同的，我们将只计算一个单元的单元矩阵，例如单元1的单元矩阵。有

$$
\psi_1=(1-2x)(1-2y) \qquad \psi_2=2x(1-2y) \qquad \psi_3=4xy
$$
$$
\psi_4=(1-2x)2y
$$

$$
K_{ij}^{(1)}=\int_0^{0.5}\int_0^{0.5}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dx\,dy
$$

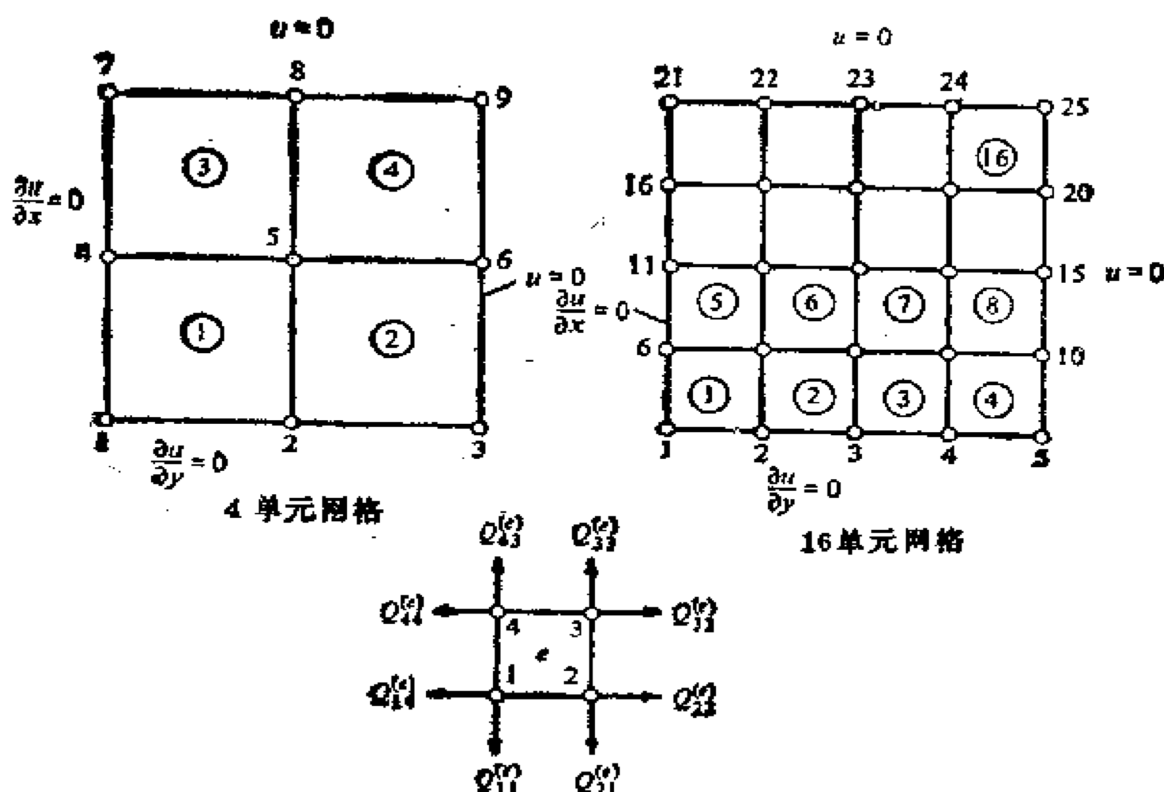


图4.9 用线性矩形单元对例4.1域的有限元离散化

$$f_i^{(e)} = \int_0^{0.5}\int_0^{0.5} f\psi_i dxdy \tag{4.57}$$

计算方程式（4.57）中的积分，得到〔见方程式(4.34)和(4.40)〕

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{F^{(e)}\} = \frac{1}{16}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^{(e)} \\ Q_2^{(e)} \\ Q_3^{(e)} \\ Q_4^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{4.58a}$$

式中

$$Q_i^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2}[q_n^{(e)}\psi_i(x,y)]_{y=0}dx + \int_{y_1}^{y_2}[q_n^{(e)}\psi_i(x,y)]_{x=a}dy +$$

$$+\int_{x_4}^{x_3}\left[q_n^{(e)}\psi_i(x,y)\right]_{y=b}dx+\int_{y_4}^{y_1}\left[q_n^{(e)}\psi_i(x,y)\right]_{x=0}dy$$

(4.58b)

而 $(x_i,\ y_i)$ 表示单元结点的局部坐标（且 $a=x_2-x_1=x_3-x_4$，$b=y_4-y_1=y_3-y_2$）。

四单元网格的集合系数矩阵用下式给出

$$[K]=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array}\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \left[\begin{array}{l} K_{11}^{(1)} \\ \\ \\ \\ \text{对称的} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c} K_{12}^{(1)} \\ K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ K_{12}^{(2)} \\ K_{22}^{(2)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} K_{14}^{(1)} \\ K_{24}^{(1)} \\ 0 \\ K_{44}^{(1)}+K_{11}^{(3)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} K_{13}^{(1)} \\ K_{23}^{(1)}+K_{14}^{(2)} \\ K_{24}^{(2)} \\ K_{43}^{(1)}+K_{12}^{(3)} \\ K_{33}^{(1)}+K_{44}^{(2)}+K_{11}^{(4)}+K_{22}^{(3)} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 6 & 7 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ K_{13}^{(2)} & 0 & 0 & 0\\ K_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & K_{14}^{(3)} & K_{13}^{(3)} & 0\\ K_{43}^{(2)}+K_{12}^{(4)} & K_{24}^{(3)} & K_{23}^{(3)}+K_{14}^{(4)} & K_{13}^{(4)}\\ K_{33}^{(2)}+K_{22}^{(4)} & 0 & K_{24}^{(4)} & K_{23}^{(4)}\\ & K_{44}^{(3)} & K_{43}^{(3)} & 0\\ & & K_{44}^{(4)}+K_{33}^{(3)} & K_{43}^{(4)}\\ & & & K_{33}^{(4)} \end{array}\left.\right]$$

(4.59)

集合力矢量和相关矩阵（为以后使用）用下式给出

$$
\{F\}=\begin{Bmatrix}
F_1^{(1)}\\
F_2^{(1)}+F_1^{(2)}\\
F_2^{(2)}\\
F_4^{(1)}+F_1^{(3)}\\
F_3^{(1)}+F_4^{(2)}+F_2^{(3)}+F_1^{(4)}\\
F_3^{(2)}+F_2^{(4)}\\
F_4^{(3)}\\
F_3^{(3)}+F_4^{(4)}\\
F_3^{(4)}
\end{Bmatrix}
\qquad
[B]=\begin{bmatrix}
1 & 2 & 5 & 4\\
2 & 3 & 6 & 5\\
4 & 5 & 8 & 7\\
5 & 6 & 9 & 8
\end{bmatrix}
\tag{4.60}
$$

在网格中任何单元的任意两个结点间的最大差值是 4 。因此，集合矩阵的半带宽度是5。

本题组合方程式（4.59）用下式给出

$$
\frac{1}{6}\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & 8 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0\\
 & & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0\\
 & & & 8 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0\\
 & & & & 16 & -2 & -2 & -2 & -2\\
 & & & & & 8 & 0 & -2 & -1\\
 & \text{对称的} & & & & & 4 & -1 & 0\\
 & & & & & & & 8 & -1\\
 & & & & & & & & 4
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\\ U_5\\ U_6\\ U_7\\ U_8\\ U_9
\end{Bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{16}\begin{Bmatrix}1\\2\\1\\2\\4\\2\\1\\2\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}Q_1^{(1)}\\Q_2^{(1)}+Q_1^{(2)}\\Q_2^{(2)}\\Q_4^{(1)}+Q_1^{(3)}\\Q_3^{(1)}+Q_4^{(2)}+Q_2^{(3)}+Q_1^{(4)}\\Q_3^{(2)}+Q_2^{(4)}\\Q_4^{(3)}\\Q_3^{(3)}+Q_4^{(4)}\\Q_3^{(4)}\end{Bmatrix} \tag{4.61}
$$

给定的初始自由度是

$$
U_3=U_6=U_7=U_8=U_9=0 \tag{4.62}
$$

而给定的次自由度和内部广义力的平衡为（见图4.9）

$$
Q_1^{(1)}=0 \quad Q_2^{(1)}+Q_1^{(2)}=0 \quad Q_2^{(2)}=Q_{21}^{(2)}+Q_{22}^{(2)}=Q_{22}^{(2)}, \text{未知量}
$$

$$
Q_4^{(1)}+Q_1^{(3)}=0 \quad Q_3^{(1)}+Q_4^{(2)}+Q_2^{(3)}+Q_1^{(4)}=0 \tag{4.63}
$$

在方程式（4.61）中，所有其他次变量是未知量。未知量U_i矩阵方程式的聚缩形式用下式给出〔见在方程式（4.61）中括号内的量〕

$$
\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4&-1&-1&-2\\-1&8&-2&-2\\-1&-2&8&-2\\-2&-2&-2&16\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_4\\U_5\end{Bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{Bmatrix}1\\2\\2\\4\end{Bmatrix} \tag{4.64}
$$

因为$U_2=U_4$（因为对称性），我们能把方程式（4.64）写为

$$
\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4&-1-1&-2\\2(-1)&2(8-2)&2(-2)\\-2&-2-2&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_5\end{bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1\\2\times 2\\4\end{bmatrix} \tag{4.65}
$$

为恢复系数矩阵的对称性，式中第二行乘以2。解用下式给出

$$
\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \frac{6}{16} \times \frac{1}{560} \begin{bmatrix} 176 & 40 & 32 \\ 40 & 60 & 20 \\ 32 & 20 & 44 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.31071 \\ 0.24107 \\ 0.19286 \end{Bmatrix} \tag{4.66}
$$

未知的次变量$Q_{22}^{(2)}$，$Q_{32}^{(2)}+Q_{22}^{(4)}$和$Q_{32}^{(4)}+Q_{33}^{(4)}$用下式给出

$$
\begin{Bmatrix} Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} - Q_2^{(4)} \\ Q_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{22}^{(2)} \\ Q_{32}^{(2)} + Q_{22}^{(4)} \\ Q_{32}^{(4)} + Q_{33}^{(4)} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}
$$

$$
+\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}
$$

$$
= \begin{Bmatrix} -0.17857 \\ -0.29286 \\ -0.12679 \end{Bmatrix} \tag{4.67}
$$

值得注意的是：$Q_3^{(4)} = 2Q_{32}^{(4)}$（因为对称$Q_{32}^{(4)} = Q_{33}^{(4)}$）。

用两个不同的三角形单元网格和两个不同的矩形单元网格得到的有限元解，与方程式(2.95)中取50项的级数解（在$x=0$处y是变化的）和方程式(2.96)中一个参数的Ritz解，在表4.1中进行比较；也可见图4.10。当与级数解进行比较时，用16个三角形单元获得的有限元解是最精确的。

表4.1　方程式(4.47)有限元解$u(0, y)$与级数解和Ritz解的比较

y	三角形单元		矩形单元		方程式(2.96)	方程式(2.95)
	4 单元	16单元	4 单元	16单元	Ritz解	级数解
0.0	0.3125	0.3013	0.3107	0.2984	0.3125	0.2947
0.25	0.2709⁺	0.2805	0.2759⁺	0.2824	0.2930	0.2789
0.50	0.2292	0.2292	0.2411	0.2322	0.2344	0.2293
0.75	0.1146⁺	0.1393	0.1205⁺	0.1414	0.1367	0.1397
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

⁺插值

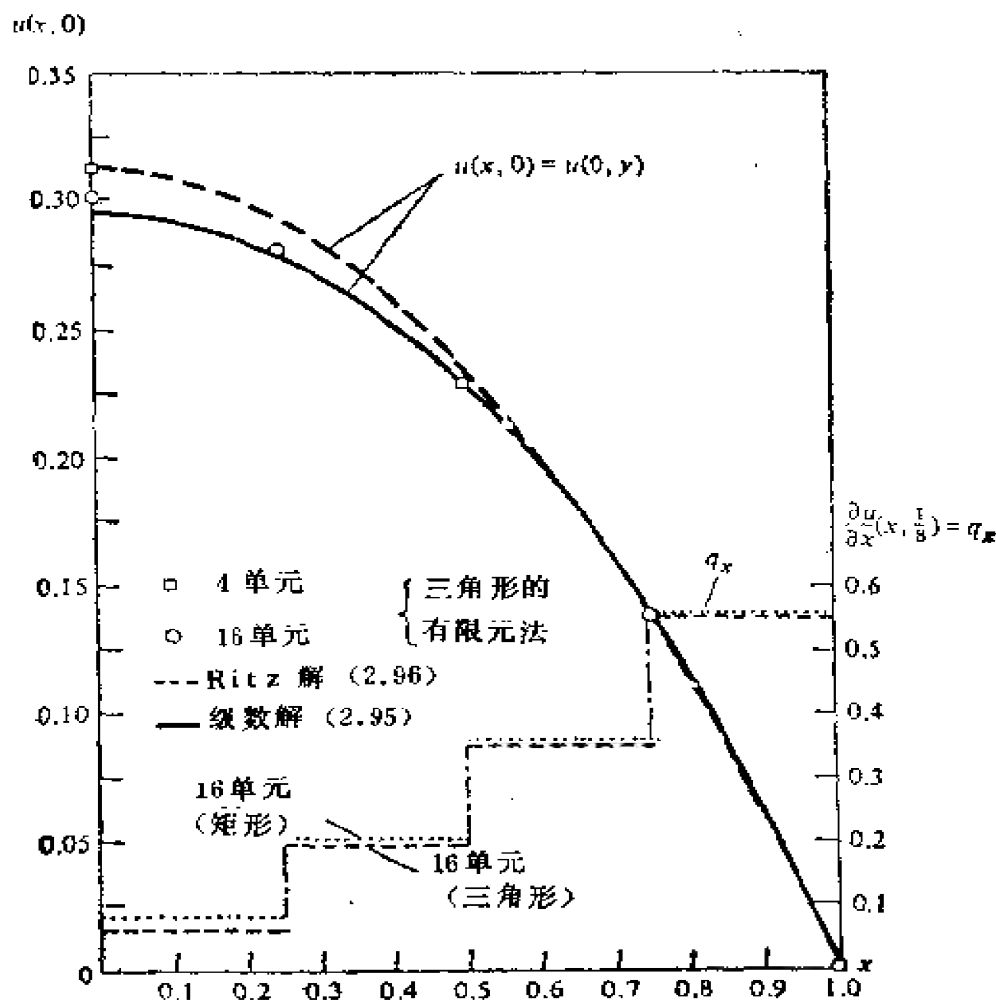


图4.10　有限元解与二参数的Ritz解和方程式(4.47)的级数解的比较

在域内的任何内部点，解的梯度分量能够计算。对单元e中点(x, y)，有

$$\left.\begin{aligned} q_x(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} u_i^{(e)} \frac{\partial \psi_i^{(e)}}{\partial x} \\ q_y(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} u_i^{(e)} \frac{\partial \psi_i^{(e)}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad n = 3 \text{或} 4 \tag{4.68}$$

注意，对线性三角形单元，在整个单元上q_x和q_y是常数，因此它们在线性矩形单元里是线性的（q_x在y向是线性的，而q_y在x向是线性的）。例如，研究单元1。

三角形单元（4单元）

$$q_x^{(1)}=\frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{3}u_i^{(1)}\beta_i^{(1)}=2(u_2-u_1)=2(U_2-U_1)$$

$$=-0.16667 \tag{4.69a}$$

$$q_y^{(1)}=\frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{3}u_i^{(1)}\gamma_i^{(1)}=2(U_3-U_2)=-0.10417$$

矩形单元（4单元）

$$q_x^{(1)}=\sum_{i=1}^{4}u_i^{(1)}\frac{\partial\psi_i^{(1)}}{\partial x}=-2U_1(1-2y)+2U_2(1-2y)$$

$$+4yU_5-4yU_4$$

$$q_x^{(1)}(0.25,0.25)=-0.11785 \tag{4.69b}$$

$$q_y^{(1)}=\sum_{i=1}^{4}u_i^{(1)}\frac{\partial\psi_i^{(1)}}{\partial y}=-2U_1(1-2x)+2U_2(1-2x)$$

$$+4xU_5-4xU_4$$

$$q_y^{(1)}(0.25,0.25)=-0.11785$$

由16单元网格得到的，沿 x 轴（$y=0.125$）q_x 曲线示于图4.10。

应该指出，这里考虑的问题〔即方程式(4.47)〕有几种物理解释（见表2.2）。该问题能视为在一个均匀内部热交换的单位正方形里求温度u的问题。其$x=0$和$y=0$的边是隔热的，而另两边假设温度为0（或者等价地视为四边温度为0的边长为2的正方形；其$x=0$和$y=0$的边能解释为对称线）。

方程式的另一种解释是：假设每单位长度θ的扭矩角等于$(2G)^{-1}$的一个横截面积为2平方吋的杆的扭转问题。这里，G是剪切模量（磅/平方吋）。在这种情况下，u表示 Prandtl 应力函数，而解的梯度分量是应力（它是很有意义的）：

$$\tau_{zx}=\frac{\partial u}{\partial y}\qquad \tau_{zy}=-\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.70}$$

方程式（4.47）的第三种解释由地下水流问题（渗流）来提

供。在这种情况下，u表示测压计的水头大小（从蓄水层底部测量），而f是充水量（充水是负值）。流速用下式给出

$$v_1 = -a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad v_2 = -a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.71}$$

式中，a_{11}和a_{22}是渗透系数。（在这例中，我们有$a_{11}=a_{22}=1$）。

这里考虑该题的最后例子是一个固定在边界上和承受单位集度均布荷载的2平方吋薄膜。在这种情况下，u代表薄膜的横向挠度。

下面两个例题与理想液体（即无粘性液体）无旋流有关。能够近似这样流动的物理问题的例子有周绕物体（例如拦河坝、机翼、建筑物等）的流动和通过地面与水坝的水流动。决定这些流动的方程式是式（4.1）的一种特殊情况，即 Laplace 方程。因此，能使用较早导出的这些物理问题模型的有限元方程式。由于在这两个例子中包括非四边形边界的讨论，仅使用三角形单元的网格。为了得到相同的离散化精确值，使用既包含三角形单元又包含矩形单元的网格是可能的。然而，为简单起见，我们将不使用具有两种不同形式单元的网格。在4-8节关于有限元方法的计算机使用中，将重提这些例子。

例题4.2（圆柱体限流）圆柱体（它被安放在两个长的水平墙间，其轴线与墙间流平面垂直；见图4.11a）周围理想液体（即——无粘性液体）的无旋流，用有限元方法来分析。符合流动的方程式用下式给出

$$-\nabla^2 u = 0 \qquad 在\Omega中 \tag{4.72}$$

式中，u可能是下面两个函数之一：（1）u是流量函数，或（2）u是速度势。如果u是流量函数ψ，流场的速度分量为

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.73}$$

如果u是速度势ϕ，速度分量能从下式来计算

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{4.74}$$

在任何一种情况里，速度场不受常数项的影响，常数项是在解算

u中出现的。

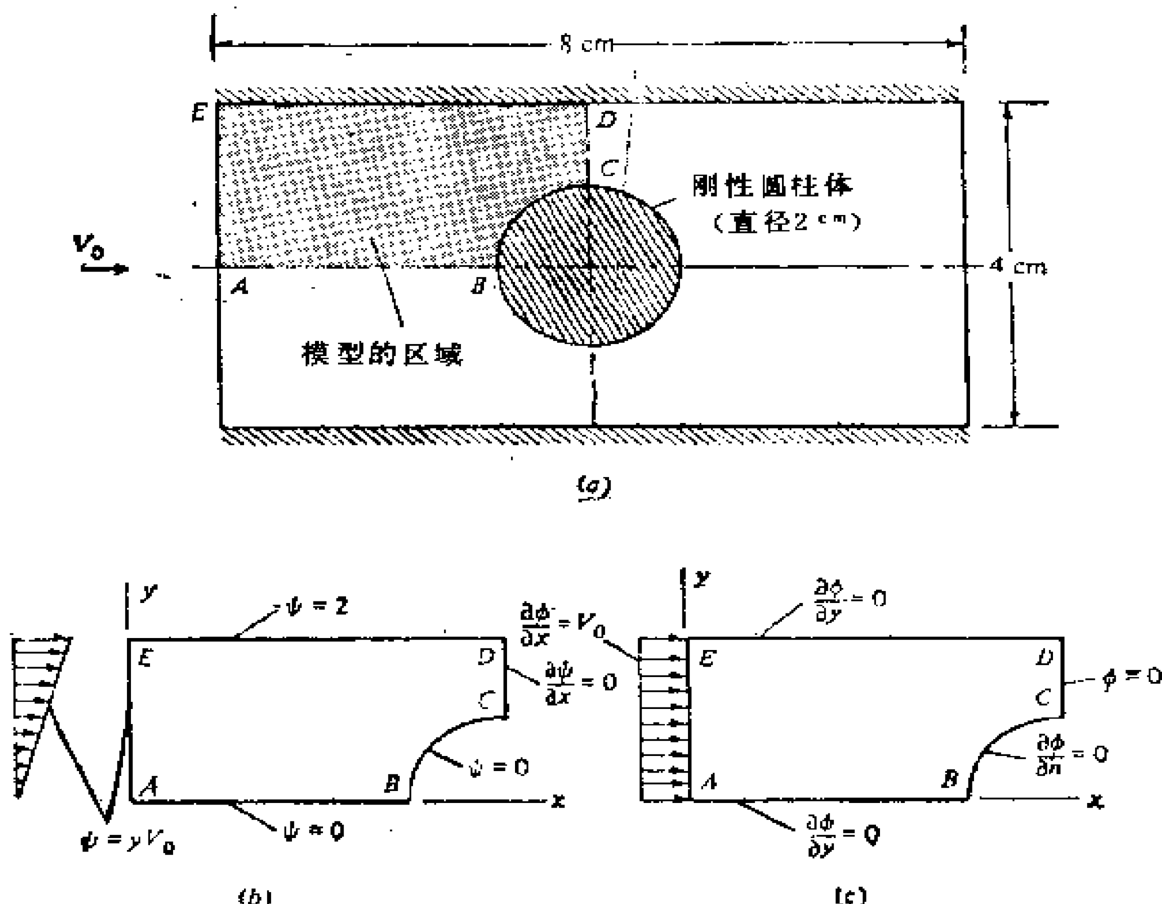


图4.11　圆柱体周围无旋流的流量函数和速度势公式的域和边界条件：(*a*)圆柱体周围的流动域；(*b*)流量函数公式；(*c*)速度势公式

流量函数方程

流量函数ψ的边界条件按如下方法确定（见图4.11*b*）。流线具有这种性质，与其垂直的流动为零。因此，固定的墙与流线相一致。由于对水平和垂直的中心线双轴对称，在分析中仅需用到域的四分之一（譬如说$ABCDE$）。事实上，与对称水平线垂直的速度分量等于零，使得我们用对称水平线作为流线。因为速度场取决于两条流线的相对差值，我们取与圆柱体对称轴重合的流线值为零（$\psi_A=0$），于是从下述条件确定上部墙上的ψ值

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=V_0$$

式中，V_0是平行于流线的液体的速度。由于V_0仅在进口处已知，我们用积分上述方程的方法确定在E点上的流线值：

$$\int_{\psi_A}^{\psi_E} d\psi = \psi_E - \psi_A = \int_{y_A}^{y_E} V_0 dy = V_0(y_E - y_A)$$

或

$$\psi_E = \psi_A + V_0(y_E - y_A) \tag{4.75}$$

由于在进口处速度是不变的（即常数），在进口处ψ值从A点的0线性地变化到E点的$V_0 y_E$。

在选择网格时，我们应注意到速度场在进口处是不变的（即流线是平行的），且在出口处取它为一抛物线分布（沿CD）。因此，在进口处网格应是均匀的，而接近圆柱体的网格是更加密的（能模拟曲线边界，且在ψ中取急变化）。使用一个具有15个三角形单元和14个结点的有限元网格（见图4.12a）。为了说明问题，选用粗的网格，接着将讨论一个加密的网格的结果（见图4.13）。应该注意：由于用直线近似圆柱弧线，离散性误差（见图4.12a中的阴影部分）不是零。

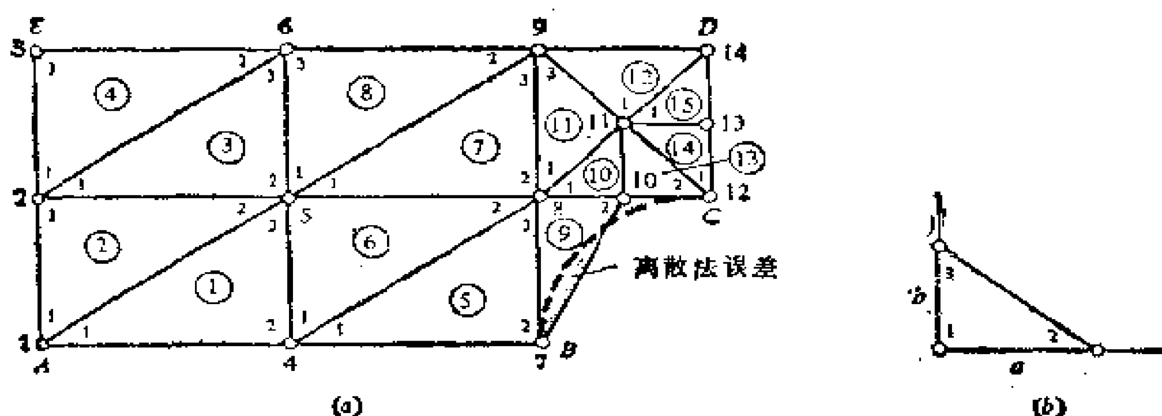


图4.12　圆柱体周围无旋流三角形单元的有限元网格：(a)三角形单元的有限元网格（15个单元和14个结点）；(b)典型的直角单元

单元矩阵的计算是简单的。对一个典型的直角单元（见图4.12b），单元系数矩阵为

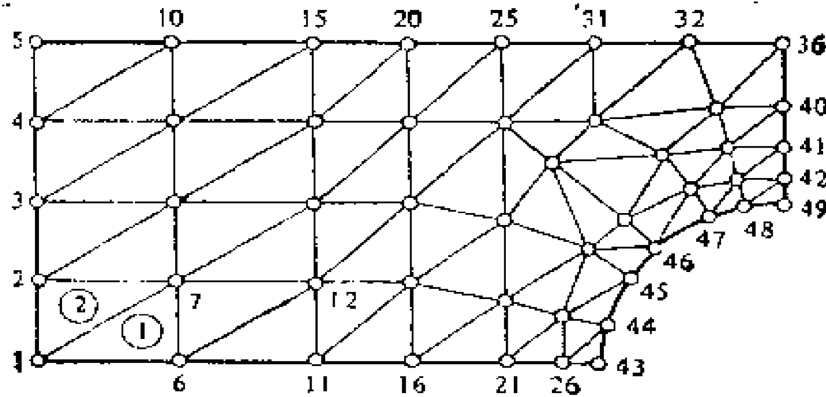


图4.13　圆柱体周围流的加密的有限元网格（69个单元和49个结点）

$$[K^{(e)}]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha+\beta & -\alpha & -\beta\\ -\alpha & \alpha & 0\\ -\beta & 0 & \beta\end{bmatrix}\qquad \alpha=\frac{a}{b}\quad \beta=\frac{b}{a}$$

（4.76）

注意，单元矩阵仅与单元边长比有关，而与单元的大小无关。对网格中的单元1，存在（注意典型单元与单元1局部结点编号间的对应关系）

$$[K^{(1)}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{12} & -\frac{3}{4}\\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

为了简短起见，单元矩阵的集合在此不介绍。局部结点和总结点间的对应关系（也就是相关矩阵）为

$$[B] = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15 \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}}{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \\ 5 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 8 & 10 & 11 \\ 8 & 11 & 9 \\ 11 & 14 & 9 \\ 10 & 12 & 11 \\ 12 & 13 & 11 \\ 11 & 13 & 14 \end{bmatrix}} \tag{4.77}$$

注意，集合的力矢量仅在内力$Q_i^{(e)}$提供（因为在此题中$f = 0$）。

与初始结点值有关的已知边界自由度（即广义位移）是（$V_0 = 1$）

$$U_1 = U_4 = U_7 = U_{10} = U_{12} = 0.0 \qquad 0\text{流线}$$
$$U_3 = U_6 = U_9 = U_{14} = 2.0 \qquad \text{上部边界} \tag{4.78}$$
$$U_2 = 1.0 \qquad \text{由于沿线} x = 0\text{，}\psi\text{的线性变化}$$

已知总的广义力是

$$F_5 = F_8 = F_{11} = F_{13} = 0 \tag{4.79}$$

注意，在C和D点，存在U和F两个边界条件。然而，我们选择基本边界条件来代替自然边界条件（象我们在例题4.1中所做的一样）。

方程式的聚缩体系由四个未知量U_5，U_8，U_{11}和U_{13}组成的四个方程式

$$\begin{bmatrix} K_{55} & K_{58} & K_{5(11)} & K_{5(13)} \\ & K_{88} & K_{8(11)} & K_{8(13)} \\ & & K_{11(11)} & K_{11(13)} \\ & & & K_{13(13)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_8 \\ U_{11} \\ U_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_5 \\ \hat{F}_8 \\ \hat{F}_{11} \\ \hat{F}_{13} \end{Bmatrix} \tag{4.80}$$

式中，修正的力分量$\hat{F}_i$（由于非零的确定位移）为

$$\hat{F}_i = F_i - \sum_{j=1}^{14} K_{ij} U_j \quad i = 5,8,11,13 \quad j \neq 5,8,11,13 \tag{4.81}$$

例如，$\hat{F}_5$用下式给出〔考虑到方程式（4.78）和（4.79）〕

$$\hat{F}_5 = -K_{62} - 2(K_{53} + K_{56} + K_{59} + K_{5(14)})$$

解方程组（4.80）得到

$$U_5 = 0.93913 \quad U_8 = 0.60436 \quad U_{11} = 1.0863 \quad U_{13} = 1.0432 \tag{4.82}$$

由于我们对ψ的梯度（也就是速度矢量）感兴趣，所以，在每个单元里应计算$\partial\psi/\partial x = -u_2$和$\partial\psi/\partial y = u_1$。其结果列在表4.2之

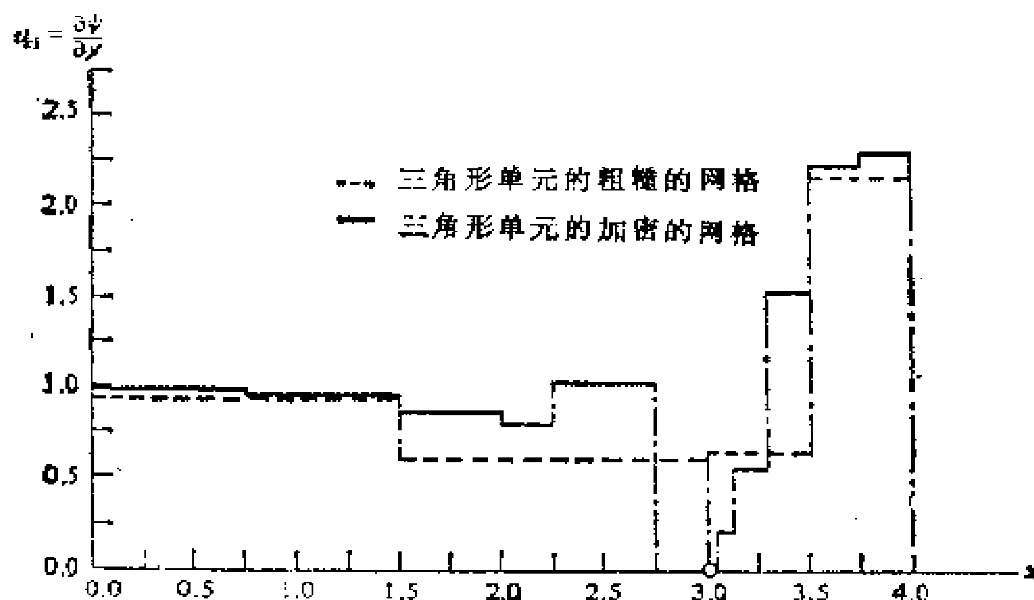


图4.14　沿水平对称线和圆柱体表面的水平速度曲线（流函数公式）

中。注意，单元1，4，5，8，12和13不存在与预期的流动场是一致的垂直速度。最大的水平速度发生在单元13。图4.14所示为利用沿（水平）对称线两种网格得到的水平速度曲线。

表4.2　圆柱体流动的流量函数公式和速度势公式解的梯度+ (cm/s)

单　元	$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-u_2$	$\frac{\partial\psi}{\partial y}=u_1$	$\frac{\partial\phi}{\partial x}=u_1$	$\frac{\partial\phi}{\partial y}=u_2$
1	0.0	0.9391	0.9757	0.0570
2	−0.0406	1.0000	1.0029	0.0162
3	−0.0406	1.0609	1.0029	0.0356
4	0.0	1.0000	1.0184	0.0123
5	0.0	0.6044	0.8048	0.4024
6	−0.2232	0.9391	1.0350	0.0570
7	−0.2232	1.3956	1.0350	0.1707
8	0.0	1.0609	1.1251	0.0356
9	−1.2087	0.6044	1.1717	0.4024
10	−1.2087	2.1727	1.1717	0.5509
11	−0.4317	1.3956	1.5519	0.1707
12	0.0	1.8273	1.6217	0.2405
13	0.0	2.1727	2.4132	0.5509
14	−0.0863	2.0863	1.8623	0.0
15	−0.0863	1.9137	1.8623	0.0

+ψ表示流量函数，而ϕ表示速度势。

速度势公式

速度势ϕ的边界条件能按如下得出（见图4.11c）。事实上，在上部墙上和水平对称线上一样，$u_2=\partial\phi/\partial y=0$给出了那里的边界条件。沿$AE$速度$u_1=\partial\phi/\partial x=-\partial\phi/\partial n$规定是$V_0(=1)$。沿$CD$必须知道$\phi$或者$\partial\phi/\partial n=\partial\phi/\partial x$。因为$u_1=\partial\phi/\partial x$在那里是不知道的，我们假设$\phi$是已知的，且令$\phi$等于常数（比如说是零）来完善边界条件。注意，设$CD$上$\phi=0$，消去解中的任意常数（即刚体运动）。由于速度场取决于ϕ的梯度，对CD上的ϕ能使用任意常数，且对$\nabla\phi$得到相同的结果。

用于流量函数中的粗的网格在此应用。给定的初始结点值是

（见图4.12）

$$U_{12}=U_{13}=U_{14}=0 \tag{4.83}$$

除结点1，2，3，12，13和14外，所有结点上的广义力是零。在结点5，8和11上，力的内部平衡给出 $F_5=F_8=F_{11}=0$；我们有 $q_n \equiv \partial\phi/\partial n=0$，所以在结点4，6，7，9和10处$F_i=0$。在结点12，13和14处，$Q_i^{(e)}$ 是未知量。在结点1，2和3处，$\partial\phi/\partial n=q_n$定为$-1$。我们必须计算单元2边界1—3和单元4边界1—3上的积分（4.41）。因为边界是沿着y轴，存在$\psi_1^{(2)}=1-y$，$\psi_3^{(1)}=y$和$h=1$。因此得到

$$Q_i^{(2)}=\int_0^1(-1)\psi_i(y)dy=-\frac{1}{2}$$
$$Q_i^{(4)}=\int_0^1(-1)\psi_i(y)dy=-\frac{1}{2} \tag{4.84a}$$

其$i=1$和3。在总结点1，2和3处将这些值代入总的力分量，给出

$$F_1=-0.5 \quad F_2=-(0.5+0.5) \quad F_3=-0.5 \tag{4.84b}$$

在本公式中，聚缩矩阵是11×11。方程式的解（在数字计算机上）为

$$U_1=4.8656 \quad U_2=4.8944 \quad U_3=4.8371 \quad U_4=3.4020$$
$$U_5=3.3490 \quad U_6=3.3094 \quad U_7=2.1948 \quad U_8=1.7924$$
$$U_9=1.6217 \quad U_{10}=1.2066 \quad U_{11}=0.9311 \tag{4.85}$$

本公式的速度分量$u_1=\partial\phi/\partial x$和$u_2=\partial\phi/\partial y$列在表4.2中，它与在流量函数公式中获得的值放在一起。其结果是与用对u_1的流量函数公式得到的值完全一致。

下面的例题说明在解地下水流问题中有限元模型的应用。

例题4.3 （地下水流或渗流）在xy平面中有流动的均匀蓄水层，其基本微分方程式用下式给出

$$-\left(a_{11}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+f=0 \quad 在\Omega中 \tag{4.86}$$

式中，a_{11}和a_{22}（假设是常数）分别是沿x和y方向的渗透系数（米/天）。ϕ是测压计的水头大小（米），它从参考水平面（通常是蓄水层的底部平面）测得。f是吸水率〔米³/（天・米³）〕。从前面讨论

知道，满足方程式（4.86）的自然的和基本的边界条件是

自然的条件

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}n_x + a_{22}\dfrac{\partial \phi}{\partial y}n_y = \phi_n \quad 在\Gamma_1上 \\ 基本的条件 \\ \phi = \phi_c \quad 在\Gamma_2上 \end{array}\right\} \tag{4.87}$$

式中，Γ_1和Γ_2是Ω域边界Γ的一部分，而且$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$。

研究在一个3000m×1500m矩形蓄水层Ω(见图4.15)中求等势能线ϕ的问题。该域的长边为不透水的材料(也就是$\partial\phi/\partial n = 0$)，而短边为200m的常值压力水头($\phi_0 = 200$m)。此外，假设一条河穿过蓄水层，它以速度为0.24m^3/〔天·单位长度(m)〕的水量渗入蓄水层。还假定在坐标(1000，670)和(1900，900)的位置上安装两台水泵，分别以$Q_1 = 1200m^3/(天\cdot m^3)$和$Q_2 = 2400m^3/(天\cdot m^3)$的速度吸水。

一个具有64个三角形单元和45个结点的网格用于模拟此域(见图4.16a)。河形成单元(33，35，37，39)和单元(26，28，30，32)间的边界。注意，没有一台水泵安置在结点上。故意这样做的目的是为了阐明单元内点源广义力的计算。我们必须计算分布

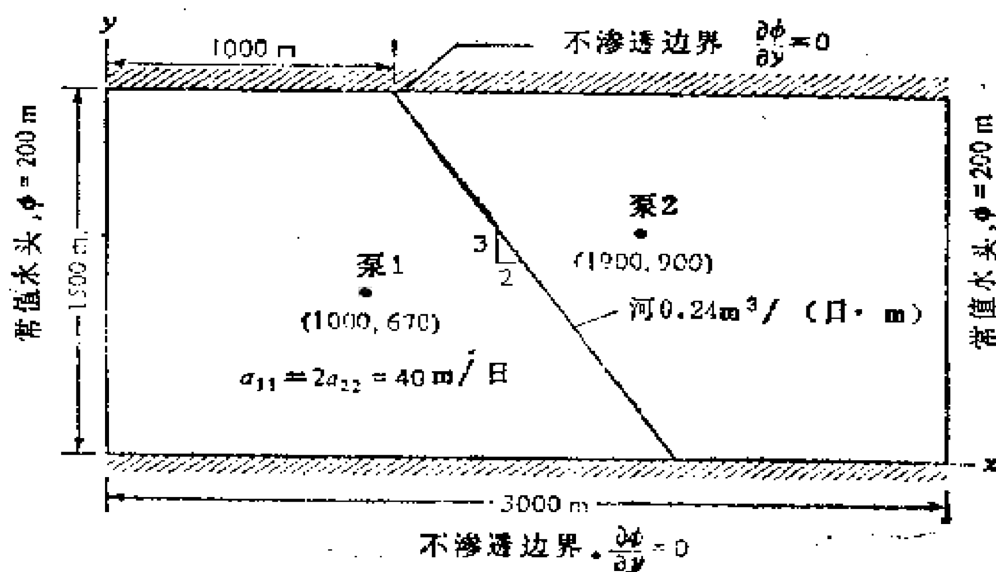


图4.15　例题4.3地下水流的几何尺寸和边界条件

的线源（即河）和点源（即泵）的广义力分量。单元系数矩阵的计算此刻应该是惯例性的任务。让我们专心于由已给公式计算广义力。

首先研究线性源。我们能够视河为一常集度〔$0.24\mathrm{m}^3/$（天·m)〕的源。因为河的长度被结点21至结点25均匀地划分（成为四部分），我们能用在结点21到25每结点求积分值的方法计算河的渗透值：

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{结点21} & \int_0^h (0.24)\psi_1^{(1)} ds \\
\text{结点22} & \int_0^h (0.24)\psi_2^{(1)} ds + \int_0^h (0.24)\psi_1^{(2)} ds \\
\text{结点23} & \int_0^h (0.24)\psi_2^{(2)} ds + \int_0^h (0.24)\psi_1^{(3)} ds \\
\text{结点24} & \int_0^h (0.24)\psi_2^{(3)} ds + \int_0^h (0.24)\psi_1^{(4)} ds \\
\text{结点25} & \int_0^h (0.24)\psi_2^{(4)} ds
\end{array}\right\} \tag{4.88}
$$

对于常集度q_0以及线性插值函数$\psi_1(s)=1-s/h$和$\psi_2(s)=s/h$，这些积分的值为大家所熟知

$$
\int_0^h q_0\psi_i ds = \frac{q_0 h}{2} \quad h = \frac{1}{4}\{(1000)^2+(1500)^2\}^{1/2} \tag{4.89}
$$

$$
q_0 = 0.24
$$

下面我们考虑点源的作用。因为点源位于单元内部，我们用插值来区别单元结点源。例如，泵1（位于单元19）源给出

$$
Q_1(x, y) = -1200\delta(x-1000)\delta(y-670) \tag{4.90a}
$$

式中，$\delta(\cdot)$是在方程式(2.110)中的Dirac变量增量函数。有

$$
f_i^{(19)} = \int_{\text{面积}} Q_1(x,y)\psi_i dxdy = -1200\psi_i^{(1)}(1000, 670) \tag{4.90b}
$$

单元19的插值函数是（根据$\bar{x}$和$\bar{y}$坐标系，见图4.16c）

$$
\psi_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i\bar{x} + \gamma_i\bar{y})
$$

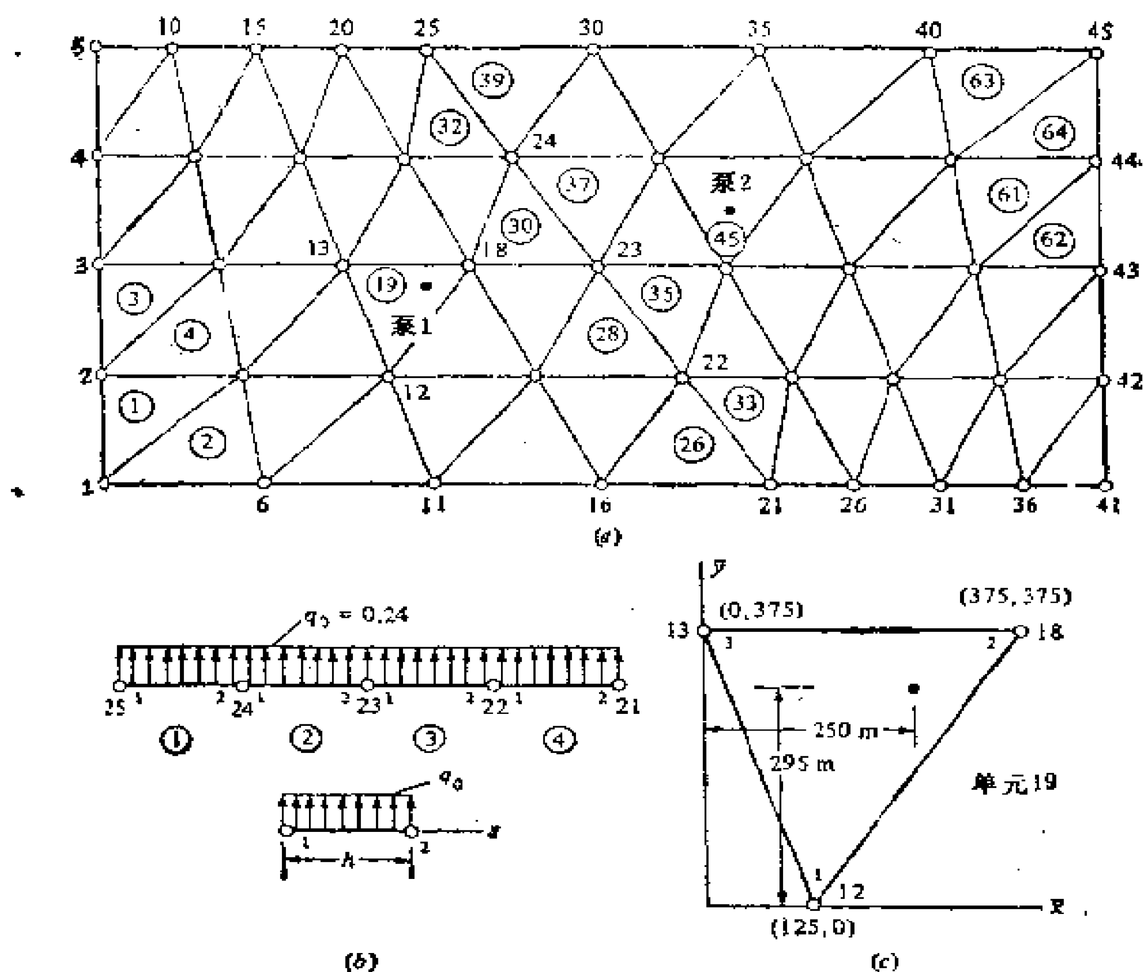


图4.16　地下水流（渗流）的有限元网格和力分量的计算：(a)三角单元的有限元网格(45个结点和64个单元)；(b)河渗入的总力的计算；(c)位于单元19内的泵1总力的计算

$$A=\frac{1}{2}(375)^2 \quad \alpha_1=(375)^2 \quad \alpha_2=-375(125)$$

$$\alpha_3=375(125) \quad \beta_1=0 \quad \beta_2=375 \tag{4.91a}$$

$\beta_3=-375$　$\gamma_1=-375$　$\gamma_2=125$　$\gamma_3=250$　有$\bar{x}=x-750$和$\bar{y}=y-375$，因此

$$\psi_1(250,\ 295)=0.2133 \quad \psi_2(250,\ 295)=0.595$$

$$\psi_3(250,\ 295)=0.1911 \tag{4.91b}$$

对泵2可做相同的计算。于是，已知的广义位移（m）和非零的力〔$m^3/(天\cdot m^3)$〕为

$$U_1=U_2=U_3=U_4=U_5=U_{41}=U_{42}=U_{43}=U_{44}=U_{45}=200.0$$

$$F_{21}=54.08 \quad F_{22}=F_{23}=F_{24}=108.17 \quad F_{25}=54.08$$

$$F_{12}=-255.6 \quad F_{13}=-299.2 \quad F_{18}=-715.2$$

$$F_{28}=-1440.0 \quad F_{29}=-410.4 \quad F_{34}=-549.6 \qquad (4.92)$$

结点6至11，14至17，19，20，26，27，30至33和35至40上总力是0。这完成了该问题有限元模型的数据构造。

未知量U_i(在结点上测压计的水头)方程式的解与速度矢量一起如图4.17*所示。等值线ϕ如图4.17a**所示。最大的(水的)减少

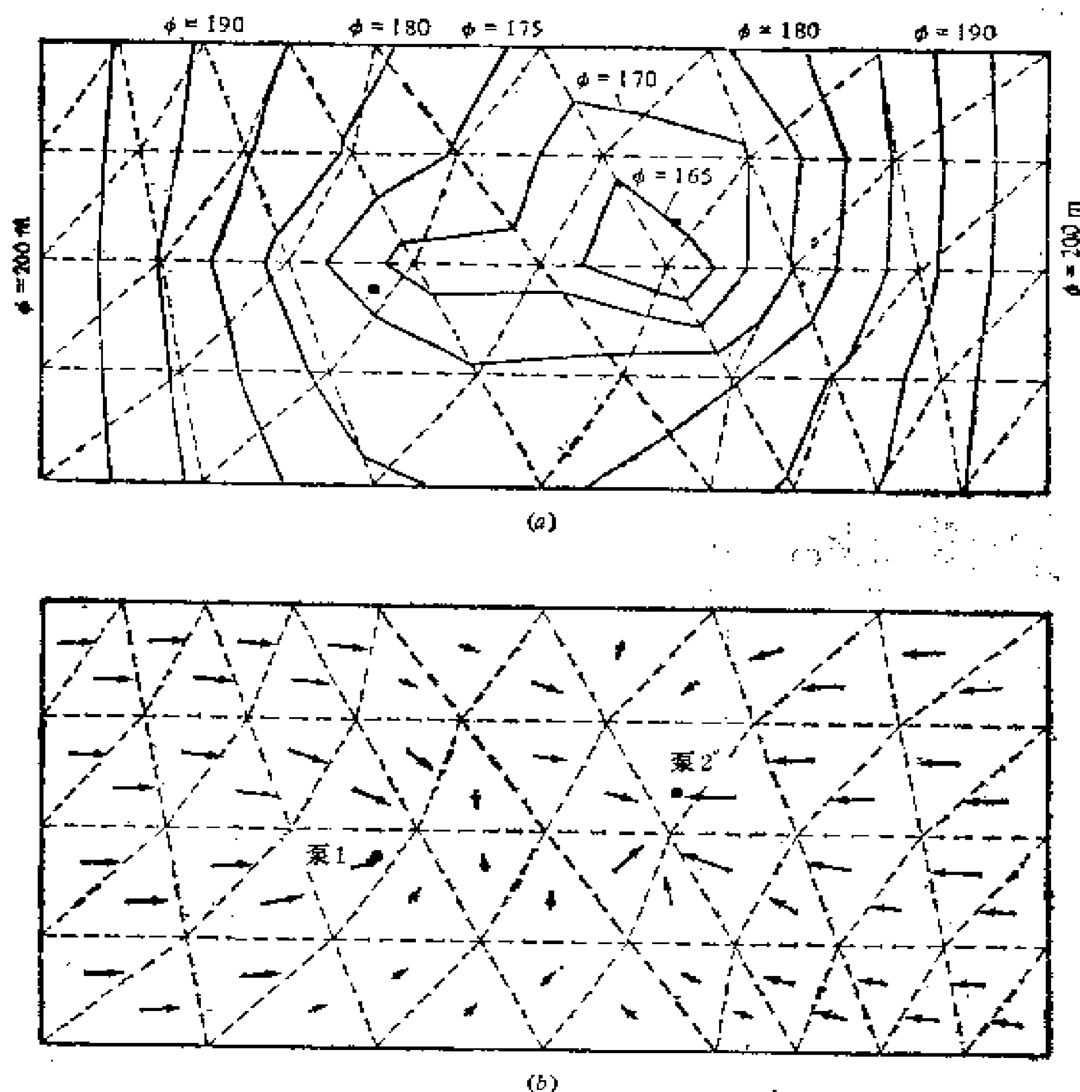


图4.17　常值压力水头的图和地下水流的速度矢量：(a)等值线ϕ；(b)速度矢量图

---

*图4.17误为图4.17a；**图4.17a误为图4.17b——译者注

发生在结点28，此处具有从泵2排出水的最大量。当然，在典型的有限元分析中应该看到，任何问题的点源都位于结点处。此题若设泵1和泵2于结点处，采用另一种网格求解可留下作为一个习题。

本节中最后的例题是与热传导问题有关的有限元分析。

例题4.4（对流热传导问题） 我们这里研究一个（比在例题4.1中研究的）更普遍的热传导问题。更确切地说，我们研究包含对流现象的热传导问题的有限元分析（也就是在固体和周围液体介质间的能量交换）。基本方程式是以前讨论过的一种特殊情况：式

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)=f \qquad (4.93)$$

中，T是温度，k_x和k_y分别是沿x和y方向的传导系数〔Btu/(h·ft·°F)或W/(h·m·K)〕，而f是单位体积的内部发热量〔Btu/(h·ft³)或W/(h·m³)〕，正如我们前面所见，基本边界条件包含特征值T；自然边界条件包含热通量特征值$\hat{q}_n$(Btu/h或W/h)，所以

$$\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial T}{\partial y}n_y\right)+\beta(T-T_\infty)-\hat{q}=0 \qquad (4.94)$$

式中，β是对流传导率〔或对流热传导系数，单位是Btu/(h·ft²·°F)或W/(h·m²·K)〕。T_∞是液体介质周围的温度。第一项考虑传导的热交换，第二项考虑对流的热交换，而第三项考虑给定的热通量。方程式(4.94)中$\beta(T-T_\infty)$项的出现，要求对方程式(4.10)、(4.13)和(4.14)作某些修改。

方程式(4.93)的变分式可以作为方程式(4.8)的特殊情况得出。在方程式(4.8)中，边界积分应该修改，以考虑对流热传导项：

$$0=\int_{\Omega^e}\left(k_x\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+k_y\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-vf\right)dxdy+\oint_{\Gamma^e}v\left[\beta^{(e)}(T-T_\infty)-q_n^{(e)}\right]ds \qquad (4.95)$$

式中，v是试函数。

将T的公式(4.11)的有限元近似式代入方程式(4.95)，得到

方程式(4.95)的有限元模型，结果为

$$\sum_{j=1}^{n}[K_{ij}^{(e)}+H_{ij}^{(e)}]T_j^{(e)}=F_i^{(e)}+P_i^{(e)} \tag{4.96}$$

式中，

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega^e}\left(k_x\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+k_y\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy$$

$$F_i^{(e)}=\int_{\Omega^e}f\psi_i dxdy+\oint_{\Gamma^e}q_n^{(e)}\psi_i ds\equiv f_i^{(e)}+Q_i^{(e)} \tag{4.97}$$

$$H_{ij}^{(e)}=\beta^{(e)}\oint_{\Gamma^e}\psi_i\psi_j ds \qquad P_i^{(e)}=\beta^{(e)}\oint_{\Gamma^e}\psi_i T_\infty ds$$

注意，设$\beta=0$，我们得到未考虑对流的热传导模型。

对线性插值函数，三角形单元的系数矩阵$H_{ij}^{(e)}$和$P_i^{(e)}$为

$$[H^{(e)}]=\frac{\beta_{12}^{(e)}h_{12}^{(e)}}{6}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{\beta_{23}^{(e)}h_{23}^{(e)}}{6}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

$$+\frac{\beta_{31}^{(e)}h_{31}^{(e)}}{6}\begin{bmatrix}2&0&1\\0&0&0\\1&0&2\end{bmatrix} \tag{4.98a}$$

$$\{P^{(e)}\}=\frac{\beta_{12}^{(e)}T_\infty h_{12}^{(e)}}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}+\frac{\beta_{23}^{(e)}T_\infty h_{23}^{(e)}}{2}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix}$$

$$+\frac{\beta_{31}^{(e)}T_\infty h_{31}^{(e)}}{2}\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix} \tag{4.98b}$$

式中，$\beta_{ij}^{(e)}$是单元e边$i-j$的对流系数，而$h_{ij}^{(e)}$是边$i-j$的长度。对矩形单元，相似的方程式可适用〔例如，将零的列和行加到头两个矩阵，且在方程式(4.98a)中多加边3－4和边4－1的两个矩阵〕。注意，在实际计算中，不需要计算所有单元的$[H^{(e)}]$和$\{P^{(e)}\}$；对流项的作用仅对它的边界可能受到外界温度影响的单元才应计算。恰恰在这些单元中，须计算对受对流热传导边界条件的边上

结点的作用。

作为例子，研究带一个2cm圆孔的8cm×4cm矩形板的热传导(域的几何图形见图4.11a)。外边界上（即在长边和短边上）的温度是20℃；圆孔内有200℃的液体。板的热传导性是10W/(cm·K)，而板和液体介质间的对流热传导系数是15W/(cm²·K)。要求确定板中温度的分布（对$f=\hat{q}=0$时)。

利用双轴对称，仅以域的四分之一为模型。在此计算中，采用图4.12和图4.13的两种有限元网格。我们讨论粗网格的公式，然后提出对加密网格的结果。单元9和13的边1-2受到外界温度的影响。因此，应修改单元9和13的单元矩阵以便计算下述矩阵：

$$[H^{(9)}]=\frac{15h}{6}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad \{P^{(9)}\}=\frac{15(473)h}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$h=\sqrt{1+(0.5)^2}$$

$$[H^{(13)}]=\frac{15(0.5)}{6}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad (4.99)$$

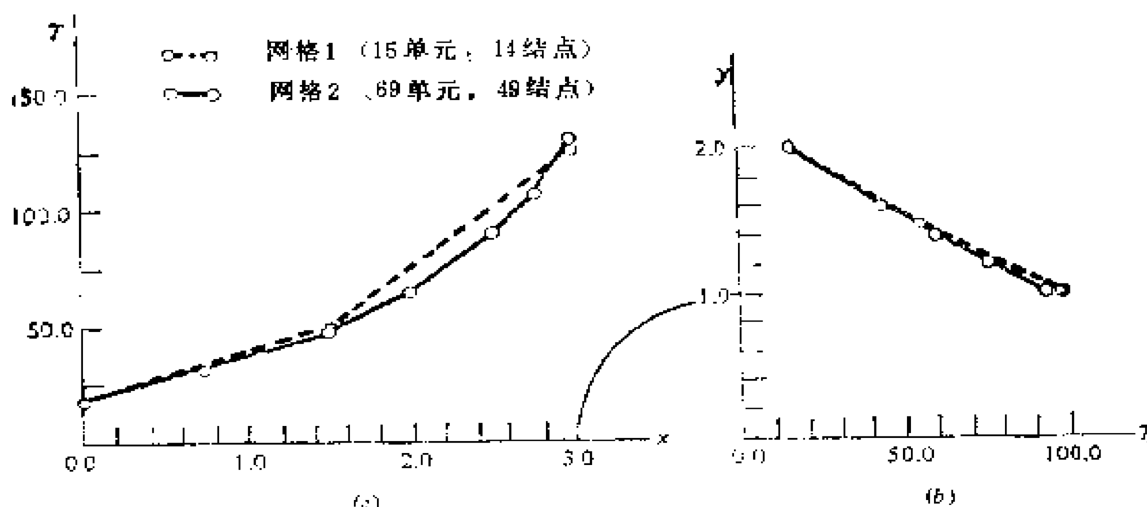


图4.18 沿对称线的温度分布(℃)(例题4.4)：(a)沿水平对称线的温度分布；(b)沿垂直对称线的温度分布

$$\{P^{(13)}\} = \frac{15(473)(0.5)}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

表4.3　例题4.4温度梯度的大小和方向的有限元解

单　元	大　小	方向⁺（负值）	单　元	大　小	方向（负值）
1	164.36	6.7	44	953.47	27.19
2	150.44	0.0	46	945.12	44.39
3	159.81	19.72	48	725.35	46.49
4	114.5	0.0	49	778.85	66.41
5	139.24	34.69	50	732.16	65.33
7	111.18	56.31	51	802.89	79.11
8	0.0	0.0	52	792.37	79.11
16	92.50	90.0	53	658.36	90.0
21	214.85	90.0	54	815.52	90.0
25	512.08	15.19	55	882.31	86.61
26	445.39	10.14	56	1018.10	60.21
27	559.19	38.37	57	831.16	62.22
28	369.12	34.92	58	925.68	75.95
29	528.34	55.05	59	870.03	75.67
30	332.01	61.13	60	927.49	86.77
31	518.67	72.00	61	919.28	85.89
32	332.95	90.0	62	1031.2	59.29
33	697.98	9.25	63	1083.1	75.26
34	723.34	10.69	64	1163.3	72.53
35	666.18	31.88	65	982.68	74.49
37	654.40	55.22	66	1050.1	85.15
39	595.00	73.89	67	1029.3	86.09
41	493.27	90.0	68	1114.7	85.56
42	911.43	9.3369	69	1146.4	84.34

⁺从正的x轴按逆时针方向测量。

例如，单元13的单元方程式为

$$
\begin{bmatrix} 10+2.5 & -5+1.25 & -5+0 \\ -5+1.25 & 5+2.5 & 0+0 \\ -5+0 & 0+0 & 5+0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{(13)} \\ T_2^{(13)} \\ T_3^{(13)} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} Q_1^{(13)} \\ Q_2^{(13)} \\ Q_3^{(13)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1773.75 \\ 1773.75 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (4.100)
$$

关于初始和次自由度给定的边界条件是（注意到在对称线上$\partial T/\partial n=0$）

$$
U_1=U_2=U_3=U_6=U_9=U_{14}=20℃=293\text{K} \quad (4.101a)
$$

$$
F_4=F_5=F_8=F_{11}=F_{13}=0 \quad F_7=3966.23
$$

$$
F_{10}=3966.23+1773.75 \quad F_{12}=1773.75 \quad (4.101b)
$$

解方程式给出（绝对温度）

$$
U_4=323.32 \quad U_5=313.45 \quad U_7=398.02 \quad U_8=357.74
$$

$$
U_{10}=389.79 \quad U_{11}=337.19 \quad U_{12}=395.08 \quad U_{13}=340.62 \quad (4.102)
$$

对于图4.12和4.13所示的两种不同网格，沿对称线的温度曲线在图4.18中给出。在每个单元中，温度梯度的大小和方向（用加密网格得到）给在表4.3中。

4-3 关于网格形成和边界条件引入的几点说明

4-3-1 域的离散化

已知域（假设域的物理条件已经确定）用一群简单几何图形即有限元来表示，它要求有限元专业人员有工程判断能力。用于已知问题单元的数量、型式（即线性方程式，二次方程式）、形状（即三角形、矩形）、尺寸和密集度（即网格的精细）取决于考虑的情况。首先考虑的是用尽可能接近精确的单元离散域（后面将会看到，可以采用不同的单元得到近似域和近似解）。在离散某域时，必须考虑点源、不连续的分布源（即源集度方面的突然变化）以及材料和几何形状（包含凹角）的不连续性的精确描述。例如，离散化包括点源处结点（为了将点源精确地集中在结点上）和凹角

处的结点，以及在几何形状和材料特性中有突然变化处单元内表面。第二个考虑需要做一些工程判断，它要求把物体和物体的局部离散成足够小的单元，以便精确地计算解的陡梯度。工程判断来源于对解的性能的定性分析（或直觉的知识）和包括网格精密（即减少单元的尺寸）计算费用的估计。例如，研究例题4.2圆柱体无旋流问题，从问题的物理定律（即流动的连续性）我们知道，流动从左边流入而从右边流出。因为流出的截面比流进的截面小，因此，在圆柱体的附近流动加速是必然发生的。从另一方面来说，远离圆柱体（即靠近入口）的速度场基本上是均匀的。流动的定性分析的这些知识允许我们在离圆柱体足够远的位置使用粗的网格（即单元在尺寸上相应的大），而在距离圆柱体近的位置使用加密的网格（见图4.13）。圆柱体附近使用加密网格的另一个目的（至少沿圆柱体表面的一层单元）是精确地表示那儿域的曲线边界。关于单元的形状，至今我们仅讨论了两种形状：三角形和矩形。因为矩形单元的网格与三角形单元的相应网格比较含有大的离散误差（在表示一曲线边界中），在例题4.3中采用了三角形单元的网格。当然，也能使用矩形单元（远离曲线边界）和三角形单元（接近曲线边界）二者都有的网格，或者用将在下一节中讨论的四边形的网格。通常，在几何尺寸、边界条件、荷载、材料特性剧烈改变的地方，需要加密的网格。

网格的加密应有三个条件：(1) 所有以前的网格应包括在现有（加密的）网格中；(2) 物体的每个点可包含在网格加密的任何阶段足够小的单元内；(3) 通过加密过程的所有阶段保持同样的近似程度。最后一个条件省去了在两种不同网格中两种不同近似值的比较。因为在收敛性研究中，一般不愿改变近似值的比例。当网格加密时，注意避免有很大高宽比的单元（即单元的一边长对另一边长的比值）。回顾单元矩阵(4.40)和(4.76)可知，系数矩阵取决于a对b和b对a的比值。如果a/b和b/a的值很大，所得的系数矩阵是病条件矩阵（即数字上是不可求逆的）。b/a的下限和上限分别认为是0.1和10。

"粗的"和"细的"词是相对的。在任何已知问题中，应该相信开始所用有限元网格是足以解在手边问题的网格（根据经验和工程判断）。然后作为第二次选择，选择包括大量单元（包括作为子集的第一次选择单元）的网格再次解这问题。如果两个解间存在明显的差别，这就看到网格加密的好处（认为进一步网格加密是正确的）。如果差别小到可以忽略不计，网格的进一步加密就不需要。用网格加密办法的数值试验，在实践中通常是不可行的（多数是因为计算费用的原因）。在计算费用为主的情况中，必须依靠你自己与合理网格有关的判断。由于大多数几何图形复杂的实际问题是用它们的工程公式（控制方程式）近似描述，不可能过分关注解的数值的精确性。引入方法各种误差的相对比例和范围的感性认识，帮助有限元实际工作者确定何时停止进一步加密网格。总之，已知问题分类有关的科学（或工程）知识和经验是任何分析方法必不可少的部分。

4-3-2 有限元数据的形成

有限元模型的一个重要部分是网格的形成，它包括对结点和单元编号，以及结点坐标和逻辑（Boolean）相关矩阵的形成。尽管组成这些数据的任务是十分简单的，但数据的类型影响到计算效率和精确度。更确切地说，结点的编号直接影响到最后（集合）方程式的带宽，因而影响到贮存单元的需要量和计算费用。例如，研究在图4.19中所示的有限元网格。在图4.19a中，结点在行方向从左到右编号，从底行开始，转向紧邻的上行，当这特定的行编号完毕后，重复这一过程。在图4.19b中，结点沿列方向从下向上编号，从最左列开始，当每列编完号时转向紧邻的列（右边）。单元可以任意地编号。两种情况下半带宽〔见方程式(3.220)〕分别为$11*DF$和$7*DF$，其中，DF是每结点初始未知量的数量。注意，单元的编号不影响半带宽。在分割最小数量的方向上对结点编号的办法得到较小的带宽。在通用网格形成的程序里，如此选择将包括求半带宽度的最小值。由于在解题中较小带宽度节约计算费用，特别是在包含大量结点的问题中，这是有重大价值的。

由于单元编号不影响半带宽，它影响需要集合（通常解方程式所需时间的比率小）总的系数矩阵所需的计算时间。

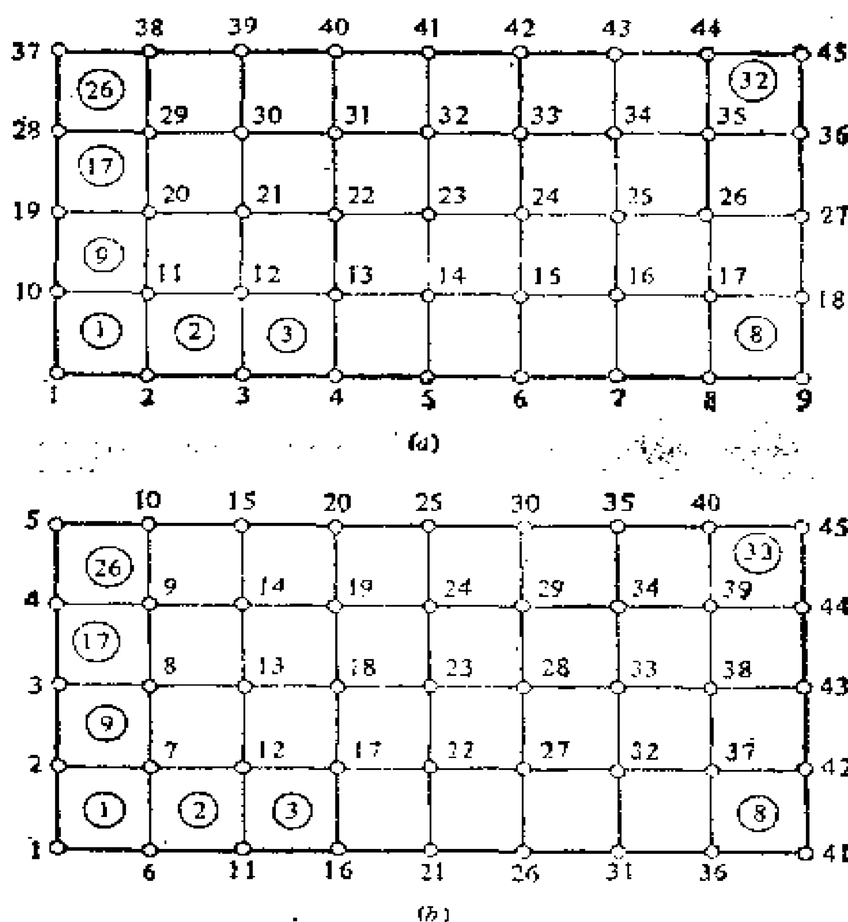


图4.19　两种常用的有限元结点编号方法：(a)方法I；(b)方法II

有限元解的精确性也取决于有限元网格的选择。例如，如果选择的网格破坏了存在于问题中的对称性，所得的解会比利用存在于问题中与物理对称相一致的网格的解精确性差。从几何上来说，三角形单元当与矩形单元相比较时，具有较少（或没有）对称线，所以，使用三角形单元网格时要留心（也就是说，选择网格要与存在于问题中的数学上对称相一致）。

4-3-3　边界条件的引入

在大多数感兴趣的问题中，遇到下述情况：已确定的自然边界条件的部分边界和已确定的基本边界条件的部分边界有一些共

同的点。换句话说，在这些点上，无论是初始自由度，或者是次自由度都是确定的。这样的点称为奇异点。显然，在相同的点上不能引入两个边界条件。作为一般的规则，在奇异点处应引入基本的边界条件（即对初始变量的边界条件），而忽略自然边界条件（即对次变量的边界条件）。例如，在本章讨论的所有例题中，我们遵循上述规则，在奇异点处只引入基本的边界条件。

在边界值问题的解中遇到另一种型式的奇异点是，在相同的边界点上用初始变量的两个不同值来表示。习题4.11提供这种情

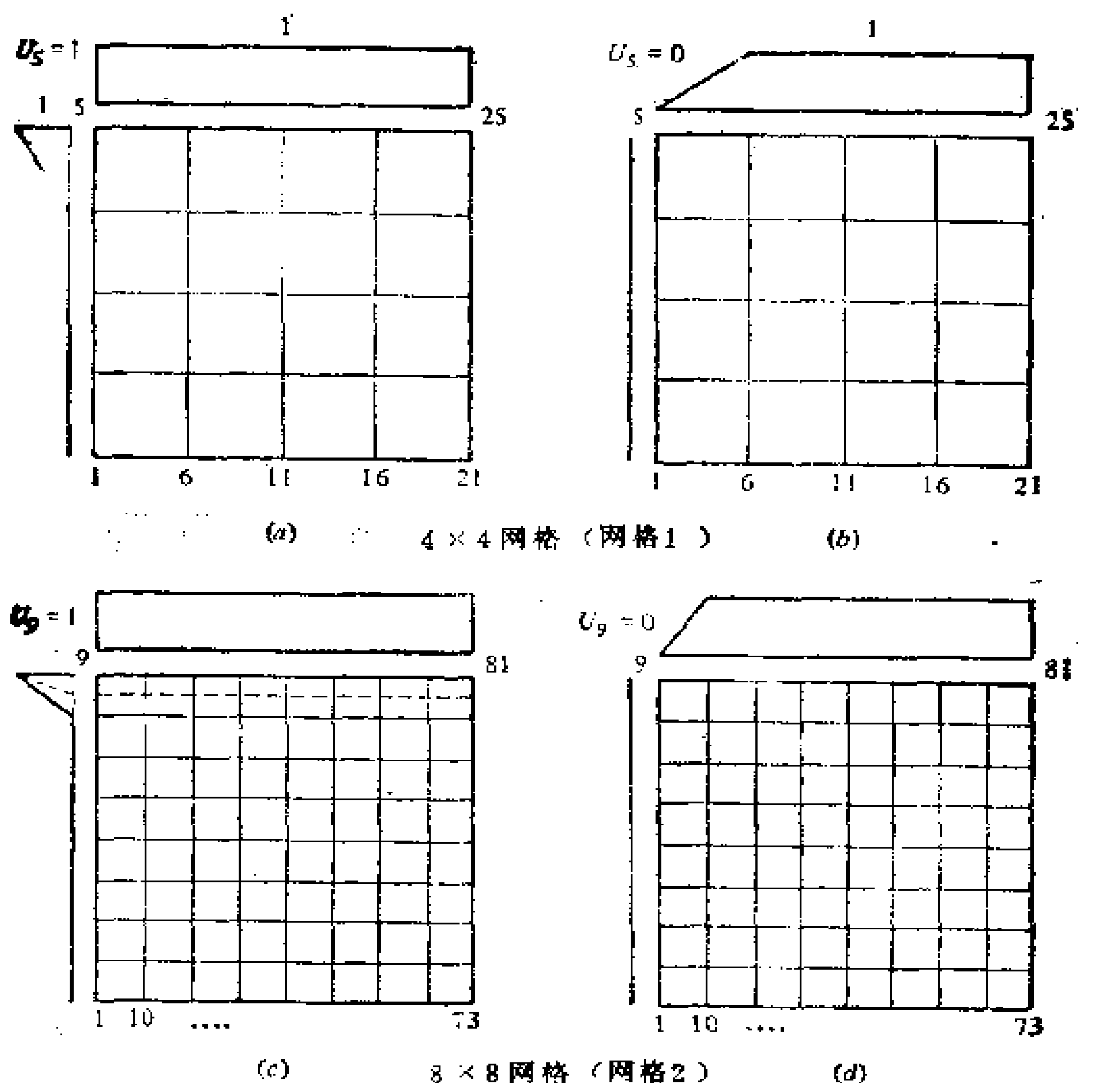


图4.20　在边界结点〔在(a)和(b)中的结点5和在(c)和(d)中的结点9〕处初始变量所确定的（任何一个）两个值的影响

况的一个例子，此例中，u在$x=0$线（对任何y）的边界上给定为零，而在$y=1$线（对任何x）的边界上其值是1。因此，在$x=0$和$y=1$处，u有两个不同的值。在有限元分析中，必须在此两个值间进行选择。在任何一种情况中，用一个近似的边界条件替代真正的边界条件。近似边界条件对真正的边界条件的精确度，取决于包括该点在内的单元尺寸的大小（见图4.20）。在奇异点附近，网格的加密经常得到可以接受的解答（至少在远离此点处，见习题4.13）。

本节作出的若干说明用例题4.1的问题加以说明。该问题有一

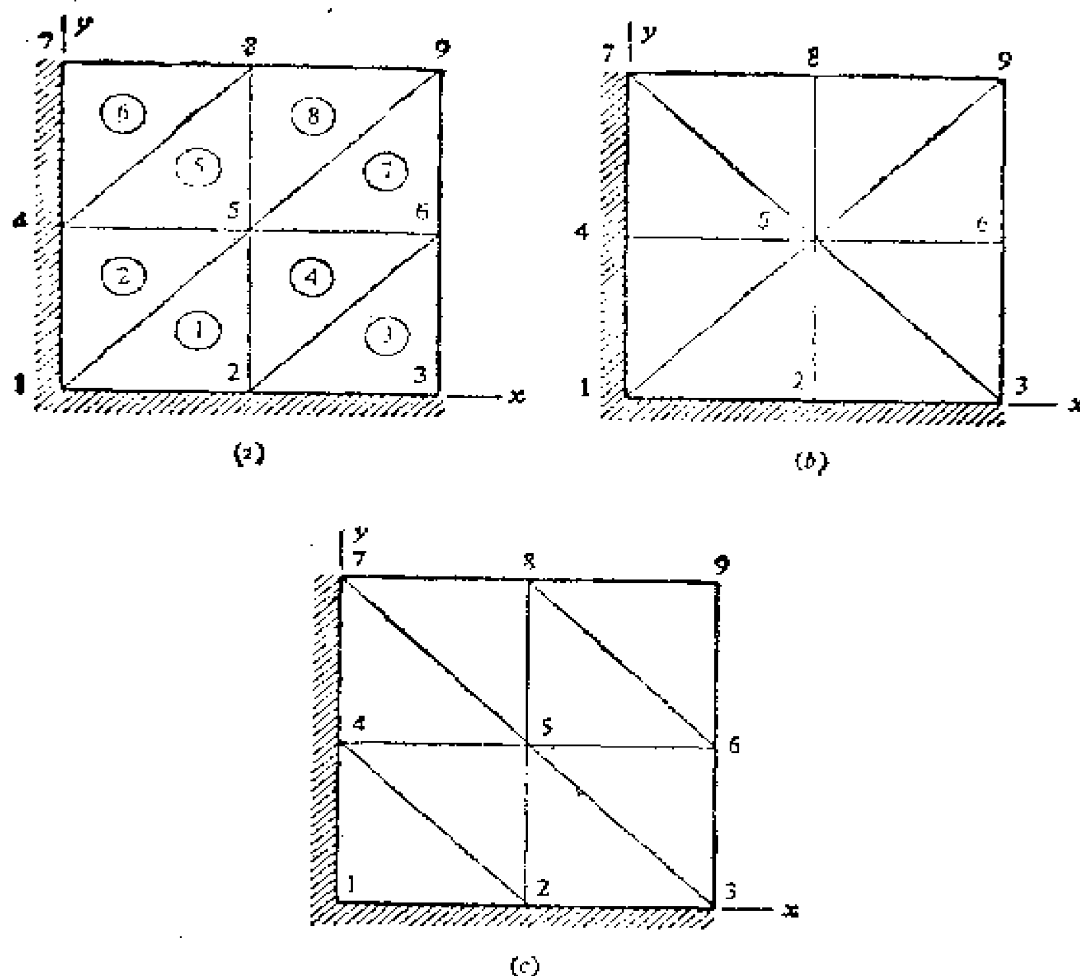


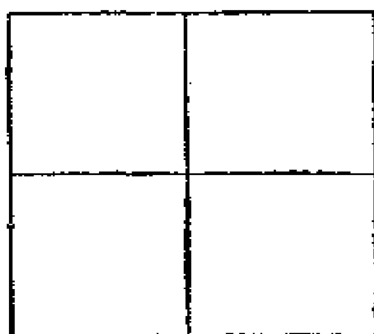
图4.21　例题4.1中域三角形单元网格的不同型式：(a)网格1；(b)网格2；(c)网格3

条$x=y$的数学对称线。我们将研究三角形单元网格和网格加密不同选择对解答的影响。

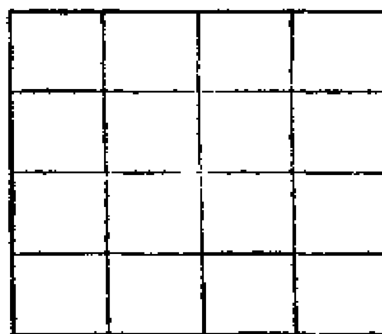
例题4.5 首先我们研究图4.21所示每种有限元网格选择的影响。用三种网格得到的有限元解与精确解的比较列在表4.4中。

表4.4 例题4.1中问题用不同三角形单元网格得到的解与级数解的比较

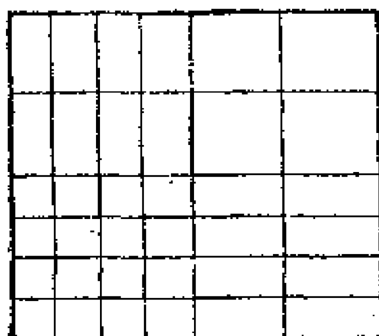
结 点	有限元解			级数解
	网格 1	网格 2	网格 3	
1	0.31250	0.29167	0.25000	0.29469
2	0.22917	0.20833	0.20833	0.22934
4	0.22917	0.20833	0.20833	0.22934
5	0.17708	0.18750	0.16667	0.18114



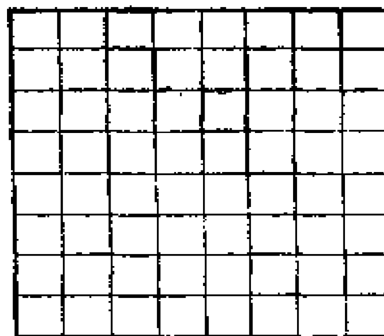
(a)



(b)



(c)



(d)

图4.22 网格加密：在(a)、(b)和(d)中网格是均匀的；在(c)中网格是不均匀的：(a)2×2网格；(b)4×4网格；(c)6×6网格；(d)8×8网格

显然，用网格3所得到的解精度较差。这是所预料的情况，因为网格3与对结点3到结点7连接的对角线对称，而数学上的对称是对结点1到结点9连接的对角线(见图4.21)。网格1是三个网格中最符合要求的，因为在现在的问题中它与数学上的对称不相矛盾。注意，逐点误差之和在网格1中是最小的。

下面我们研究用矩形单元网格加密的影响。4个矩形单元不同网格如图4.22所示。每个网格包含作为子集的前网格。图4.22*c*中所示的网格是不均匀的；它用再分图4.22*b*中所示网格单元的头两行和头两列来获得。用这些网格得到的有限元解的比较列在表4.5中。两个加密网格的有限元解在数值上收敛于级数解，从给出的结果来看是明显的。

表4.5　例4.1问题有限元解(用网格加密⁺的方法)的收敛性

位置		有限元解				级数解
x	y	2×2	4×4	6×6	8×8	
0.0	0.0	0.31071	0.29839	0.29641	0.29560	0.29469
0.125	0.0	—	—	0.29248	0.29167	0.29077
0.250	0.0	—	0.28239	0.28055	0.27975	0.27888
0.375	0.0	—	—	0.26022	0.24943	0.25863
0.50	0.0	0.24107	0.23220	0.23081	0.23005	0.22934
0.625	0.0	—	—	—	0.19067	0.19009
0.750	0.0	—	0.14137	0.14064	0.14014	0.13973
0.875	0.0	—	—	—	0.07709	0.07687
0.125	0.125	—	—	0.28862	0.28781	0.28692
0.250	0.250	—	0.26752	0.26580	0.26498	0.26415
0.375	0.375	—	—	0.22960	0.22873	0.22799
0.50	0.50	0.19286	0.18381	0.18282	0.18179	0.18114
0.625	0.625	—	—	—	0.12813	0.12757
0.750	0.750	—	0.07506	0.07481	0.07332	0.07282
0.875	0.875	—	—	—	0.02561	0.02510

⁺有限元网格见图4.22。

4-4 二维有限单元和插值函数

4-4-1 概述

在前节中，讨论了线性三角形和矩形单元，推导出它们的插值函数，并阐述了一个因变量的二次二维问题有限元解的应用。本节的目的是建立高次的三角形以及矩形单元。读者应该记住，微分方程有限元公式不需要单元型式的直觉的认识。合理单元的选择取决于用有限元公式包含的容许条件，被模拟的域的几何形状和所需的精确度。从另一方面来说，插值函数的构成不取决于求解的专门微分方程式。构成的方法仅取决于几何图形、结点的数量与位置以及在单元结点处规定的（主要的）因变量的数量。因此，能够求得一个有限元库，它能用于任何它可应用的地方。本节的目的是求出Lagrange系列二维三角形和矩形的单元库(即单元仅有一个未知量，它就是每结点本身的因变量)，并且给出二次和三次S单元(Serendipity单元)的插值函数。一旦有了供我们使用的单元库后，便可以从可利用的单元的程序库中选择一个合适的单元(和函数)。

4-4-2 三角形单元

高次三角形单元（即有高次插值函数的三角形单元）可借助于通常所说的 Pascal三角形系统地求出，Pascal 三角形包括有两个变量x和y的不同次多项式的项，如图4.23所示。可以把项的位置视作三角形的顶点，用常数项和已知行的第一和最后项做三角形的顶点（当然，三角形的型式是任意的——不是一个等边三角形，如同在 Pascal 三角形中项的位置出现一样）。例如，二次的三角形单元（即多项式的次数是2)包括六个结点，正如从 Pascal 三角形顶点三行能看到的一样。在三角形中，六个结点的位置是在3个顶点上和在三边的中点上。该多项式包括6个常数，它能用插值变量的结点值来表示：

$$u=\sum_{i=1}^{6}u_i\psi_i(x,\ y) \tag{4.103}$$

式中，ψ_i是二次插值函数，它利用在4-2节中线性单元同样的方法得到。一般说来，第p次三角形单元有n个结点

$$n=\frac{(p+1)(p+2)}{2} \tag{4.104}$$

第p次完整的多项式为

$$u(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^ry^s \quad r+s\leqslant p$$

$$=\sum_{j=1}^{n}u_j\psi_j \tag{4.105}$$

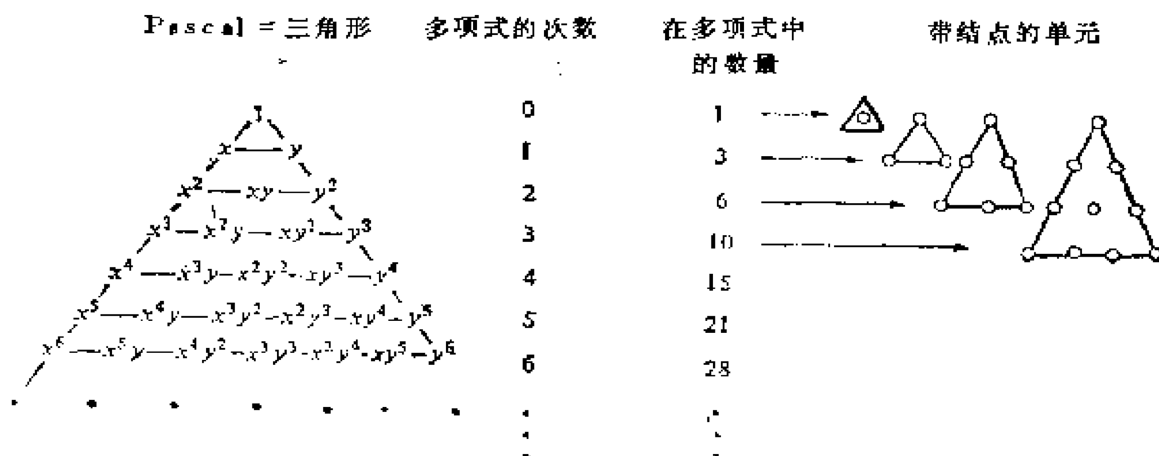


图4.23　三角形单元的Lagrange系列组成的Pascal三角形

Pascal三角形的输入位置给出单元结点的对称位置。它正确地产生结点的实际数量来确定任何次的Lagrange插值。应该注意的是，三角形单元的Lagrange(阶次大于0)插值应该用于下述二次问题，它仅要求因变量或变量（不是它们的导函数）在单元间边界上是连续的。显然，当计算单元边界时，与第p次Lagrange单元有关的第p次多项式，提供边界坐标的第p次多项式。例如，与如图4.24所示二次(六结点)三角形单元有关的二次多项式为

$$u^e(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+a_5x^2+a_6y^2 \tag{4.106}$$

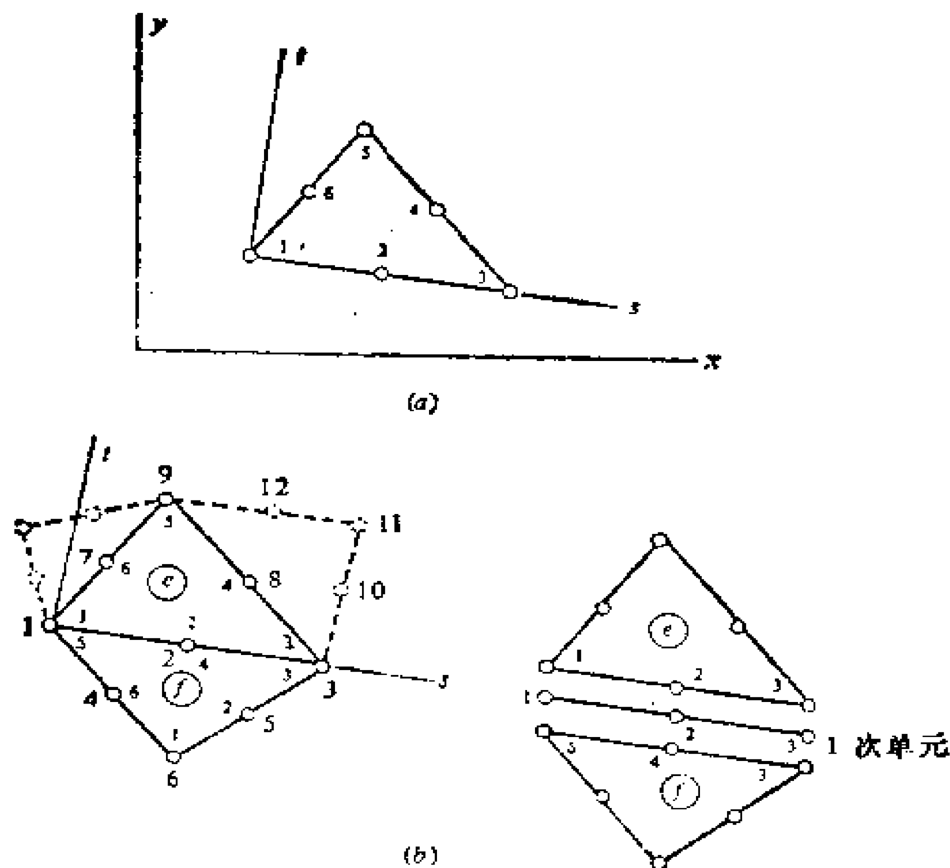


图4.24 沿Lagrange(三角形)单元的单元间边界函数的变化：(a)一标准的高次单元；(b) 二次函数的单元间连续

图 4.24a 所示的单元是一任意的二次三角形单元。用转动和平移(x,y)坐标系的方法，我们得到(s,t)坐标系。因为从(x,y)系转换为(s,t)系仅包括转动（它是线性的）和平移，在(x,y)坐标系中的第k次多项式在(s,t)系中仍是第k次多项式：

$$u^e(s,t)=\hat{a}_1+\hat{a}_2s+\hat{a}_3t+\hat{a}_4st+\hat{a}_5s^2+\hat{a}_6t^2 \quad (4.107)$$

式中$\hat{a}_i(i=1,2,\cdots\cdots6)$是取决于$a_i$和转角$\alpha$的常数。令$t=0$，得出单元$e$边1–2–3的约束方程式$u$

$$u^e(s,0)=\hat{a}_1+\hat{a}_2s+\hat{a}_5s^2 \quad (4.108)$$

它是s的二次多项式。如果一个相邻的单元f有与单元e边1–2–3共用的边5–4–3，则单元f边5–4–3上的函数u也是二次多项式

$$u^f(s,0)=\hat{b}_1+\hat{b}_2s+\hat{b}_5s^2 \quad (4.109)$$

由于这些多项式为相同的结点值 $U_1 = u_1^e = u_3^f$，$U_2 = u_2^e = u_1^f$ 和 $U_3 = u_3^e + u_2^f$ 唯一确定，故有 $u^e(s,0) = u^f(s,0)$，因此函数 u 在单元 e 和 f 的单元间边界上被确定是唯一的。

以上所述的概念很容易推广至三维问题，在这种情况下，Pascal 三角形采取圣诞树的形式，而单元是称为四面体单元的金字塔形式。由于现在研究的范围仅限于二维单元，我们在这问题上不作任何进一步说明（三维单元的介绍见第五章）。

注意，建立插值函数的正规方法〔见方程式(4.19)到(4.24)〕包括对 $n\times n$ 阶的矩阵求逆，这里的 n 是用于表示函数的多项式的项数。当 $n>3$ 时，这方法在数学上是很冗长的。因此，人们指望求插值函数的另外的方法（见一维单元的3-6节）。

利用面积坐标 L_i（见习题4.10），使高次(Lagrange系数）三角形单元插值函数的替换运算得到简化。回顾三角形单元，建立三个无量纲坐标 $L_i(i=1,2,3)$ （见习题图4.10）是可能的，这些坐标分别与其相对的结点1,2和3有关，于是

$$
\begin{aligned}
L_i &= \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{3} A_j} \\
x &= \sum_{i=1}^{3} L_i x_i \\
y &= \sum_{i=1}^{3} L_i y_i
\end{aligned}
\tag{4.110}
$$

式中，x_i 和 y_i 是在 (x,y) 坐标体系中结点 i 的坐标。插值函数满足方程式(4.26) 的性质。现在研究一个每边（见图4.25a)有 k 个结点（等间距）的高次单元。于是在单元中结点的总数为

$$
n = \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) = k + (k-1) + \cdots + 1 \tag{4.111}
$$

且插值函数的次数等于 $k-1$。例如，对二次单元有 $k-1=2$ 和 $n=6$。设角结点(即顶点) 用 I，J 和 K 来表示，且设 h_I 表示结点 I 到结

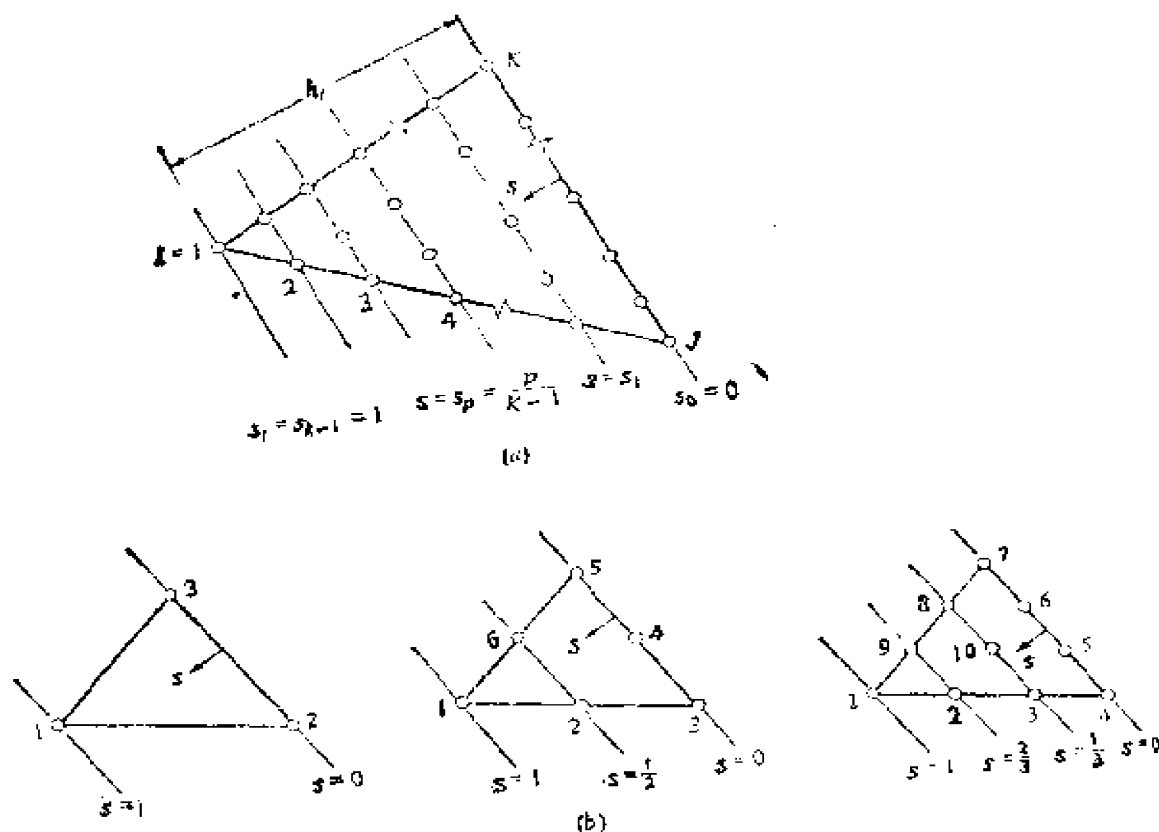


图4.25 Lagrange 三角形单元的单元插值函数的结构；(*a*) 任意的第$(k-1)$次单元；(*b*) 线性的；二次的和三次的单元

点J和K连线的垂直距离。于是到平行于$J-K$边的第p行的距离s_p（在假设结点沿边和行中是等间距的情况下）为

$$s_p=\frac{p}{k-1}\qquad s_0=0\qquad s_I=s_{k-1}=1 \tag{4.112}$$

插值函数ψ_I在$L_I=0$，$1/(k-1)$，…，$p/(k-1)$（$p=0,1,2,\cdots,k-2$）线的结点上应是零，而在$L_I=s_I$处ψ_I等于1。于是我们有建立插值函数ψ_I所需要的计算式：

$$\psi_I=\frac{(L_I-s_0)(L_I-s_1)(L_I-s_2)\cdots(L_I-s_{k-2})}{(s_I-s_0)(s_I-s_1)(s_I-s_2)\cdots(s_I-s_{k-2})}$$

$$=\prod_{p=0}^{k-2}\frac{L_I-s_p}{s_{k-1}-s_p} \tag{4.113a}$$

对除顶点外的结点可得到类似的表达式。通常，结点i的ψ_i为

$$\psi_i = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{f_j}{f_j^i} \tag{4.113b}$$

式中，f_j是L_1，L_2和L_3的函数。f_j^i 是结点i上f_j的值。函数f_j从$k-1$方程中得到，该线是通过除结点i外的所有结点。下面将通过一个例题来说明这种方法。

例题4.6 首先研究每边具有两个结点的（即$k=2$)的三角形单元。这是具有结点总数等于3($n=3$）的线性三角形单元。对于结点1（见图4.25b)，有($k-2=0$)

$$s_0 = 0 \qquad s_1 = 1$$

$$\psi_1 = \frac{L_1 - s_0}{s_1 - s_0} = L_1 \tag{4.114a}$$

同样，我们得到ψ_2和ψ_3为：

$$\psi_2 = L_2 \qquad \psi_3 = L_3 \tag{4.114b}$$

其次研究每边具有三个结点（$k=3$）的三角形单元。结点总数等于6。对结点1，有

$$s_0 = 0 \qquad s_1 = \frac{1}{2} \qquad s_2 = 1$$

$$\psi_1 = \frac{L_1 - s_0}{s_2 - s_0} \frac{L_1 - s_1}{s_2 - s_1} = L_1(2L_1 - 1) \tag{4.115a}$$

插值函数ψ_2(见图4.25b）在结点1,3,4,5和6应等于零，而在结点2应等于1。同样，ψ_2沿结点1与5和结点3与5的连线上将等于零。这两条线通过L_1，L_2和令$L_2=0$和$L_1=0$时的L_3来给出(注意，L的下标指的是三结点三角形单元中的结点)，所以

$$\psi_2 = \frac{L_2 - 0}{\frac{1}{2} - 0} \frac{L_1 - 0}{\frac{1}{2} - 0} = 4L_1L_2 \tag{4.115b}$$

同样有

$$\begin{aligned} \psi_3 &= L_2(2L_2 - 1) \qquad \psi_4 = 4L_2L_3 \\ \psi_5 &= L_3(2L_3 - 1) \qquad \psi_6 = 4L_1L_3 \end{aligned} \tag{4.115c}$$

作为最后的例子，研究三次单元（即$k-1=3$)。对ψ_1我们注

意到：它沿线 $L_1=0$，$L_1=\frac{1}{3}$和$L_1=\frac{2}{3}$必须等于零。因此有

$$\psi_1=\frac{L_1-0}{1-0}\ \frac{L_1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\ \frac{L_1-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{L_1}{2}(3L_1-1)(3L_1-2)$$

同样

$$\psi_2=\frac{L_2-0}{\frac{1}{3}-0}\ \frac{L_1-0}{\frac{2}{3}-0}\ \frac{L_1-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}L_2L_1(3L_1-1)$$

等等。解得

$$\begin{aligned}
&\psi_3=\frac{9}{2}L_1L_2(3L_2-1) &&\psi_4=\frac{1}{2}L_2(3L_2-1)(3L_2-2)\\
&\psi_5=\frac{9}{2}L_2L_3(3L_2-1) &&\psi_6=\frac{9}{2}L_2L_3(3L_3-1)\\
&\psi_7=\frac{1}{2}L_3(3L_3-1)(3L_3-2) &&\psi_8=\frac{9}{2}L_3L_1(3L_3-1)\\
&\psi_9=\frac{9}{2}L_1L_3(3L_1-1) &&\psi_{10}=27L_1L_2L_3
\end{aligned}\tag{4.116}$$

解题完毕。

在本节结束时，应该指出：面积坐标L_i不仅简化了高次单元插值函数的构造，而且简化了函数（L_i的）对线路和面积上的积分。下述精确的积分公式的证明是有用的：

$$\int_a^b L_1^m L_2^n ds=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)\tag{4.117a}$$

$$\iint_{面积} L_1^m L_2^n L_3^p dA=\frac{m!n!p!}{(m+n+p+2)!}2A\tag{4.117b}$$

式中，m，n和p是任意的(正)整数。A是积分域的面积。而$m!$表示m的阶乘。当然，为了应用方程式(4.117)，应该利用转换公式（4.110)将x和y坐标的积分转换为对L_i坐标的积分。

4-4-3 矩形单元

类似三角形单元的Lagrange族，矩形单元的Lagrange族能从Pascal三角形或图4.26所示的矩形排列得到。由于线性矩形单元有四个角（因此有四个结点），这多项式前四项应有1，x，y和xy（它们形成在Pascal三角形中的平行四边形和图 4.26 所给排列的矩形）。通常，第p次Lagrange矩形单元有n个结点，具有

$$n=(p+1)^2 \quad p=0,1,\cdots \tag{4.118}$$

而相应的多项式包括图4.26中的第p个平行四边形或第p个矩形的项。当$p=0$时，可以理解为（如同在三角形单元中）结点是在单元的中心（即变量在整个单元是常数）。二次矩形单元有9个结点，其相应的多项式为

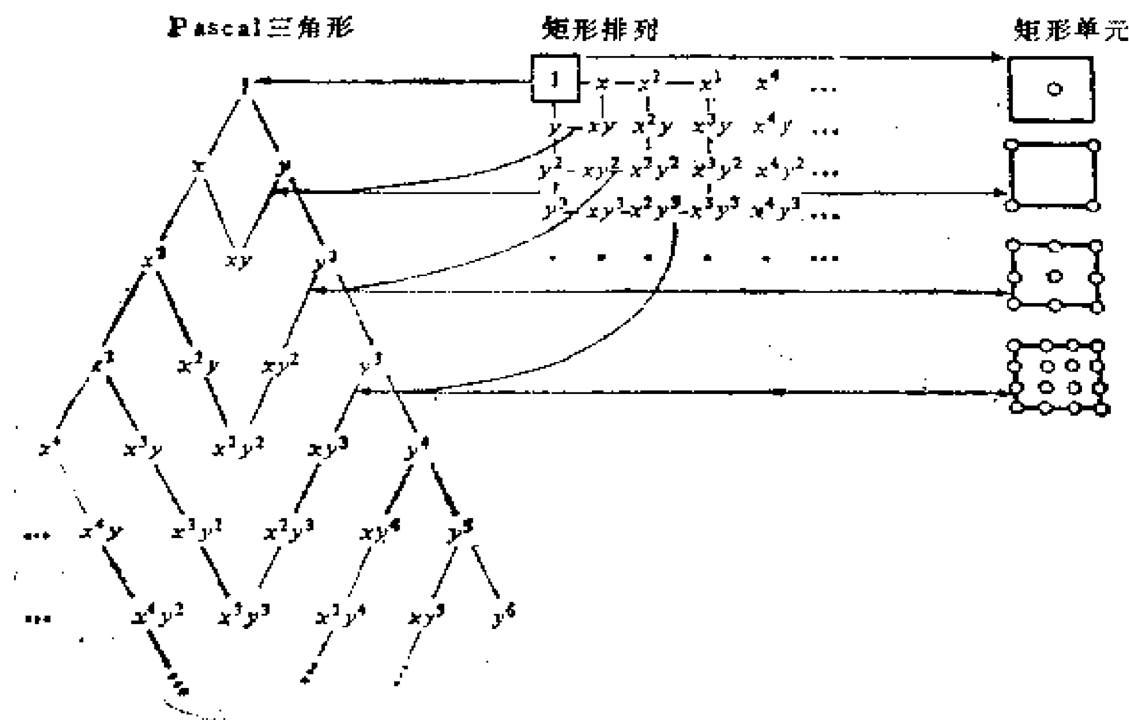


图4.26 不同次的矩形单元的Lagrange族

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+a_5x^2+a_6y^2+a_7x^2y+a_8xy^2+a_9x^2y^2 \tag{4.119}$$

此多项式包括二次加上三次项x^2y与xy^2和x^2y^2项组成的完整多项式。9个结点中的4个位于四个角，4个位于边的中点，而1个位于

单元的中心。这多项式由在9个结点的每个结点上所确定的值唯一地确定。而且，沿单元的边，这多项式是二次的（有三项——可看作为$y=0$），且用在那边上三个结点上的值所确定。如果两个矩形单元共用一条边，此多项式要求从两个单元在其三个结点上有相同的值，那么，u是沿整个边（两个单元共用）唯一确定的。第p次Lagrange矩形单元有第p次多项式

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{n}a_i x^j y^k \quad j+k\leqslant p+1 \quad i,j\leqslant p$$

$$=\sum_{i=1}^{n}u_i\psi_i \tag{4.120}$$

与矩形单元有关的 Lagrange 插值函数能用相应的一维Lagrange插值函数得到，即取所谓的x方向一维插值函数的张量与y方向的一维插值函数的乘积来得到。为简单起见，设x和y坐标取沿单元的边，坐标系的原点位在矩形的左下角上。那么，对沿x和y方向尺寸分别为a和b的单元，插值函数给出如下：

线性的（$p=1$）

$$\begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_3\\ \psi_2 & \psi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{x}{a}\\ \dfrac{x}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\dfrac{y}{b} & \dfrac{y}{b}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\left(1-\dfrac{y}{b}\right) & \left(1-\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{y}{b}\\ \dfrac{x}{a}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) & \dfrac{x}{a}\dfrac{y}{b}\end{bmatrix} \tag{4.121}$$

二次的（$p=2$）

$$\begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_4 & \psi_7\\ \psi_2 & \psi_5 & \psi_8\\ \psi_3 & \psi_6 & \psi_9\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{(x-a/2)(x-a)}{(-a/2)(-a)}\\ \dfrac{x(x-a)}{(a/2)(a/2-a)}\\ \dfrac{x(x-a/2)}{a(a/2)}\end{Bmatrix}\times$$

$$\times\left[\frac{(y-b/2)(y-b)}{b^2/2}\quad\frac{y(y-b)}{-b^2/2}\quad\frac{y(y-b/2)}{b^2/2}\right]$$

(4.122)

$$=\{f\}\ \{g\}^T=\begin{bmatrix} f_1g_1 & f_1g_2 & f_1g_3 \\ f_2g_1 & f_2g_2 & f_2g_3 \\ f_3g_1 & f_3g_2 & f_3g_3 \end{bmatrix}$$

式中，$f_i(x)$和$g_i(x)$分别是沿x和y方向的一维插值函数，我们得到

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \left(1-\frac{2x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{2y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\\
\psi_2 &= \frac{4x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{2y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\\
\psi_3 &= \frac{x}{a}\left(\frac{2x}{a}-1\right)\left(1-\frac{2y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\\
\psi_4 &= \left(1-\frac{2x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{4y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\\
\psi_5 &= \frac{4x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{4y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\\
\psi_6 &= \frac{x}{a}\left(\frac{2x}{a}-1\right)\frac{4y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\\
\psi_7 &= \left(1-\frac{2x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}\left(\frac{2y}{b}-1\right)\\
\psi_8 &= \frac{4x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}\left(\frac{2y}{b}-1\right)\\
\psi_9 &= \frac{x}{a}\left(\frac{2x}{a}-1\right)\frac{y}{b}\left(\frac{2y}{b}-1\right)
\end{aligned} \tag{4.123}$$

第p次

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & \cdots & \psi_{p+2} & \cdots & \psi_k \\ \psi_2 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ \psi_p & & & & \\ \psi_{p+1} & \cdots & \psi_{2p+2} & \cdots & \psi_n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{p+1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{p+1} \end{Bmatrix}^T \tag{4.124}$$

$$k=(p+1)p+1 \qquad n=(p+1)^2$$

式中，$f_i(x)$和$g_i(x)$分别是在x和y上第p次插值。例如，多项式

$$f_i(\xi)=\frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{i-1})(\xi-\xi_{i+1})\cdots(\xi-\xi_{p+1})}{(\xi_i-\xi_1)(\xi_i-\xi_2)\cdots(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})\cdots(\xi_i-\xi_{p+1})} \tag{4.125}$$

式中，ξ_i是结点i的坐标值ξ，是ξ的第p次插值多项式，其值在ξ_1，ξ_2，……ξ_{i-1}，ξ_{i+1}，……ξ_{p+1}处等于0。

用自然坐标ξ和η来表示方程式(4.124)中的插值函数是很方便的（为了数值积分的目的）：

$$\xi=\frac{2(x-x_1)-a}{a} \qquad \eta=\frac{2(y-y_1)-b}{b} \tag{4.126}$$

式中，x_1和y_1是结点1的总坐标。对原点固定在结点1上的坐标系，有$x_1=y_1=0$。在此情况下，方程式(4.123)的二次插值函数可写成为ξ和η的形式

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_1&=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta\\
\hat{\psi}_2&=-\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta\\
\hat{\psi}_3&=-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta\\
\hat{\psi}_4&=-\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi\\
\hat{\psi}_5&=(1-\xi^2)(1-\eta^2)\\
\hat{\psi}_6&=\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi\\
\hat{\psi}_7&=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta\\
\hat{\psi}_8&=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta\\
\hat{\psi}_9&=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta
\end{aligned} \tag{4.127}$$

应注意的是，$\hat{\psi}$的下标与用于图4.27中的结点编号有关。对结点进行任何重新编号时，插值函数的下标将相应地改变。

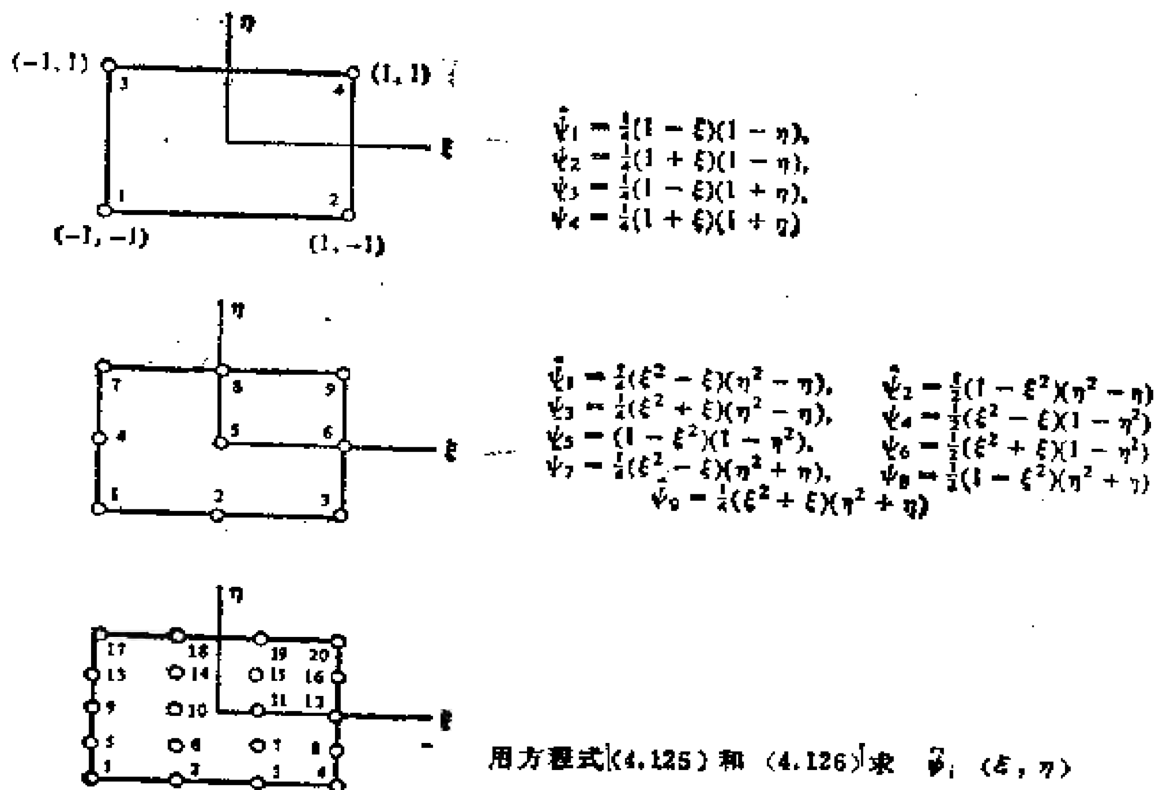


图4.27 Lagrange族矩形单元的结点数量和插值函数

4-4-4 S单元（Serendipity单元）

因为 Lagrange 族高次单元的内部结点不影响单元间的连续性，它们能在单元范围上取消，以便减少单元矩阵的尺寸。换句话说，能用所谓的S单元去避免出现在 Lagrange 单元中的内部结点。S单元是没有内部结点的矩形单元。换言之，所有的结点是在单元的边界上。对于S单元的插值函数，不能利用一维插值函数的张量乘积来得到。而利用满足方程式（4.26）型式条件的替换方法。这里我们将说明如何利用自然坐标建立8个结点（二次的）单元的插值函数。

对于结点1的插值函数，在结点2，3，……，8上应取零值，而在结点1上应取单位值。相应地，$\hat{\psi}_1$在用方程式$1-\xi=0$，$1-\eta=0$和$1+\xi+\eta=0$确定的边上将等于0（见图4.28）。因此$\hat{\psi}_1$有

$$\hat{\psi}_1(\xi,\eta)=c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

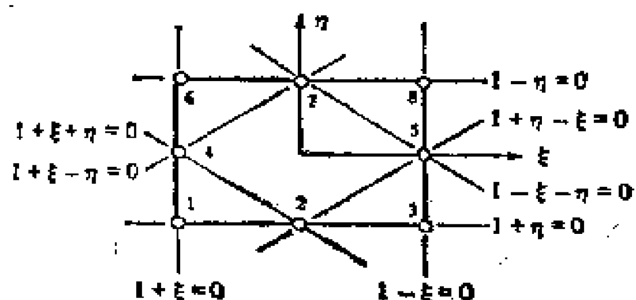
式中，c是满足 $\hat{\psi}_1(-1,-1)=1$的待定常数。并得出$c=-\dfrac{1}{4}$，

因此

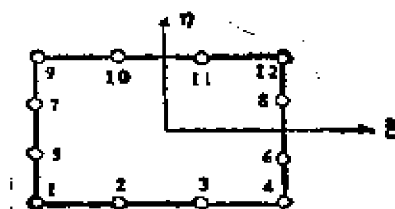
$$\hat{\psi}_1(\xi,\eta)=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \tag{4.128a}$$

类似地，得到

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
\hat{\psi}_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \\
\hat{\psi}_4 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \\
\hat{\psi}_5 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
\hat{\psi}_6 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \\
\hat{\psi}_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
\hat{\psi}_8 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)
\end{aligned} \tag{4.128b}$$



$\hat{\psi}_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$
$\psi_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$
$\psi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$
$\psi_4 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$
$\psi_5 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$
$\psi_6 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)$
$\psi_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$
$\psi_8 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$



见插值函数的方程式（4.130）

图4.28　S单元的结点数量和插值函数

注意，对 8 个结点单元，所有$\hat{\psi}_i$具有

$$\hat{\psi}_i = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\xi^2\eta + c_8\xi\eta^2 \tag{4.129}$$

类似地，具有12个结点的三次S单元，其插值函数为

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}_1 &= \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)] \\
\hat{\psi}_2 &= \frac{9}{32}(1-\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi) \\
\hat{\psi}_3 &= \frac{9}{32}(1-\eta)(1-\xi^2)(1+3\xi) \\
\hat{\psi}_4 &= \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)] \\
\hat{\psi}_5 &= \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta) \\
\hat{\psi}_6 &= \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta) \\
\hat{\psi}_7 &= \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta) \qquad (4.130) \\
\hat{\psi}_8 &= \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta) \\
\hat{\psi}_9 &= \frac{1}{32}(1-\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)] \\
\hat{\psi}_{10} &= \frac{9}{32}(1+\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi) \\
\hat{\psi}_{11} &= \frac{9}{32}(1+\eta)(1-\xi^2)(1+3\xi) \\
\hat{\psi}_{12} &= \frac{1}{32}(1+\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]
\end{aligned}
$$

12个结点单元的插值函数的形式如下：

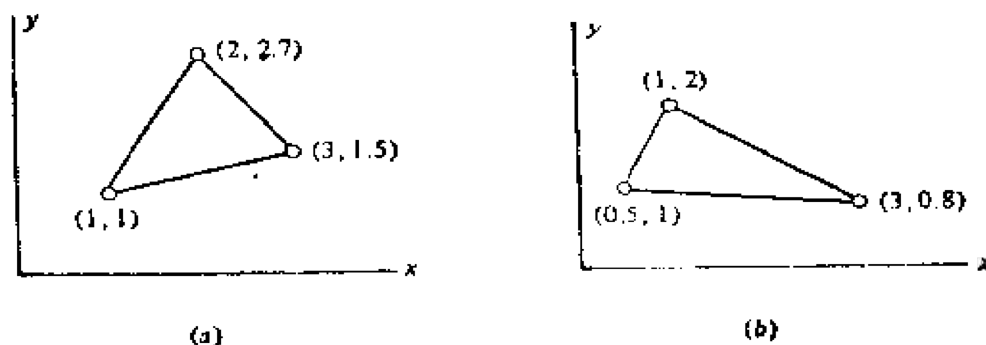
$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}_i = &\text{方程式(4.129) 型式的项} + c_9\xi^3 + c_{10}\eta^3 \\
&+ c_{11}\xi^3\eta + c_{12}\xi\eta^3
\end{aligned} \tag{4.131}
$$

习　　题

下述一些习题要求用计算机求解聚缩方程式。另一方面，可以采用4—8节中讨论的FEM2D程序求解，要求读者至少给出每个习题中使用网格的确定边界条件和力的矢量。

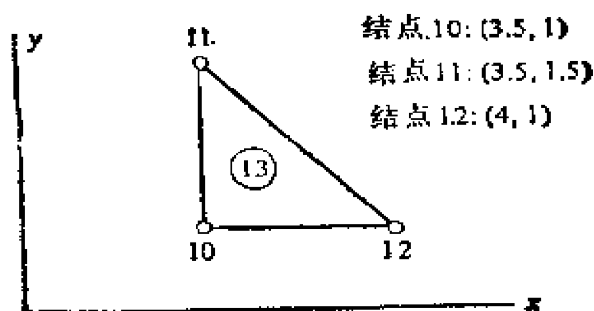
4.1　当q为$\hat{q}(y)=a_0+a_1y$，$BA=3h$，结点1是B点，结点4是A点，且a_0和a_1是常数时，计算例题2.4中热交换问题头4个入口的总力矢量，假定边界BA用3个线性单元（等长的）表示。

4.2　计算在习题图4.2中所示的三角形单元的线性插值函数。



习题图4.2

4.3　例题4.4热传导问题中单元13的结点值是$T_{10}=389.79$K，$T_{11}=337.19$K和$T_{12}=395.08$K（见图4.12a）。求单元中的温度梯度，并确定392K等温线与习题图4.3中单元边界相交的地方。



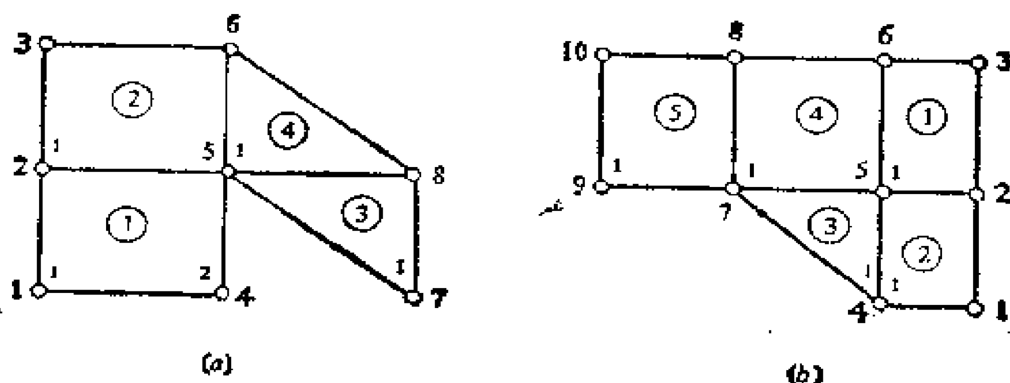
习题图4.3

4.4　计算单元矩阵

$$K_{ij}^{1}=\int_0^a\int_0^b \psi_i \frac{d\psi_j}{d\xi}d\xi d\eta \qquad K_{ij}^{2}=\int_0^a\int_0^b \psi_i \frac{d\psi_j}{d\eta}d\xi d\eta$$

这里，ψ_i是方程式（4.31）的线性插值函数。

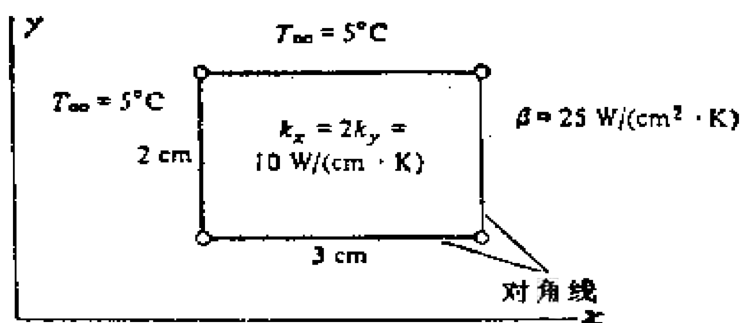
4.5 求出如习题图4.5所示有限元网格的集合系数矩阵。假设每结点的自由度为1，且设$[K^{(e)}]$表示第e个单元的单元系数矩阵（答案应该用K_{ij}^{e}表示）。



习题图4.5

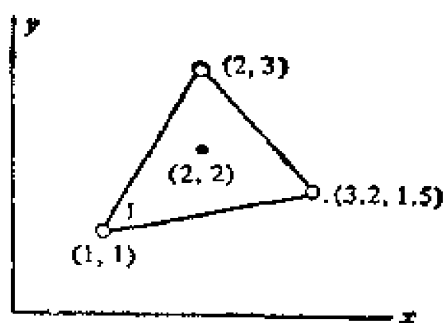
4.6 如果U_1和U_4在习题4.5有限元网格中是确定的，修改集合的方程组，并写出其余初始未知自由度的聚缩方程组。

4.7 计算有两条边受到周围温度（即受到对流）影响的矩形单元矩阵（见习题图4.7）。

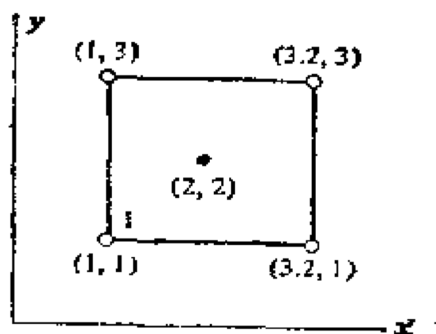


习题图4.7

4.8 100W的点源设在习题图4.8所示的三角形单元的内部，确定点源对单元结点的影响。



习题图4.8



习题图4.9

4.9 同习题4.8，但为习题图4.9所示的矩形单元。

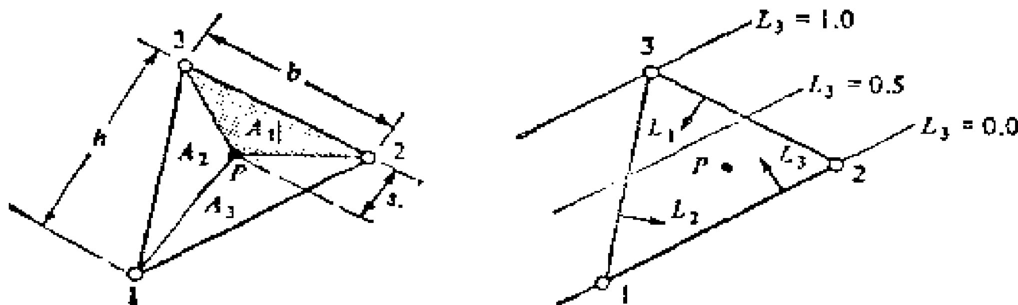
4.10 （面积坐标）研究一个任意三角形单元（见习题图4.10），已知3个坐标为

$$L_1=\frac{A_1}{A},\quad L_2=\frac{A_2}{A},\quad L_3=\frac{A_3}{A}$$

其中，$A_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 是由结点j与k和点p组成三角形的面积，而 A是三角形的总面积，证明

$$L_i=\psi_i$$

这里，ψ_i是三角形单元的线性插值函数。



$L_i=\frac{A_i}{A}\left(A=\frac{bh}{2},A_1=\frac{bs}{2},L_1=\frac{A_1}{A}=\frac{s}{h},\text{etc.}\right)$

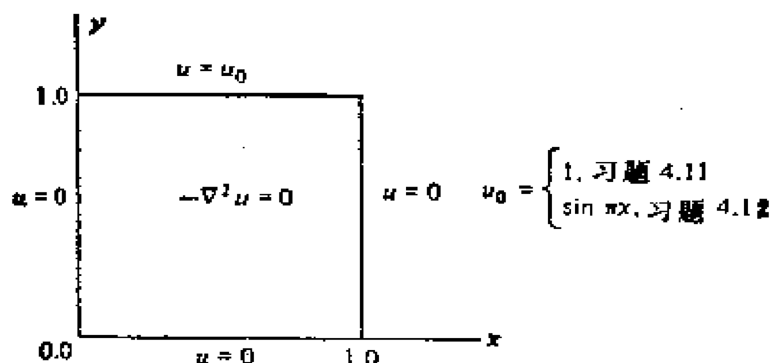
习题图4.10

4.11 当$u(0,\ y)=u(1,\ y)=u(x,\ 0)=0$和$u(x,\ 1)=1$时，在边长为1的正方形中求解Laplace方程

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

使用对称性和（a）2 × 4 个三角形单元网格与（b）2 × 4 个矩形单元网格(见习题图4.11)。比较有限元解和精确解：

$$u(x,\ y)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\pi x]\sinh[(2n+1)\pi y]}{(2n+1)\sinh[(2n+1)\pi]}$$



习题图4.11

4.12 当在$y=1$处边界条件用下式代替时

$$u(x,\ 1)=\sin\pi x$$

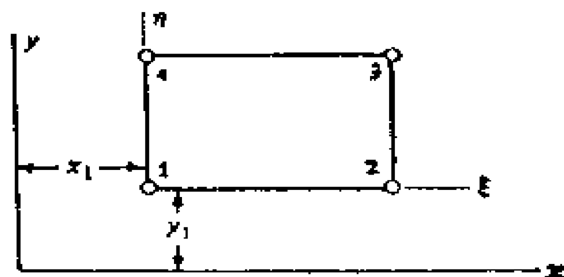
求解习题4.11。比较有限元解与精确解：

$$u(x,\ y)=\frac{\sin\pi x\sinh\pi y}{\sinh\pi}$$

4.13 进行线性矩形单元习题4.11的收敛性分析。同时，探讨在$x=0$和$y=1$处边界条件对解的影响（即，在$x=0$和$y=1$处使用$u=0$，$u=1$和$u=0.5$，并比较所得的解）。

4.14 当方程式4.1中a_{ij}是x和y的双线性函数，$a_{ij}=a_{ij}^{0}+a_{ij}^{1}x+a_{ij}^{2}y+a_{ij}^{3}xy$时，确定在方程式（4.14）中线性三角形单元的系数矩阵$[K^{(e)}]$的显形式。表示成方程式（4.36）确定的积分的形式。

4.15 同习题4.14，但为线性矩形单元。注意，在方程式（4.31）中



习题图4.15

插值函数与局部坐标体系（ξ, η）有关。所以在计算积分（4.34）式中，必须使用下述变换（见习题图4.15）：

$$x = x_1 + \xi/a \qquad y = y_1 + \eta/b$$

这里，x_1和y_1是结点1的总坐标。

4.16 当线性三角形和矩形单元的f是下述形式的双线性函数：

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

时，确定广义力矢量$\{f\}$，这里

$$f_i^{(e)} = \int_{\Omega^e} f\psi_i dxdy$$

4.17 同习题4.14，其情况为

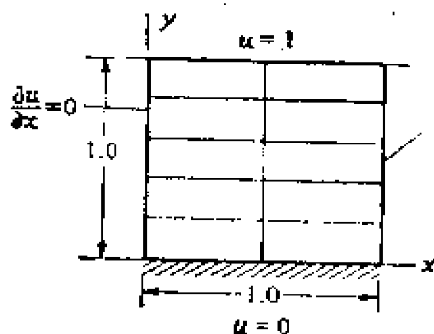
$$a_{ij} = \sum^{s} a_{ij}^{k} \psi_k \qquad a_{ij}^{k} = \text{常数}$$

4.18 同习题4.15，而a_{ij}按习题4.17所给出的值。

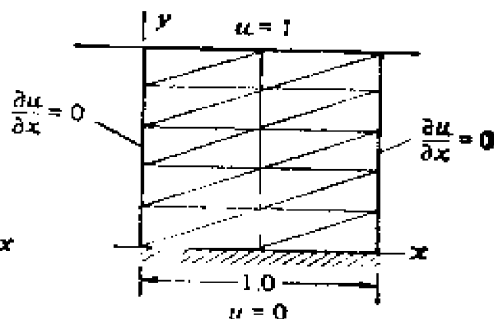
4.19 同习题4.16，其情况

$$f = \sum f_i \psi_i \quad f_i = \text{常数}$$

4.20 使用2×5的线性矩形单元网络，求解二平行平板墙间Couette流的问题（见习题3.29）。沿x坐标取单位长，$b = 0.5$，$f_0 = -6$和$u_0 = 1.0$（见习题图4.20）。将二维有限元解和习题3.29中给出的精确解进行对比。



习题图4.20



习题图4.21

4.21 同习题4.20，但使用一个相等的线性三角形单元的网格（见习题图4.21）。

4.22 圆柱体杆件扭转的Prandtl理论导出

$$-\nabla^2 u = 2G\theta \quad \text{在}\Omega\text{中} \qquad u = 0 \quad \text{在}\Gamma\text{上}$$

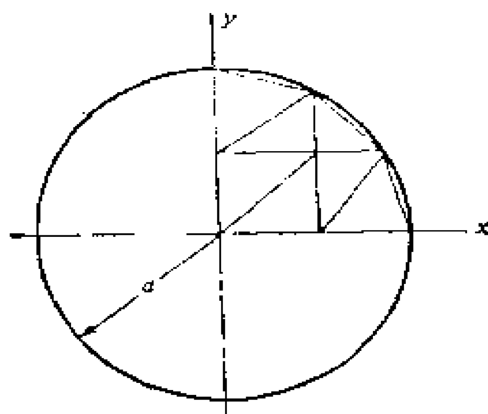
这里，Ω是扭转圆柱体杆件的横截面面积，Γ是Ω的边界，G是杆件材料的剪切模量，θ是扭转角，而u是应力函数。当Ω为（a）椭圆形截面和（b）圆

形截面（见习题图4.22）情况时，用线性三角形单元求解方程式。比较有限元解和精确解（对椭圆形截面）：

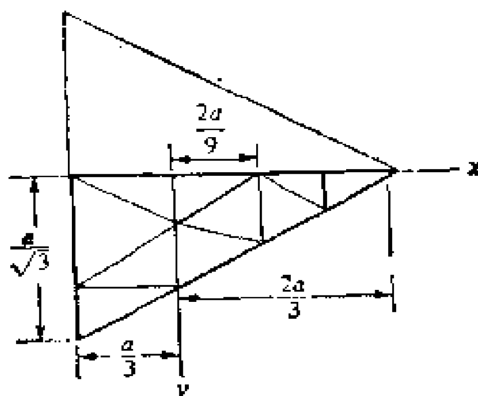
$$u=\frac{G\theta a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

4.23 同习题4.22，而Ω是等边三角形的情况（见习题图4.23），精确解为

$$u=-G\theta\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{2a}(x^3-3xy^2)-\frac{2}{27}a^2\right]$$

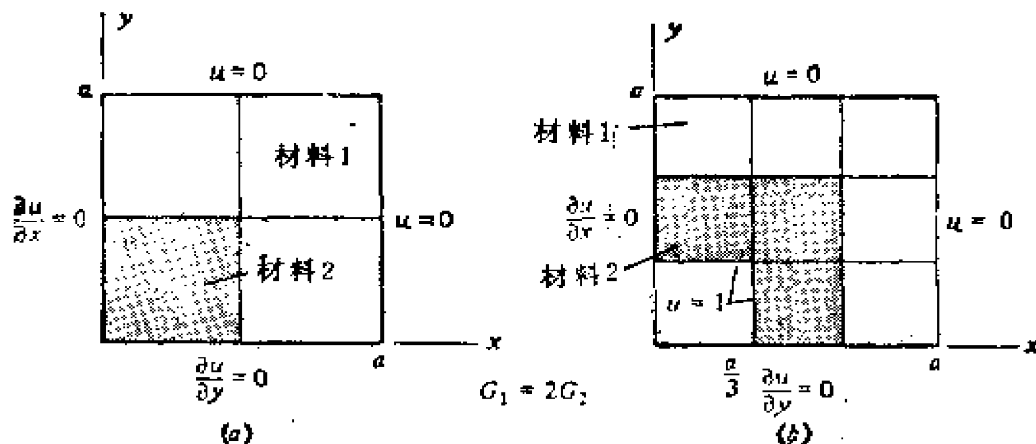


习题图4.22



习题图4.23

4.24 用已知的矩形单元网格，对在习题图4.24a和b中描述的组合横截面(仅指出截面的四分之一)，求解习题4.22的扭转问题。

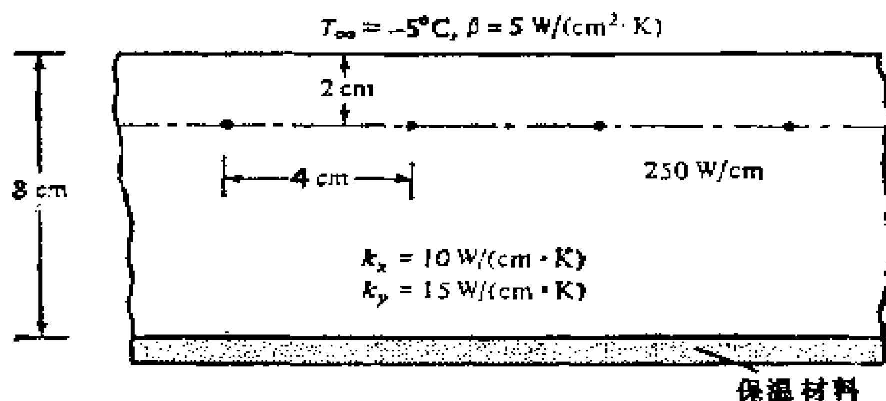


习题图4.24

4.25 利用相等的线性三角形单元网格（同例题3.9），求解例题3.9的

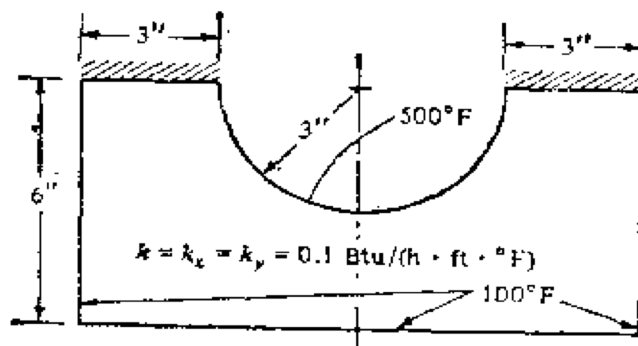
径向轴对称热交换问题。

4.26 一系列热电缆设在导热介质中，如习题图4.26所示。介质的传导率$K_x = 10\text{W}/(\text{cm}\cdot\text{K})$和$K_y = 15\text{W}/(\text{cm}\cdot\text{K})$，上表面受到-5℃温度的影响，而下表面是隔热介质的边界。假设每个电缆是250W/cm的点源，确定在介质中温度的分布。取介质与上表面间的对流系数$\beta = 5\text{W}(\text{cm}^2\cdot\text{K})$。



习题图4.26

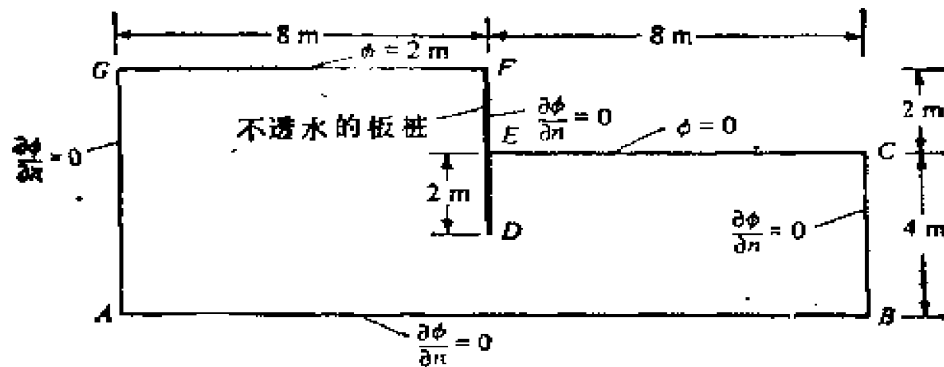
4.27 取$k = 0.1\text{Btu}/(\text{h}\cdot\text{ft}\cdot{}^\circ\text{F})$，确定在习题图4.27所示的石棉隔热模具中温度的分布。



习题图4.27

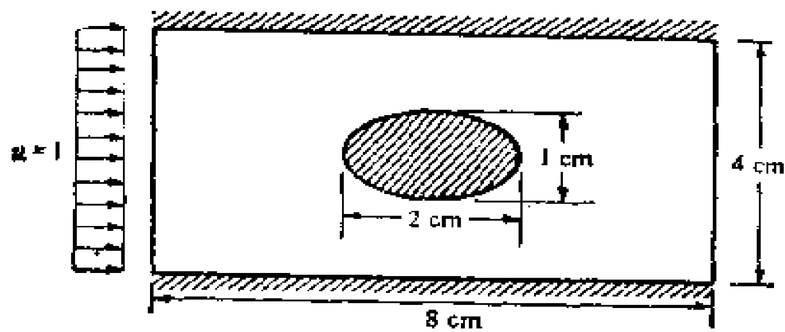
4.28 当在圆弧上用基本边界条件$T = 200$℃代替对流边界条件时，求解例题4.4中的问题。

4.29 研究在围堰下地下水流问题。利用速度势公式求解问题。几何尺寸和边界条件如习题图4.29所示。



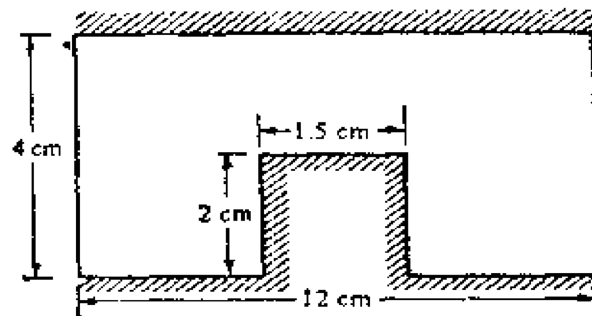
习题图4.29

4.30 用流函数公式求解椭圆形柱流问题，几何尺寸和边界条件如习题图4.30所示。



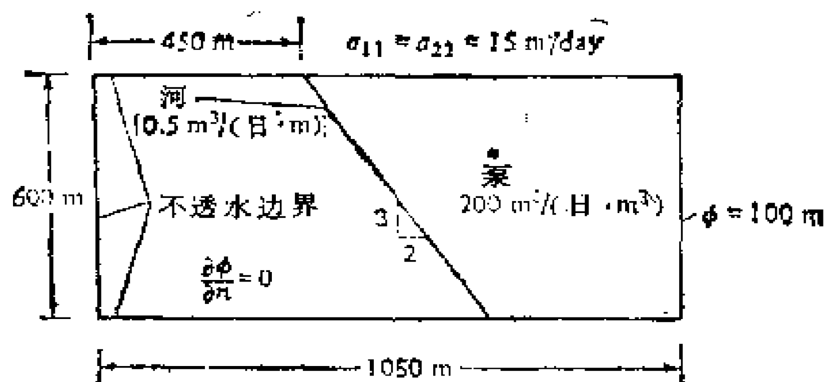
习题图4.30

4.31 同习题4.30，其域在习题图4.31中表明。



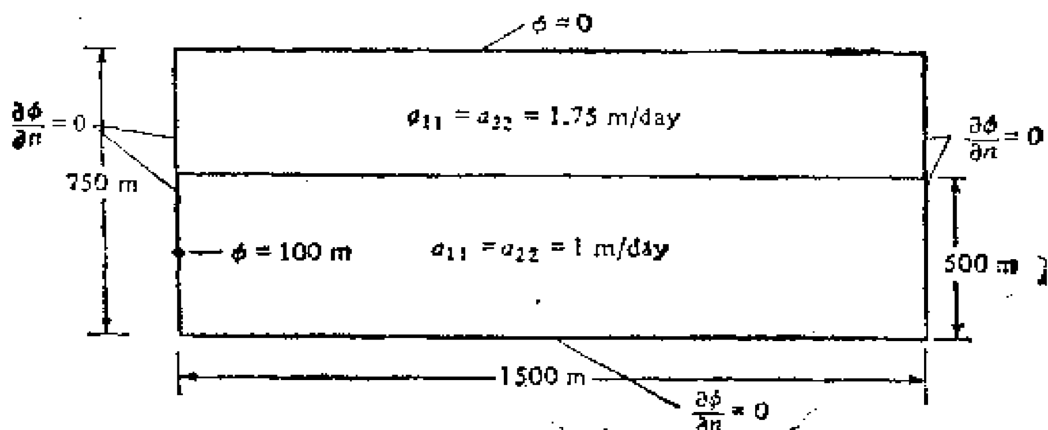
习题图4.31

4.32 确定如习题图4.32所示域的地下水流问题的等势线。



习题图4.32

4.33 同习题4.32，而域如习题图4.33所示。



习题图4.33

4.34 证明在习题图4.34所给的四结点三角形单元的双线性插值函数是下述形式

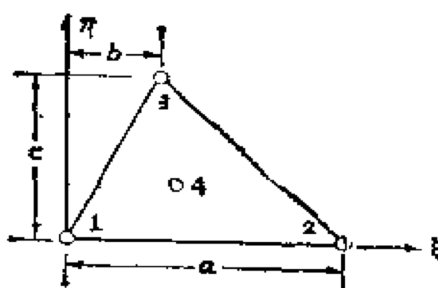
$$\psi_i=a_i+b_i\xi+c_i\eta+d_i\xi\eta \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

式中 $a_1=1,\ a_2=a_3=a_4=0,\ -b_1=b_2=1/a,\ b_3=b_4=0$。

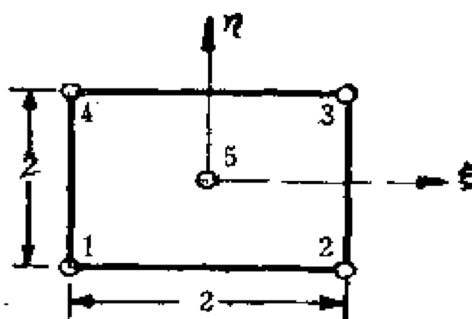
和 $c_1=\dfrac{6ab-a^2-2b^2}{ac(a-2b)}$ $\qquad c_2=\dfrac{2b(a+b)}{ac(a-2b)}$

$$c_3=\frac{a+b}{c(a-2b)} \qquad c_4=\frac{-9b}{c(a-2b)}$$

$$d_1=d_2=d_3=-\frac{d_4}{3}=-\frac{3}{c(a-2b)}$$



习题图4.34



习题图4.35

4.35 证明对在习题图4.35所示的五结点矩形单元包括 (x^2+y^2) 项的插值函数为

$$\psi_1 = 0.25(-\xi-\eta+\xi\eta)+0.125(\xi^2+\eta^2)$$

$$\psi_2 = 0.25(\xi-\eta-\xi\eta)+0.125(\xi^2+\eta^2)$$

$$\psi_3 = 0.25(\xi+\eta+\xi\eta)+0.125(\xi^2+\eta^2)$$

$$\psi_4 = 0.25(-\xi+\eta-\xi\eta)+0.125(\xi^2+\eta^2)$$

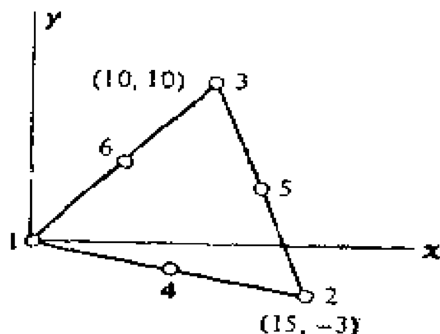
$$\psi_5 = 1-0.5(\xi^2+\eta^2)$$

4.36 对习题4.34四结点三角形单元，计算其单元矩阵

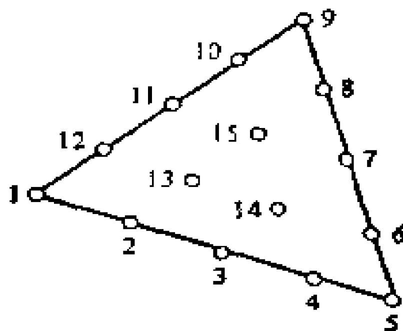
$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy$$

4.37 同习题4.36，而对习题4.35的五结点矩形单元。

4.38 计算如习题图4.38所示二次三角形单元的插值函数。



习题图4.38



习题图4.40

4.39 对习题图4.38中的三角形单元，计算积分

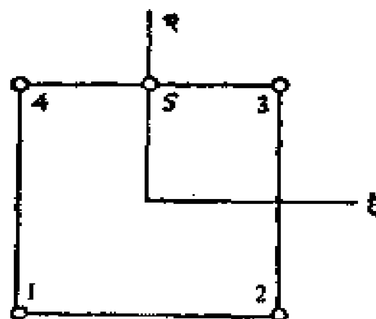
$$\int(\psi_1)^2dA \qquad \text{和} \qquad \int\psi_1\psi_2 dA$$

4.40 确定在习题图4.40中的五次三角形单元的插值函数ψ_{14}。

4.41 证明：线性的、二次的和三次的矩形单元的插值函数中的插值变量是沿单元间的边界连续。

4.42 导出在三次S单元中角结点的插值函数。

4.43 研究如习题图4.43所示的五结点单元。利用沿ξ和η的坐标方向的基本线性的和二次的插值，导出单元的插值函数。注意，该单元能用做连接四个结点至八个或九个结点单元的转换单元。



习题图4.43

4.44（结点的变量） 研究用下述形式插值的四结点矩形单元

$$u=\sum_{i=1}^{4}u_i\psi_i+\sum_{i=1}^{4}c_i\phi_i$$

确定单元的ψ_i和ϕ_i的形式。

4-5 二次多变量方程式

4-5-1 初步论述

在4-2节中，我们研究了二次(二维)问题的有限元分析方法，问题仅包含一个因变的未知量(因此仅一个偏微分方程式)。这里我们研究因变量与方程式数量一样的共轭偏微分方程组（通常是一组)。使用“共轭”这字意味着相同的因变量在组中的多于一个方程式中的出现，所以在组中没有方程能不依靠其他方程求解。当方程式不是共轭时，应用在4-2节中提出的理论。共轭方程式出现的二维问题的例子（我们对这点感兴趣）有线性弹性固体的平面弹性变形，不可压缩粘性液体的流动和具有横向剪切变形弹性板

的弯曲。

本节的主要目的是两个方面：第一，描述上面讲述多变量方程式的变分公式和有限元公式；第二，说明如何用4-2节中提供的线性 Lagrange 日单元求解二维多变量方程式。这两个目的可按照一维问题同样的方法达到（见第5-2节中关于包括两个因变量和两个方程式的替换公式）。

4-5-2　平面弹性问题

研究以两个平行平面（譬如说，$z=-h/2$和$z=h/2$）和任何封闭的边界Γ为界，等厚h（假设在z方向）的线性弹性体Ω。如果厚度h很大，问题认为是一平面应变问题，而如果厚度比横向尺寸（在这情况下为x，y）小，问题认为是一平面应力问题。这两个问题是在下述荷载假设下，三维弹性问题的简化：体积力即使存在，在物体厚度方向上不变化，且在z方向上不存在分量；作用的边界力在z方向上不存在分量，且必须是沿厚度均匀地分布（即在z方向上为常数）；而且以顶和底表面为界的平行平面上没有荷载作用。

假设在平行平面上应力是零意味着：对于平面应力问题（物体是很薄的）在z方向上应力是微不足道的小（见图4.29），即

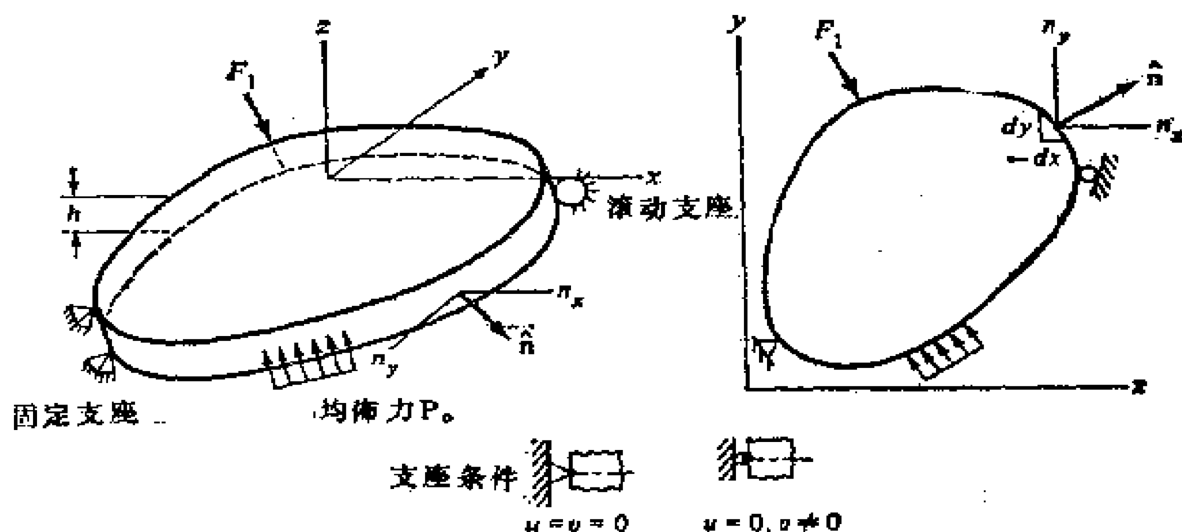


图4.29　二维弹性问题的平面应力问题

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \tag{4.132}$$

对平面应变问题，这里物体在z方向上是很薄的，假设在z方向上应变是零（见图4.30），说明

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \tag{4.133}$$

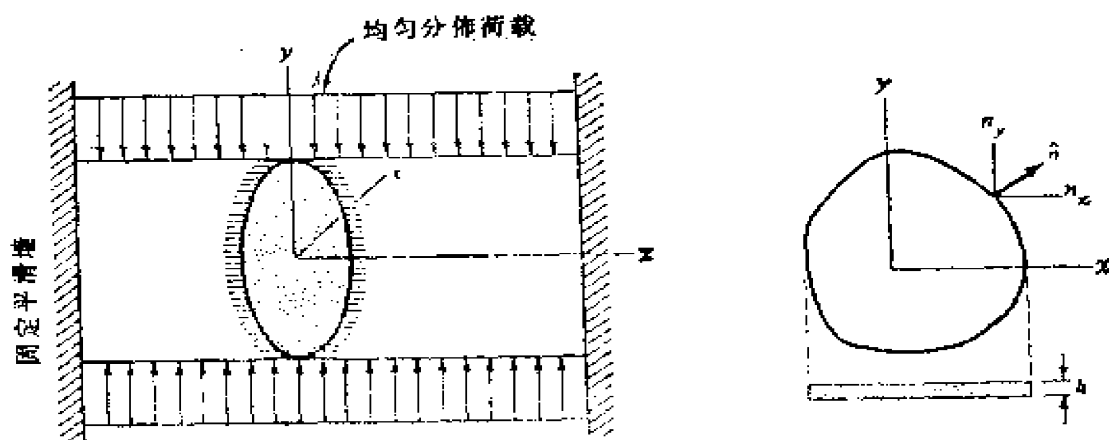


图4.30　二维弹性问题的平面应变问题

平面应力和平面应变问题间差别的例子有矩形横截面梁的弯曲。如果梁很窄，问题是平面应力问题，而如果梁很宽，问题是平面应变问题（读者可查阅适当的参考书）。

上述两类平面弹性问题的方程式概括如下：

1.应力平衡方程式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0\end{aligned}\right\}\text{在}\Omega\text{中} \tag{4.134}$$

式中，f_x和f_y分别表示沿x和y方向上的体积力。

2.应变—位移关系

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.135}$$

3.应力—应变（或本构的）关系

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x - C_{12}\varepsilon_y\\ \sigma_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y\end{aligned} \tag{4.136}$$

$$\tau_{xy} = C_{33}\gamma_{xy}$$

式中，$C_{ij}(C_{ji} = C_{ij})$ 是弹性（材料）常数。对各向同性弹性体，它们根据弹性模量E和Poisson比ν给出（见习题3.32）

平面应力

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad C_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$$
$$C_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.137}$$

平面应变

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$C_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

4.边界条件

自然的

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \hat{t}_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \hat{t}_y\end{array}\right\} 在\Gamma_1上 \tag{4.138}$$

基本的

$$\left.\begin{array}{l}u = \hat{u} \\ v = \hat{v}\end{array}\right\} 在\Gamma_2上 \tag{4.139}$$

式中，$\hat{n} = (n_x, n_y)$ 表示边界Γ的单位法线，Γ_1和Γ_2是（不相交的）局部边界（Γ_1和Γ_2除少量的不连续点——奇点外不重合），$\hat{t}_x$和$\hat{t}_y$表示给定的边界力（推力），$\hat{u}$和$\hat{v}$是给定的位移，而h是平板的厚度。

将方程式（4.135）代入方程式（4.136）和把方程式（4.136）代入方程式（4.134）及（4.138），方程式（4.134）至（4.139）能仅用位移u和v来表示。我们得到$c_{ij} = hC_{ij}$

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) - c_{33}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = f_x \\ -c_{33}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(c_{12}\dfrac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = f_y\end{array}\right\} 在\Omega中$$

(4.140)

(4.140)

$$\left.\begin{aligned} t_x &\equiv \left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x + c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y = \hat{t}_x \\ t_y &\equiv c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x + \left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_y = \hat{t}_y \end{aligned}\right\} \text{在}\Gamma_1\text{上}$$

(4.141)

这里我们将给出构成平面弹性方程式有限元模型的两种不同方法。第一种方法采用根据位移与应变的关系和应变与应力的关系的矩阵表示的总势能泛函。这种计算法用于大多数有限元教科书中。第二种方法采用与上节一致的方法，并使用方程式(4.140)和(4 141) 的变分公式来建立有限元模型。当然，两种方法得到同样的最后方程式。

平面弹性方程式的矩阵公式

首先，我们用矩阵形式改写方程式 (4.134) 至 (4.136)，为此令

$$\{\varepsilon\}_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_e \qquad \{\sigma\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_e \qquad \{d\}_e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_e$$

(4.142)

式中，下标e意味着它们是在典型的有限元e上确定的。

其次，我们利用与平面弹性体方程式有关总势能泛函（在此不推导）

$$\Pi(d) = \frac{1}{2}h_e\int_{\Omega^e}\{\varepsilon\}_e^T\{\sigma\}_e dxdy - \int_{\Omega^e}\{d\}_e^T\{f\}_e dxdy - \oint_{\Gamma^e}\{d\}_e^T\{t\}_e ds \qquad (4.143)$$

式中，$\{f\}_e=\{f_x^e, f_y^e\}^T$是体积力矢量，$\{t\}_e=\{t_x^e, t_y^e\}^T$是推力矢量，而$h_e$是单元的厚度。方程式 (4.143) 中第一项表示应变能，第二项是体积力作的功，而第三项是表面推力所作的功。

应变—位移关系式 (4.135)、应力—应变关系式(4.136)和应力平衡方程式 (4.134) 能用下述形式表示

$$\{\varepsilon\}_e=[D]\{d\}_e \quad \{\sigma\}_e=[C]_e\{\varepsilon\}_e \quad -[D]^T\{\sigma\}_e=\{f\}_e \tag{4.144}$$

这里，$[C]=[c_{ij}]$，D是微分算子矩阵

$$[D]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{4.145}$$

设$u^{(e)}$和$v^{(e)}$（单元e上的位移）用下述形式的有限元插值来近似

$$u^{(e)}=\sum_{j=1}^{n}u_j^{(e)}\psi_j^{(e)} \qquad v^{(e)}=\sum_{j=1}^{n}v_j^{(e)}\psi_j^{(e)} \tag{4.146}$$

式中，$\psi_j^{(e)}$是方程式（4.143）中变分泛函的适当的插值函数。有

$$\{\varepsilon\}_e=[D]\{d\}_e=[D][\Psi]_e\{\Delta\}_e=[B]_e\{\Delta\}_e \tag{4.147}$$

式中 $$[B]_e=[D][\Psi]_e \tag{4.148a}$$

和 $$[\Psi]_e=\begin{bmatrix}\psi_1^{(e)} & 0 & \psi_2^{(e)} & 0 & \psi_3^{(e)} & 0 & \psi_4^{(e)} & 0 & \cdots & \psi_n^{(e)} & 0\\ 0 & \psi_1^{(e)} & 0 & \psi_2^{(e)} & 0 & \psi_3^{(e)} & 0 & \psi_4^{(e)} & \cdots & 0 & \psi_n^{(e)}\end{bmatrix}$$

$$\{\Delta^{(e)}\}=\{u_1^{(e)},v_1^{(e)},\cdots,u_n^{(e)},v_n^{(e)}\}^T \tag{4.148b}$$

将方程式（4.144）和(4.146)代入方程式（4.143），且设与$\{\Delta\}$有关的Π的第一个变量等于零（见2-3节），得到

$$[K^{(e)}]\{\Delta^{(e)}\}=\{F^{(e)}\} \tag{4.149}$$

式中

$$\begin{aligned}[K^{(e)}]&=h_e\int_{\Omega^e}[B]_e^T[C]_e[B]_e dxdy\\ \{F^{(e)}\}&=\int_{\Omega^e}[\Psi]_e^T\{f\}_e dxdy-\oint_{\Gamma^e}[\Psi]_e^T\{t\}_e ds\end{aligned} \tag{4.150}$$

因为变分泛函方程式（4.143）仅包括u和v对x和y的一次导数，可以利用相应于线性三角形单元或矩形单元的线性插值函数。

对于三结点（$n=3$）的线性三角形单元（见图4.31a），能够容易地计算$[K^{(e)}]$，有

$$\psi_{i,x}^{(e)}=\frac{\beta_i^{(e)}}{2A_e}\quad \psi_{i,y}^{(e)}=\frac{\gamma_i^{(e)}}{2A_e}\quad A_e=\text{单元面积} \tag{4.151a}$$

和

$$[B]_e=\frac{1}{2A_e}\begin{bmatrix}\beta_1^{(e)} & 0 & \beta_2^{(e)} & 0 & \beta_3^{(e)} & 0\\ 0 & \gamma_1^{(e)} & 0 & \gamma_2^{(e)} & 0 & \gamma_3^{(e)}\\ \gamma_1^{(e)} & \beta_1^{(e)} & \gamma_2^{(e)} & \beta_2^{(e)} & \gamma_3^{(e)} & \beta_3^{(e)}\end{bmatrix} \tag{4.151b}$$

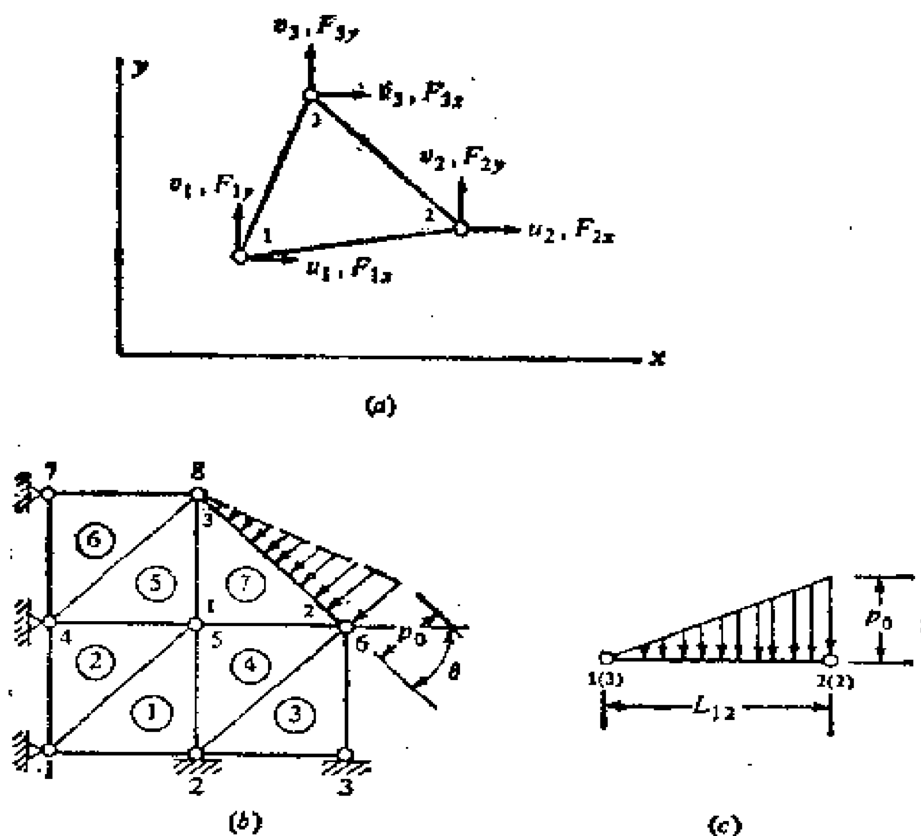


图4.31 平面弹性问题边界力分量的计算：（a）常应变三角形(CST)；（b）典型的平面弹性问题；（c）边界力的计算

对于f_x和f_y是常数（譬如说f_0）的情况，在$\{F^{(e)}\}$中的第一项积分为

$$\int_{\Omega^e}[\Psi]_e^T\{f\}_e dxdy = A_e\frac{f_0}{3}\{1,1,\cdots,1\}^T \qquad (4.152)$$

如果$\{t\}$限定在边界Γ的Γ_1部分上，对于共同边界Γ_1的那些单元，它能被计算。例如，图4.31b所示的结构承受分布的表面力。注意，边界单元是具有两个结点的线性单元，所以一维单元的线性插值函数能用于计算在单元7结点2和3上的力，且能沿总坐标解出（见图4.31c）。

$$\int_{\Omega^{(7)}}[\Psi]_e^T\{t\}_e ds = P_0L_{12}\left\{0,0,\frac{1}{6}\cos\theta,\ \frac{1}{6}\sin\theta,\ \frac{1}{3}\cos\theta,\ \frac{1}{3}\sin\theta\right\} \qquad (4.153)$$

从方程式（4.151a）观察到线性三角形单元得出单元方向的常应变。所以，单元通常称为常应变三角形（CST）单元。

平面弹性问题的变分（位移）公式

我们这里提供平面弹性问题的另一种公式。这个方法不采用在方程式（4.143）中的二次函数的知识（即总势能泛函）。我们从平面弹性变形的基本微分方程式（4.140）开始,建立有关的变分式和有限元模型。这个方法正好与我们在本书中已经使用的方法一样。

单元Ω^e上方程式（4.140）的变分形式为用第一方程式乘以试验函数w_1和用第二方程式乘以w_2，并用分部积分积分其结果[对$w_i(i=1,2)$进行二次微分]得出，我们有

$$0=\int_{\Omega^e}\left\{\frac{\partial w_1}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+c_{33}\frac{\partial w_1}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-w_1f_x\right\}dxdy-\oint_{\Gamma^e}w_1t_x ds$$

$$0=\int_{\Omega^e}\left\{c_{33}\frac{\partial w_2}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial w_2}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-w_2f_y\right\}dxdy-\oint_{\Gamma^e}w_2t_y ds \qquad (4.154)$$

式中，t_x和t_y表示方程式（4.141）确定的边界力。

对u和v采用式（4.146）的有限元插值，且将$w_1=\psi_i$和$w_2=\psi_i$代入方程式（4.154），得到

$$
\begin{aligned}
[K^{11}]\{u\}+[K^{12}]\{v\}&=\{F^1\}\\
[K^{21}]\{u\}+[K^{22}]\{v\}&=\{F^2\}
\end{aligned}
\tag{4.155}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
K^{11}_{ij}&=\int_{\Omega^e}\left(c_{11}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+c_{33}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy\\
K^{12}_{ij}=K^{21}_{ji}&=\int_{\Omega^e}\left(c_{12}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}+c_{33}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\right)dxdy\\
K^{22}_{ij}&=\int_{\Omega^e}\left(c_{33}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy\\
F^1_i&=\int_{\Omega^e}\psi_i f_x dxdy+\oint_{\Gamma^e}\psi_i t_x ds\\
F^2_i&=\int_{\Omega^e}\psi_i f_y dxdy+\oint_{\Gamma^e}\psi_i t_y ds
\end{aligned}
\tag{4.156}
$$

注意，例如系数矩阵$[K^{12}]$，表示在第一方程式中的系数v（即，第一个上标表示方程式的数量，而第二个上标表示变量的数量）。将表达式（4.150）引伸，能证明它们给出与线性三角形单元方程式（4.155）同样的方程式。

对于线性矩形单元（边长为a和b），系数矩阵（4.156）能利用方程式（4.40）来计算。根据边界条件，初始自由度（即位移）或次自由度（即力）能确定，在弹性问题区域边界的任何结点上有下述四种不同的可能性：

情况1：u和v是确定的（此时t_x和t_y是未知量）
情况2：u和t_y是确定的（此时t_x和v是未知量）
情况3：t_x和v是确定的（此时u和t_y是未知量）
情况4：t_x和t_y是确定的（此时u和v是未知量）　　（4.157）

通常，在边界上的一点处，(u,t_x)和(v,t_y)中只有一对数值是必须给定的。

例题4.7　研究图4.32所示的线性三角形单元和矩形单元。我

们要求为此单元计算方程式（4.150）的$[K^{(e)}]$和$\{F^{(e)}\}$。对这个三角形而言，单元插值函数为

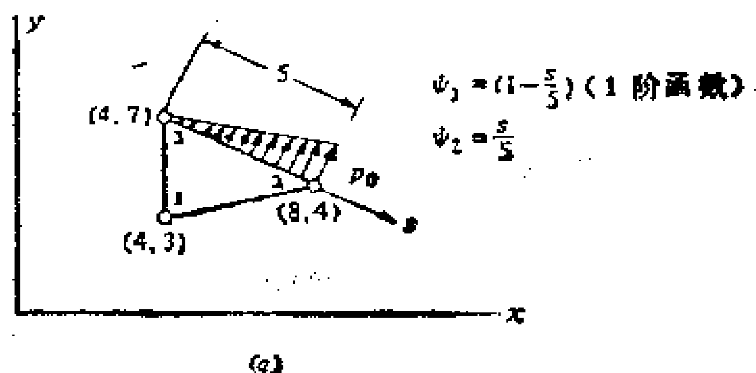
$$\psi_1=\frac{1}{16}(40-3x-4y) \qquad \psi_2=\frac{1}{16}(-16+4x)$$

$$\psi_3=\frac{1}{16}(-8-x+4y) \tag{4.158}$$

方程式（4.148a）的矩阵$[B]$为

$$[B]=\begin{bmatrix}\psi_{1,x} & 0 & \psi_{2,x} & 0 & \psi_{3,x} & 0\\ 0 & \psi_{1,y} & 0 & \psi_{2,y} & 0 & \psi_{3,y}\\ \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & \psi_{2,y} & \psi_{2,x} & \psi_{3,y} & \psi_{3,x}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4\\ -4 & -3 & 0 & 4 & 4 & -1\end{bmatrix} \tag{4.159}$$



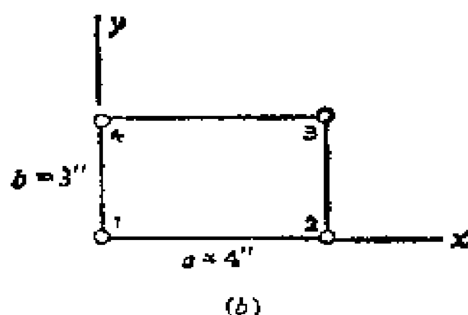


图4.32 例题4.7研究的三角形和矩形单元
（a）三角形单元 （b）矩形单元

正交各向异性的介质（$c_{13}=c_{23}=0$）的单元刚度矩阵为

$$
[K]=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}
\frac{9}{4}c_{11}+4c_{33} & 3(c_{12}+c_{33}) & -3c_{11} & -4c_{33} & -\frac{3}{4}c_{11}-4c_{33} & c_{33}-3c_{12} \\
 & 4c_{22}+\frac{9}{4}c_{33} & -4c_{12} & -3c_{33} & c_{12}-3c_{33} & \frac{3}{4}c_{33}-4c_{22} \\
 & & 4c_{11} & 0 & -c_{11} & 4c_{12} \\
 & & & 4c_{33} & 4c_{33} & -c_{33} \\
 & & & & 4c_{33}+\frac{1}{4}c_{11} & -(c_{12}+c_{33}) \\
\text{对称的} & & & & & 4c_{22}+\frac{1}{4}c_{33}
\end{bmatrix}
$$

(4.160)

力矢量$\{F^{(e)}\}$仅对第二个（边界）积分有作用。边1—2和3—1是单元间的边界，而边2—3是问题的边界，其上有确定的法向应力t_n，如图4.32a所示。首先，我们计算边界积分

$$f_i=\int_0^5\left(p_0\frac{s}{5}\right)\psi_i(s)ds \qquad (i=3,2) \tag{4.161}$$

$$f_3=\frac{5p_0}{6} \qquad f_2=\frac{10p_0}{6}$$

其次，计算结点2和3上f_i的x和y分量，有

$$\hat{F}_{2x}=f_2(0.8)=\frac{4}{3}p_0 \qquad \hat{F}_{2y}=f_2(0.6)=p_0$$

$$\hat{F}_{3x}=f_3(0.8)=\frac{2}{3}p_0 \qquad \hat{F}_{3y}=f_3(0.6)=\frac{1}{2}p_0$$

和

$$\{F^{(e)}\}=\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \hat{F}_{2x}+\tilde{F}_{2x} \\ \hat{F}_{2y} \\ \hat{F}_{3x}+\tilde{F}_{3x} \\ \hat{F}_{3y} \end{Bmatrix} \tag{4.162}$$

式中，$\tilde{F}_{2x}$和$\tilde{F}_{3x}$是边1—2和边3—1的内力分量。

对于一各向同性（钢）平板，取

$$E_1=E_2=E=30\times10^6\text{lb/in}^2 \quad \nu_{12}=\nu_{21}=\nu=0.3 \tag{4.163}$$

所以

$$c_{11}=\frac{E_1 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}=32.967h\times 10^6$$

$$c_{22}=\frac{E_2 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}=32.967h\times 10^6$$

$$c_{12}=c_{11}\nu_{12}=9.89h\times 10^6 \qquad (4.164)$$

$$c_{33}=G_{12}=11.538h\times 10^6$$

单元刚度矩阵（4.160）变成

$$[K^{(e)}]=10^6 h\begin{bmatrix} 1.5041 & 0.8036 & -1.2363 & -0.5769 & -0.2679 & -0.2266\\ & 1.9729 & -0.4945 & -0.4327 & -0.3091 & -1.5402\\ & & 1.6484 & 0.0 & -0.4121 & 0.4945\\ & \text{对称的} & & 0.5769 & 0.5769 & -0.1442\\ & & & & 0.6799 & -0.2679\\ & & & & & 1.6844 \end{bmatrix} \qquad (4.165)$$

现在我们要求对图4.32b 所示的线性矩形单元计算方程式（4.155）的单元刚度矩阵$[K^{(e)}]$，有$a=4$时和$b=3$时，且C_{ij}用方程式（4.164）给出。利用方程式（4.40）和（4.155），得到

$$[K^{(e)}]=10^7 h\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 1.3370 & 0.5357 & -0.5678 & -0.0412 & -0.6685 & -0.5357 & -1.0073 & 0.0412\\ & 1.7537 & 0.0412 & 0.4441 & -0.5357 & -0.8768 & -0.0412 & -1.3210\\ & & 1.3370 & -0.5357 & -0.1007 & -0.0412 & -0.6685 & 0.5357\\ & & & 1.7537 & 0.0412 & -1.3210 & 0.5357 & -0.8768\\ & & & & 1.3370 & 0.5357 & -0.5678 & -0.0412\\ \text{对称的} & & & & & 1.7537 & 0.0412 & 0.4441\\ & & & & & & 1.3370 & -0.5357\\ & & & & & & & 1.7537 \end{bmatrix} \qquad (4.166)$$

例题4.8 研究图4.33a所示承受均匀分布边界荷载的弹性薄板。首先我们研究用三角形单元把平板离散为两个单元的情况，然后我们进行全套代数运算求出结点位移。

单元矩阵

假定平板由各向异性材料组成，按平板应力假定对两个单元

（见图4.33b，c）分别进行单元刚度矩阵的计算。

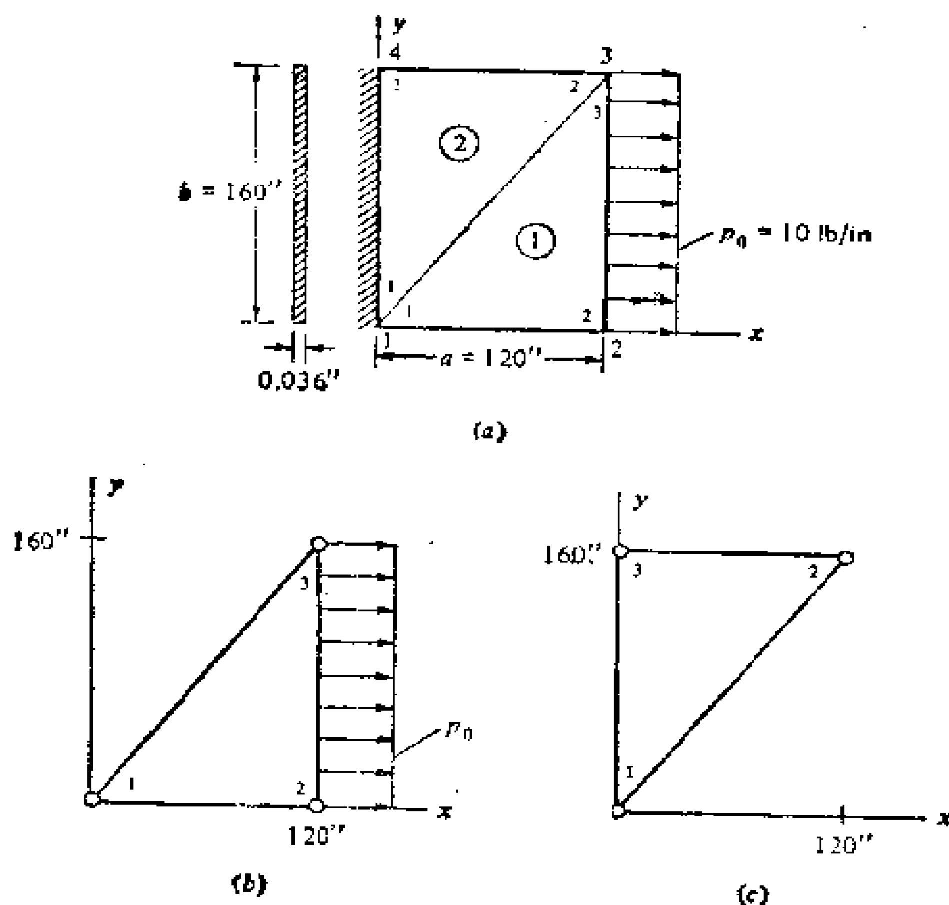


图4.33　用等应变三角形单元平面弹性问题的
几何尺寸和有限元网格：(a) 平面弹性问题；
(b) 单元1；(c) 单元2

单元1

$$x_1=y_1=y_2=0 \qquad x_2=x_3=a$$

$$y_3=b$$

$$\beta_1=-b \quad \beta_2=b \quad \beta_3=0 \tag{4.167}$$

$$\gamma_1=0 \quad \gamma_2=-a \quad \gamma_3=a$$

$$\{F^{(1)}\}=\{F_{1x}^{(1)},\ F_{1y}^{(1)},F_{2x}^{(1)},F_{2y}^{(1)},\ F_{3x}^{(1)},\ F_{3y}^{(1)}\}^T \tag{4.168}$$

$$[K^{(1)}]=C_1\begin{bmatrix} b^2 & & & & & \\ 0 & \frac{1-\nu}{2}b^2 & & & \text{对称的} & \\ -b^2 & \frac{1-\nu}{2}ab & b^2+\frac{1-\nu}{2}a^2 & & & \\ \nu ab & -\frac{1-\nu}{2}b^2 & -\frac{1+\nu}{2}ab & \frac{1-\nu}{2}b^2+a^2 & & \\ 0 & -\frac{1-\nu}{2}ab & -\frac{1-\nu}{2}a^2 & \frac{1-\nu}{2}ab & \frac{1-\nu}{2}a^2 & \\ -\nu ab & 0 & \nu ab & -a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$C_1=\frac{Eh}{2ab(1-\nu^2)} \tag{4.169}$$

单元2

$$\begin{aligned} &x_1=y_1=x_3=0 \qquad x_2=a \qquad y_2=y_3=b \\ &\beta_1=0 \quad \beta_2=b \quad \beta_3=-b \\ &\gamma_1=-a \quad \gamma_2=0 \quad \gamma_3=a \end{aligned} \tag{4.170}$$

$$\{F^{(2)}\}=\{F_{1x}^{(2)},F_{1y}^{(2)},F_{2x}^{(2)},F_{2y}^{(2)},F_{3x}^{(2)},F_{3y}^{(2)}\}^T \tag{4.171}$$

$$[K^{(2)}]=C_2\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2}a^2 & & & & & \\ 0 & a^2 & & & & \\ 0 & -\nu ab & b^2 & & \text{对称的} & \\ -\frac{1-\nu}{2}ab & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}b^2 & & \\ -\frac{1-\nu}{2}a^2 & \nu ab & -b^2 & \frac{1-\nu}{2}ab & b^2+\frac{1-\nu}{2}a^2 & \\ \frac{1-\nu}{2}aa & -a^2 & \nu ab & -\frac{1-\nu}{2}ab & -\frac{1-\nu}{2}ab & a^2+\frac{1-\nu}{2}b^2 \end{bmatrix}$$

$$C_2=\frac{Eh}{2ab(1-\nu^2)} \tag{4.172}$$

显然（从两个单元的单元结点观察），$[K^{(2)}]$能将结点1,2和3的系数分别变换为结点2，3和1的系数的$[K^{(1)}]$得到。例如，我们有

$$K^{(1)}_{\alpha\beta} = K^{(2)}_{pq}\begin{cases}\text{如果}\alpha = 2i-1\text{和}\beta = 2k-1,\text{则}p = 2j-1\text{和}q = 2l-1\\ \text{如果}\alpha = 2i\text{和}\beta = 2k,\ \text{则}p = 2j\text{和}q = 2l\end{cases}$$

(4.173)

式中，$i,k=1,2,3$，而i和j与k和l一样在自然顺序中置换（即如果$i=1$，则$j=2$，而当$i=3$，则$j=1$等等）。特别有

$$K^{(1)}_{11} = K^{(2)}_{33} \qquad K^{(1)}_{21} = K^{(2)}_{43}$$

等等。

集合

两个自由度(DOF)单元的单元矩阵集合与在4-2-6节中叙述的集合一样。对现有的有限元网格，总的和局部的结点和刚度间的关系给出如下：

结点的关系		刚度的关系	
总的（自由度）	局部的（自由度）	总的	局部的
	单元 1 的1(1,2)	K_{11}	$K^{(1)}_{11}+K^{(2)}_{11}$
1(1,2)		K_{22}	$K^{(1)}_{22}+K^{(2)}_{22}$
	单元 2 的1(1,2)	K_{12}	$K^{(1)}_{12}+K^{(2)}_{12}$
		K_{33}	$K^{(1)}_{33}$
2(3,4)	单元 1 的2(3,4)	K_{44}	$K^{(1)}_{44}$
		K_{34}	$K^{(1)}_{34}$
	单元 1 的3(5,6)	K_{55}	$K^{(1)}_{55}+K^{(2)}_{33}$
3(5,6)	单元 2 的2(3,4)	K_{66}	$K^{(1)}_{66}+K^{(2)}_{44}$
		K_{56}	$K^{(1)}_{56}+K^{(2)}_{34}$
		K_{77}	$K^{(2)}_{55}$
4(7,8)	单元 2 的3(5,6)	K_{88}	$K^{(2)}_{66}$
		K_{78}	$K^{(2)}_{56}$

(4.174)

如果两个总结点对应于同单元的两个（局部）结点，则相应的刚度系数不是零；反之，它是零。集合矩阵为

$$
[K]=\begin{bmatrix}
K_{11}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(1)}+K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & K_{15}^{(1)}+K_{13}^{(2)} & K_{16}^{(1)}+K_{14}^{(2)} & K_{15}^{(2)} & K_{16}^{(2)} \\
 & K_{22}^{(1)}+K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{25}^{(1)}+K_{23}^{(2)} & K_{26}^{(1)}+K_{24}^{(2)} & K_{25}^{(2)} & K_{26}^{(2)} \\
 & & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} & 0 & 0 \\
 & & & K_{44}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} & 0 & 0 \\
 & \text{对称的} & & & K_{55}^{(1)}+K_{33}^{(2)} & K_{56}^{(1)}+K_{34}^{(2)} & K_{35}^{(2)} & K_{36}^{(2)} \\
 & & & & & K_{66}^{(1)}+K_{44}^{(2)} & K_{45}^{(2)} & K_{46}^{(2)} \\
 & & & & & & K_{55}^{(2)} & K_{56}^{(2)} \\
 & & & & & & & K_{66}^{(2)}
\end{bmatrix}
\tag{4.175}
$$

集合力矢量是

$$
\{F\}=\begin{Bmatrix}
F_1^{(1)}+F_1^{(2)} \\
F_2^{(1)}+F_2^{(2)} \\
F_3^{(1)} \\
F_4^{(1)} \\
F_5^{(1)}+F_3^{(2)} \\
F_6^{(1)}+F_4^{(2)} \\
F_5^{(2)} \\
F_6^{(2)}
\end{Bmatrix}
\tag{4.176}
$$

式中，$F_1=F_{1x}$，$F_2=F_{1y}$，$F_3=F_{2x}$，$F_4=F_{2y}$，等等。

边界条件

给定的（初始的）自由度是

$$
U_1=V_1=U_4=V_4=0 \tag{4.177}
$$

已知（次自由度）力已经包括在$\{F^{(1)}\}$和$\{F^{(2)}\}$中。力的平衡要求：

$$
F_3^{(1)}=\frac{p_0 b}{2} \qquad F_4^{(1)}=0,\quad F_5^{(1)}+F_3^{(2)}=\frac{p_0 b}{2}
$$
$$
F_6^{(1)}+F_4^{(2)}=0 \tag{4.178}
$$

方程的解

矩阵（4.175)的头两行和头两列与最后两行与最后两列能够

删去（因为给定边界是齐次的），以得到下述矩阵方程式的聚缩形式

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} \\ K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} \\ K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & K_{55}^{(1)}+K_{33}^{(2)} & K_{56}^{(1)}+K_{34}^{(2)} \\ K_{63}^{(1)} & K_{64}^{(1)} & K_{65}^{(1)}+K_{43}^{(2)} & K_{66}^{(1)}+K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_0 b}{2} \\ 0 \\ \frac{p_0 b}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.179}$$

或（利用 $a=120$时，$b=160$时，$t=0.036$时，$\nu=0.25$，$E=30\times 10^6$磅/时^{2}和$p_0=10$磅/时）

$$10^4 \begin{bmatrix} 93.0 & -36.0 & -16.2 & 14.4 \\ -36.0 & 72.0 & 21.6 & -43.2 \\ -16.2 & 21.6 & 93.0 & 0.0 \\ 14.4 & -43.2 & 0.0 & 72.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 800.0 \\ 0.0 \\ 800.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \tag{4.180}$$

对这个矩阵求逆，得到

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \frac{10^{-6}}{3} \begin{bmatrix} 4.07 & 2.34 & 0.17 & 0.59 \\ 2.34 & 8.65 & -1.6 & 4.72 \\ 0.17 & -1.6 & 3.63 & -0.99 \\ 0.59 & 4.72 & -0.99 & 6.88 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 800.0 \\ 0.0 \\ 800.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

$$= 10^{-4}\begin{Bmatrix} 11.28 \\ 1.97 \\ 10.10 \\ -1.09 \end{Bmatrix} \text{in} \tag{4.181}$$

注意，解对水平中线是不对称的（即，$U_2 \neq U_3$，$V_2 \neq -V_3$）（精确的解对中线应是对称的）。这是由于在有限元离散化中非对称所致。

表4.6包括各向同性平板和正交各向异性平板点（120,0）和点(120,160)上位移的有限元解(利用计算机获得的值)。

表4.6　利用三角形和矩形单元不同网格和材料性质的薄板(平面应力假设)的有限元解

网格	材料	U_2 $(\times 10^{-4})$	V_2 $(\times 10^{-4})$	U_3 $(\times 10^{-4})$	V_3 $(\times 10^{-4})$
三角形单元网格（节点1,2,3,4）	各向同性的 $E = 30\times10^6$磅/吋^2 $\nu = 0.25$ $G = E/2(1+\nu)$	11.291 10.853	1.9637 2.3256	10.113 10.853	−1.08† −2.3256
三角形单元网格（节点1,2,3,4）	正交各向异性的 $E_1 = 31\times10^6$磅/吋^2 $E_2 = 2.7\times10^6$磅/吋^2 $G_{12} = 0.75\times10^6$磅/吋^2 $\nu_{12} = 0.28$	10.767 10.728	1.6662 2.6758	10.650 10.728	−1.579 −2.6758
交叉对角线网格（节点1,2,3,4）	正交各向异性的 (同上)	10.821 10.778	2.157 2.002	10.821 10.778	−2.157 −2.002

† 第一行相应于三角形单元而第二行相应于一个矩形单元。

例题4.9　研究如图4.34a所示的固定在两块光滑刚性墙间并承受均匀压缩σ的一弹性薄板。要求确定平板中的位移和应力。由

于该问题是双轴对称，仅考虑板的四分之一即可。与该四分之一板相应的边界条件如图4.34b所示。图4.34b同时包括 4 × 2 网格的三角形单元或矩形单元。

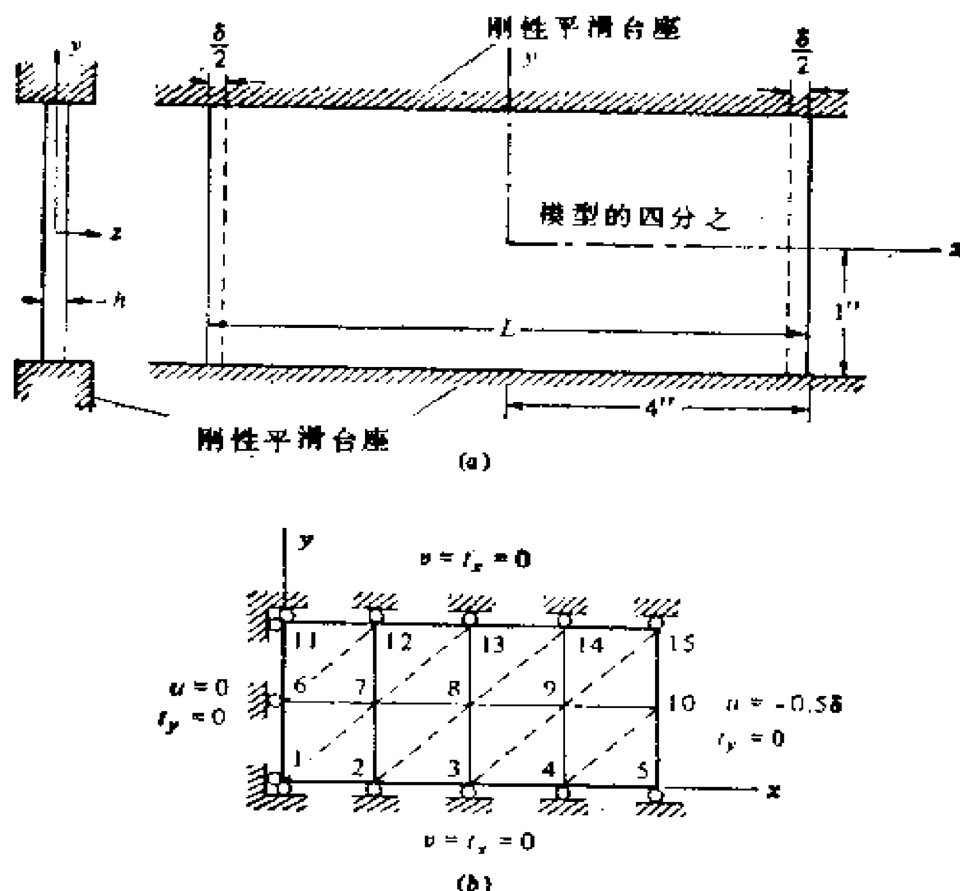


图4.34 平面弹性问题的几何图形和有限元网格；(a)平面弹性问题；(b)四分之一域的有限元网格和边界条件

我们不准备讨论目前已成为惯例的单元矩阵的集合问题。设U_i和V_i表示在总结点i上的总自由度。给定的初始自由度是

$$\begin{aligned} &U_1=V_1=V_2=V_3=V_4=V_5=U_6=U_{11}=0 \\ &V_{11}=V_{12}=V_{13}=V_{14}=V_{15}=0 \\ &U_5=U_{10}=U_{15}=-0.5\delta=-0.1 \end{aligned} \tag{4.182}$$

与未定边界(初始的)自由度有关的力是零，有

$$F_{2x}=F_{3x}=F_{4x}=F_{6y}=F_{10y}=F_{12x}=F_{13x}=F_{14x}=0 \tag{4.183}$$

最终的方程式的解(无论三角形单元网格或者是矩形单元的网格)为

$$
\begin{aligned}
&U_2=U_7=U_{12}=-0.025\\
&U_3=U_8=U_{13}=-0.050\\
&U_4=U_9=U_{14}=-0.075\\
&U_5=U_{10}=U_{15}=-0.100\\
&V_i=0\quad 对所有 i
\end{aligned}
\tag{4.184}
$$

此与精确解一致 ($\delta=0.2$, $L=8$)

$$u=\frac{x\delta}{L}\quad v=0 \tag{4.185}$$

对所有单元$e=1,2,\cdots\cdots$,应力是(对$\nu=0.3$)

$$\sigma_x^{(e)}=-0.02747E\quad \sigma_y^{(e)}=-0.008242E\quad \tau_{xy}^{(e)}=0 \tag{4.186}$$

应力的精确解为

$$\sigma_x=-\frac{E\delta}{(1-\nu^2)L}\quad \sigma_y=-\frac{\nu E\delta}{(1-\nu^2)L}\quad \tau_{xy}=0 \tag{4.187}$$

4-5-3 不可压缩液体的流动

研究在闭合域Ω中粘性不可压缩液体的稳定流动。假定域范围中的一边 (譬如沿z的方向)很长和沿该方向不存在流动，且在其他两个方向中速度分量不随z方向变化。在这些条件下，该流动能用二维模型来近似。基本方程式为:

线性动量守恒:

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial P}{\partial x}=f_x\\
&-\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial P}{\partial y}=f_y
\end{aligned}
\right\}在\Omega中 \tag{4.188}
$$

质量守恒:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\qquad 在\Omega中 \tag{4.189}$$

式中，u和v分别是沿x和y方向上的速度分量，P是压力，f_x和f_y是

沿x和y方向的体积力（若有的话），而μ是液体的粘度。边界条件为(见例题2.5)

$$\left.\begin{aligned} t_x &\equiv 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y - Pn_x = \hat{t}_x \\ t_y &\equiv \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}n_y - Pn_y = \hat{t}_y \end{aligned}\right\} \text{在}\Gamma_1\text{上} \quad (4.190)$$

$$u = \hat{u} \quad v = \hat{v} \quad \text{在}\Gamma_2\text{上} \quad (4.191)$$

在液体流动问题中，边界条件的说明存在如在(4.157)情况中给出的四种同样的可能性。

压力速度的有限元模型

在单元Ω^e上方程式(4.188)至(4.190)的变分公式为

$$0 = \int_{\Omega^e}\left[2\mu\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial w_1}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial w_1}{\partial x}P - w_1 f_x\right]dxdy$$

$$- \oint_{\Gamma^e} w_1 t_x ds \quad (4.192a)$$

$$0 = \int_{\Omega^e}\left[\mu\frac{\partial w_2}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\mu\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial y}P\right.$$

$$\left. - w_2 f_y\right]dxdy - \oint_{\Gamma^e} w_2 t_y ds \quad (4.192b)$$

$$0 = \int_{\Omega^e} w_3\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy \quad (4.193)$$

式中，w_1（u的变化），w_2（v的变化）和w_3（P的变化）是适当的试函数。

注意，包含压力的项（在线性动量方程式中）也是分部积分。进行从P到w_1和w_2的微分，我们既得到物理上有意义的自然边界条件（包含P），又得到有限元方程式的对称性(正如我们即可见的)。尽管压力是初始变量，因为w_3（P的变化）没有出现在公式的边界积分中，它的特性不构成基本边界条件。然而，P出现在t_x和t_y中。还要注意，在动量公式中压力是以非微分的形式出现。因此，重力函数w_3应为常数(P也同样)，而w_1和w_2是x和y的双线性函数（u和v也是）。换句话说，对u和v可以采用线性插

值，而对P可采用常数。同样，对u和v也可以采用二次近似式和对P可采用线性近似式（见图4.35）。从基本的（动量）方程式可以看出，P的导数比u和v的导数少一次。至此，用于P的插值应比用于u和v的插值少一次（为了近似式的一致性）。

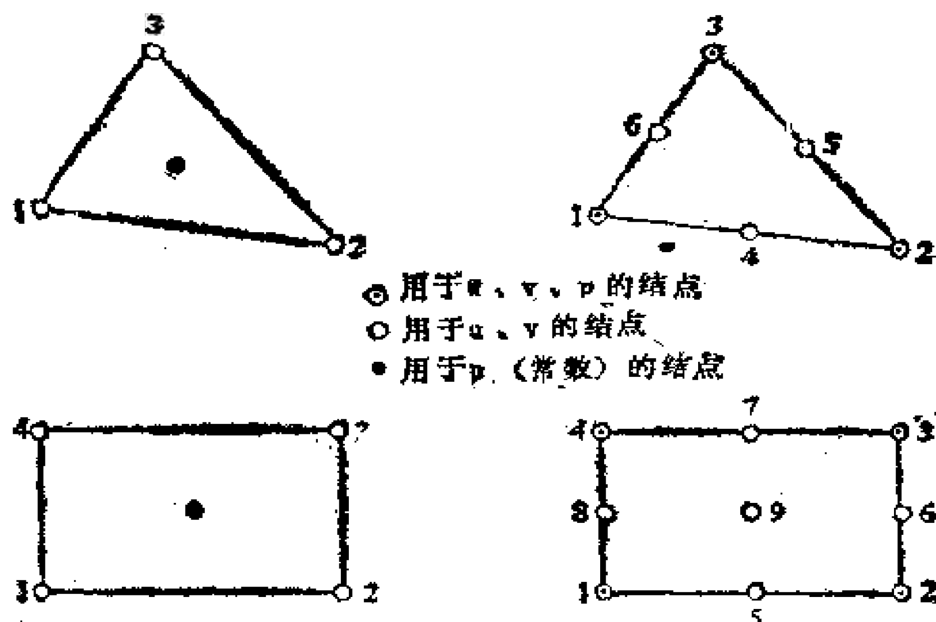


图4.35　不可压缩液体流动压力速度模型的线性和二次三角形和矩形有限单元

有一典型的单元Ω^e中，我们利用下述形式的插值来近似u、v和P

$$u=\sum_{i=1}^{r}u_i\psi_i\qquad v=\sum_{i=1}^{r}v_i\psi_i\qquad P=\sum_{i=1}^{s}P_i\phi_i\qquad(4.194)$$

式中，ψ_i和ϕ_i分别是r和$s(r>s)$次的插值函数。将方程式(4.194)代入方程式（4.192）和(4.193)，得到

$$\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}]\\ & [K^{22}] & [K^{23}]\\ \text{对称的} & & [K^{33}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u\}\\ \{v\}\\ \{P\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\\ \{0\}\end{Bmatrix}\qquad(4.195)$$

式中

$$[K^{11}]=2\mu[S^{11}]+\mu[S^{22}]\qquad [K^{12}]=\mu[S^{12}]^T$$

$$[K^{22}]=\mu[S^{11}]+2\mu[S^{22}] \qquad [K^{33}]=[0] \text{（零矩阵）}$$

$$S_{ij}^{11}=\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dxdy \qquad S_{ij}^{12}=\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dxdy$$

$$S_{ij}^{22}=\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dxdy \tag{4.196}$$

$$F_i^1=\int_{\Omega^e}f_x\psi_i dxdy+\oint_{\Gamma^e}t_x\psi_i ds$$

$$F_i^2=\int_{\Omega^e}f_y\psi_i dxdy+\oint_{\Gamma^e}t_y\psi_i ds$$

$$K_{iJ}^{13}=\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\phi_J dxdy \qquad K_{iJ}^{23}=\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\phi_J dxdy$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ r \qquad J=1,\ 2,\ \cdots,\ s$$

注意，方程式（4.195）中的三个矩阵方程式分别对应于在方程式（4.192）和（4.193）中的三个基本方程式。在方程式(4.195)中的有限元模型称之为初始变量模型,压力速度模型或混合模型。

应该指出的是：由于0出现在主对角线上，方程式(4.195)中有限元模型是非正定的。因此，解方程式在目前的情况下必须应用“旋转”的办法。同时，由于压力没有作为每个结点上的自由度出现（见图4.35)，这就使得集合的计算机运算更复杂。为了避免这样解法，我们提出一个替换的，但是近似的方程式(4.188)至（4.190）的有限元公式。

罚有限元模型

方程式（4.188）和（4.189）的罚函数公式包含把连续方程式（4.189）视作为速度分量之一种约束来处理。为了用罚方法建立问题的公式，首先注意相应于变分方程式(4.192)和(4.193)的二次形式为

$$I(u,v,P)=\int_{\Omega^e}\Big\{\mu\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big]$$

$$-P\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\Big)-f_x u-f_y v\Big\}dxdy$$

$$-\oint_{\Gamma^e}(t_x u + t_y v)ds \quad (4.197)$$

读者请验算这个结果。假定速度分量满足方程式（4.189）。然后略去方程式（4.197）中的压力项。设$I_0(u, v)$表示当略去下边划线的项时，从$I(u,v,p)$得到的二次形式。现在我们可以把解方程式（4.192）和（4.193）的问题，看成是使承受方程式(4.189)中约束的$I_0(u, v)$为最小的问题之一。罚函数方法允许我们把约束返回到在最小二乘法近似意义上的二次式：求修正泛函的最小值

$$I_P(u,v) = I_0(u,v) + \frac{\gamma_e}{2}\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dxdy \quad (4.198)$$

这等于解下述变形（或弱的）方程式（采用取I_P的第一变量，并令其为0获得）：

$$0 = \int_{\Omega^e}\left\{2\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right.$$

$$+ \mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\left. - w_1 f_x - w_2 f_y\right\}dxdy - \oint_{\Gamma^e}(w_1 t_x + w_2 t_y)ds$$

$$+ \gamma_e\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy \quad (4.199)$$

式中，γ_e表示罚参数，它的值是预先选定的，下面将简单讨论一些选定的准则。

与罚函数公式(4.199)有关的有限元模型用方程 式(4.194)的u和v代入后给出

$$\begin{bmatrix}[\overline{K}^{11}] & [\overline{K}^{12}] \\ [\overline{K}^{12}]^T & [\overline{K}^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u\} \\ \{v\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{F^1\} \\ \{F^2\}\end{Bmatrix} \quad (4.200)$$

式中，F_i^1和F_i^2由方程式（4.196）确定，且

$$[\overline{K}^{11}] = [K^{11}] + \gamma[S^{11}] \qquad [\overline{K}^{12}] = [K^{12}] + \gamma[S^{12}]$$
$$[\overline{K}^{22}] = [K^{22}] + \gamma[S^{22}]$$

$$(4.201)$$

$K_{ij}^{\alpha\beta}$、$S_{ij}^{\alpha\beta}$ (α, $\beta=1$, 2) 是由方程式 (4.196) 确定的单元矩阵。建议罚参数的值选择如下

$$\gamma_e=\mu\times 10^6\leqslant 10^{13} \tag{4.202}$$

上限取决于使用的计算机。γ值太大将胜过方程式 (4.201) 中的其他项，且在计算中的舍入误差(取决于在使用计算机中的字长)会导出无价值的解 (即处处$u=v=0$)，这当然满足约束条件。为了要看到此点，可注意单元方程式 (4.200)(必须是组合方程式)的形式是

$$[K]\{\Delta\}\equiv[\mu K^1+\gamma K^2]\{\Delta\}=\{F\} \quad \{\Delta\}=\begin{Bmatrix}\{u\}\\\{v\}\end{Bmatrix} \tag{4.203}$$

式中，$[K^1]$是从动量方程式(4.188)[同样能从在方程式 (4.197) 中的函数] 所得到的系数矩阵。而$[K^2]$是从方程式 (4.199)中罚泛函 (即最后积分) 所得到的系数矩阵，有

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left[\frac{\mu}{\gamma}K^1+K^2\right]\{\Delta\}=\lim_{\gamma\to\infty}\left\{\frac{1}{\gamma}F\right\}=0 \tag{4.204}$$

于是，对一个很大的γ值，得到$\{\Delta\}=\{0\}$。反之，对一个小的γ值，约束条件不能精确地满足。甚至当γ是足够大 [如在方程式 (4.202) 中给出的一样]，罚项支配非罚项，且得到无价值的解。为避免此点，我们应使$[K^2]$为奇异的。为了使 $[K^2]$ 是不可求逆的，而总的$[K]$是可以求逆的 (因为$[K^1]$是不可求逆的)，保证$[K^2]$奇异性的一种方法是在 $[K^2]$ 积分的数值计算中采用所谓变换积分。更具体地说，当使用线性矩形单元时，对$[K^1]$的计算应采用标准的2×2Gauss求积法，而对$[K^2]$ 的计算应采用 1 × 1 Gauss求积法 (Gauss求积法见3-6-4节，也可见4-6-2节)。表4.7包括利用精确积分 (或两点 Gauss 准则) 和两种不同变换积分方法计算的$S_{ij}^{\alpha\beta}(\alpha、\beta=0,1,2)$的显形式。

罚有限元模型使我们能计算有限元网格每个结点上的速度。模型中不存在的压力应该用若干换算方法来计算。根据罚函数方法的理论，众所周知在每个单元中Lagrange乘数 (在此情况下，

它是等于负的压力）从下述关系式中能够计算：

$$-P^e=\gamma_e \operatorname{div}\mathbf{u}^e=\gamma_e\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}+\frac{\partial v^e}{\partial y}\right) \tag{4.205}$$

表4.7　方程式(4.196)矩阵精确和数值积分值

矩阵	精确积分[†]	变换积分	
		梯形准则	一点Gauss准则
$[S^{00}]$	$\frac{ab}{36}\begin{bmatrix}4&2&1&2\\&4&2&1\\&&4&2\\ \text{对称的}&&&4\end{bmatrix}$	$\frac{ab}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\&1&0&0\\&&1&0\\ \text{对称的}&&&1\end{bmatrix}$	$\frac{ab}{16}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\ \text{对称的}&&&1\end{bmatrix}$
$[S^{01}]$	$\frac{b}{12}\begin{bmatrix}-2&2&1&-1\\-2&2&1&-1\\-1&1&2&-2\\-1&1&2&-2\end{bmatrix}$	$\frac{b}{4}\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$	$\frac{b}{8}\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\end{bmatrix}$
$[S^{02}]$	$\frac{a}{12}\begin{bmatrix}-2&-1&1&2\\-1&-2&2&1\\-1&-2&2&1\\-2&-1&1&2\end{bmatrix}$	$\frac{a}{4}\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$	$\frac{a}{8}\begin{bmatrix}-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}$
$[S^{11}]$	$\frac{b}{6a}\begin{bmatrix}2&-2&-1&1\\&2&1&-1\\&&2&-2\\ \text{对称的}&&&2\end{bmatrix}$	$\frac{b}{2a}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\&1&0&0\\&&1&-1\\ \text{对称的}&&&1\end{bmatrix}$	$\frac{b}{4a}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\&1&1&-1\\&&1&-1\\ \text{对称的}&&&1\end{bmatrix}$
$[S^{12}]$	$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$
$[S^{22}]$	$\frac{a}{6b}\begin{bmatrix}2&1&-1&-2\\&2&-2&-1\\&&2&1\\ \text{对称的}&&&2\end{bmatrix}$	$\frac{a}{2b}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\&1&-1&0\\&&1&0\\ \text{对称的}&&&1\end{bmatrix}$	$\frac{a}{4b}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\&1&-1&-1\\&&1&1\\ \text{对称的}&&&1\end{bmatrix}$

† 2点Gauss准则和三分之一Simpson准则也给出相同的结果

式中，$\mathbf{u}^e=(u^e, v^e)$ 是从解方程式（4.203）所得到的速度矢量。在有限元分析中，压力从在每单元中的速度场计算出来〔速度场用解方程式（4.200）得到〕。因为在Gauss点速度的导数被计算，在Gauss点的压力也被计算。在线性矩形单元的情况下，每单元的中心点处的压力被计算（因为罚项使用一点准则）。

注意，罚有限元模型（4.200）仅包括每结点的两个初始自由度。压力按方程式（4.205）计算。在混合的有限元模型中，压力作为初始未知量得到。然而，应该注意的是，P 的特性不构成基本边界条件，因此压力在常值范围内能唯一地的确定。换句话说，在压力—速度公式中，P至少在一点上给定，以排除压力的常值状态。读者可查阅本章末的适当参考资料进行详细的了解。

例题4.10 研究顶平面相对于底平面以速度u_0运动的两平行长板间不可压缩液体的稳定、均匀的层流（见习题3.29）。对考虑充分展开的情形，速度场具有如下形式

$$u=u(y) \quad v=w=0 \tag{4.206}$$

所以，方程式（4.188）采用下述形式

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\mu\frac{d^2u}{dy^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{4.207}$$

且方程式（4.189）同样被满足。方程式（4.207）伴随着的边界条件

$$u(0)=0 \quad u(2b)=u_0 \tag{4.208}$$

给出的解为：

$$u=\frac{u_0y}{2b}-\frac{cyb}{\mu}\left(1-\frac{y}{2b}\right) \quad c=\frac{dP}{dx}=\text{常数}=\frac{P_1-P_0}{a}$$

$$\tau_{xy}=\frac{\mu u_0}{2b}-\frac{c}{2}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{4.209}$$

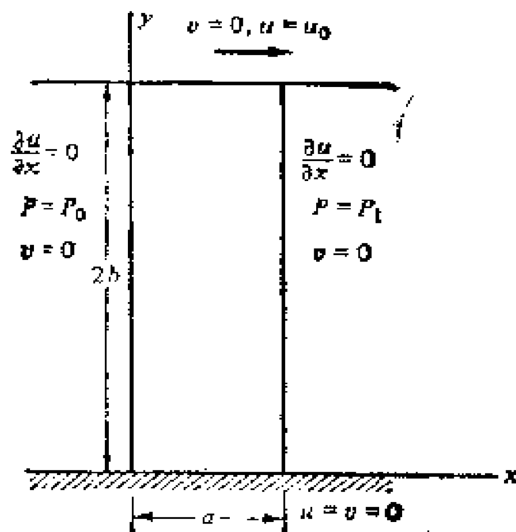
式中，P_0和P_1分别是$x=0$和$x=a$处的压力值，这里我们要求首先利用压力—速度模型，然后利用罚模型来解此问题。为此，我们研究一个具有如图4.36a所示边界条件的宽度a（沿x方向）的域。取 $\mu=1$，$a=2$，$b=3$，$u_0=3$，$P_0=1$ 和 $P_1=0$，所以

$dP/dx = -0.5$。

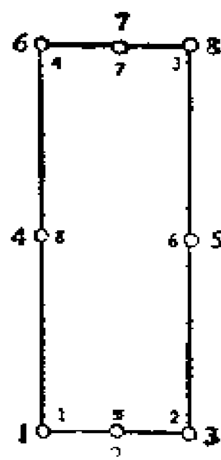
压力—速度模型

八结点（即S型）矩形单元（见图4.36）使 用一个速度场的二次近似值和压力的线性近似式

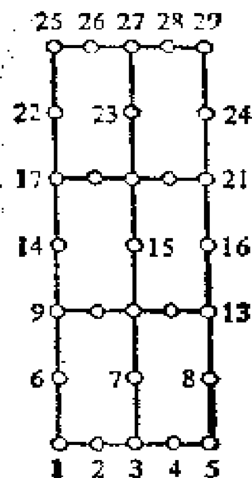
$$u = \sum_{i=1}^{8} u_i \psi_i \qquad v = \sum_{i=1}^{8} v_i \psi_i \qquad P = \sum_{i=1}^{4} P_i \phi_i \qquad (4.210)$$



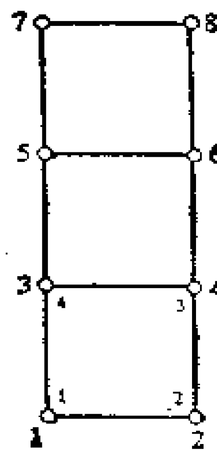
(a)



(b)



(c)



(d)

图4.36 两平行板间的Couette流：（a）域和边界条件（$b=3$，$a=2$，$u_0=3$，$P_0=1$）；（b）压力—速度模型的一个单元的网格；（c）压力—速度模型的2×3个八结点单元的网格；（d）罚有限元模型的1×3个四结点单元的网格

式中，ψ_i是方程式（4.128）的插值函数（除在图4.36b中结点编号不同于图4.28中的结点编号以外），而ϕ_i是方程式（4.121）的线性插值函数（也可见图4.27）。

速度场上的边界条件构成基本的边界条件，而P上的边界条件包括在自然边界条件之中。于是有

$$x=0: \quad t_x=\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}-P\right)n_x=-P_0(-1)=P_0$$
$$x=a: \quad t_x=\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}-P\right)n_x=-P_1(1)=-P_1 \tag{4.211}$$

将t_x值代入方程式（4.196）中的边界积分，得到

$$f_i^{(e)}=\int_{\Gamma^e}t_x\psi_i ds=\int_0^h t_x\psi_i(0,y)dy \tag{4.212}$$

式中，$\psi_i(0,y)$是长为h一维单元的二次插值函数：

$$\psi_1=\left(1-\frac{2y}{h}\right)\left(1-\frac{y}{h}\right) \qquad \psi_2=\frac{4y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right) \tag{4.213}$$

$$\psi_3=-\frac{y}{h}\left(1-\frac{2y}{h}\right)$$

将方程式（4.213）代入方程式（4.212），并进行积分，得到

$$f_1=t_x\left(\frac{h}{6}\right) \quad f_2=t_x\left(\frac{2h}{3}\right) \quad f_3=t_x\left(\frac{h}{6}\right) \tag{4.214}$$

因为不存在受压力的基本边界条件，压力仅在一个任意常数中计算。在用压力—速度模型的有限元分析中，必须在某点上至少给定一个P，以便确定此常数（今后在压力中切割刚体的方法）。在此例题中，我们规定边界上一点的P是0（譬如说，在结点3处）

$$P_3=0 \tag{4.215}$$

现在研究域的一个单元的网格（见图4.36b）。单元（和总的）矩阵是20×20阶的矩阵。边界条件是

$$U_1=V_1=U_2=V_2=U_3=V_3=V_4=V_5=V_6=V_7=V_8$$
$$=0$$

$$U_6 = U_7 = U_8 = 3.0 \tag{4.216}$$

所得方程组（是5×5）的解为

$$U_4 = U_5 = 3.75 \quad P_1 = 5.0 \quad P_6 = 17.0 \quad P_8 = -20.0 \tag{4.217}$$

当速度的解与结点上精确解相吻合时，此压力是完全不正确的（真正的解在$x=0$处是$P=1.0$）。这是由于在该问题中使用粗的网格所致（换句话说，压力对网格和边界条件是敏感的）。

一个2×3的八结点单元网格（见图4.36c）得到速度和压力二者的精确解（当P在结点5给定时）。

罚有限元模型

模型的边界条件与压力一速度模型所讨论的边界条件相同（见图4.36a）。在方程式(4.201)中使用表4.7的单元矩阵可写出显形式的单元矩阵：

$$[K^{11}] = \frac{\mu}{6}\left(2\alpha\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\gamma\beta}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$[K^{22}] = \frac{\mu}{6}\left(\alpha\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \right.$$

$$
+2\beta\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
+\frac{\beta\gamma}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Bigg)
$$

$$
\{F^1\}=\begin{Bmatrix} t_x h/2 \\ Q_{x2} \\ Q_{x3} \\ t_x h/2 \end{Bmatrix} \qquad \{F^2\}=\begin{Bmatrix} Q_{y1} \\ Q_{y2} \\ Q_{y3} \\ Q_{y4} \end{Bmatrix} \tag{4.218}
$$

式中，$\alpha=1/\beta=h_y/h_x$，h_x和h_y是单元x和y的尺寸。一个1×3的四结点线性单元的网格如图4.36d所示。

对罚参数γ的不同选择的罚有限元解在表4.8中给出。在所有的情况下，压力和应力被正确地算出。从在表4.8中提供的结果明

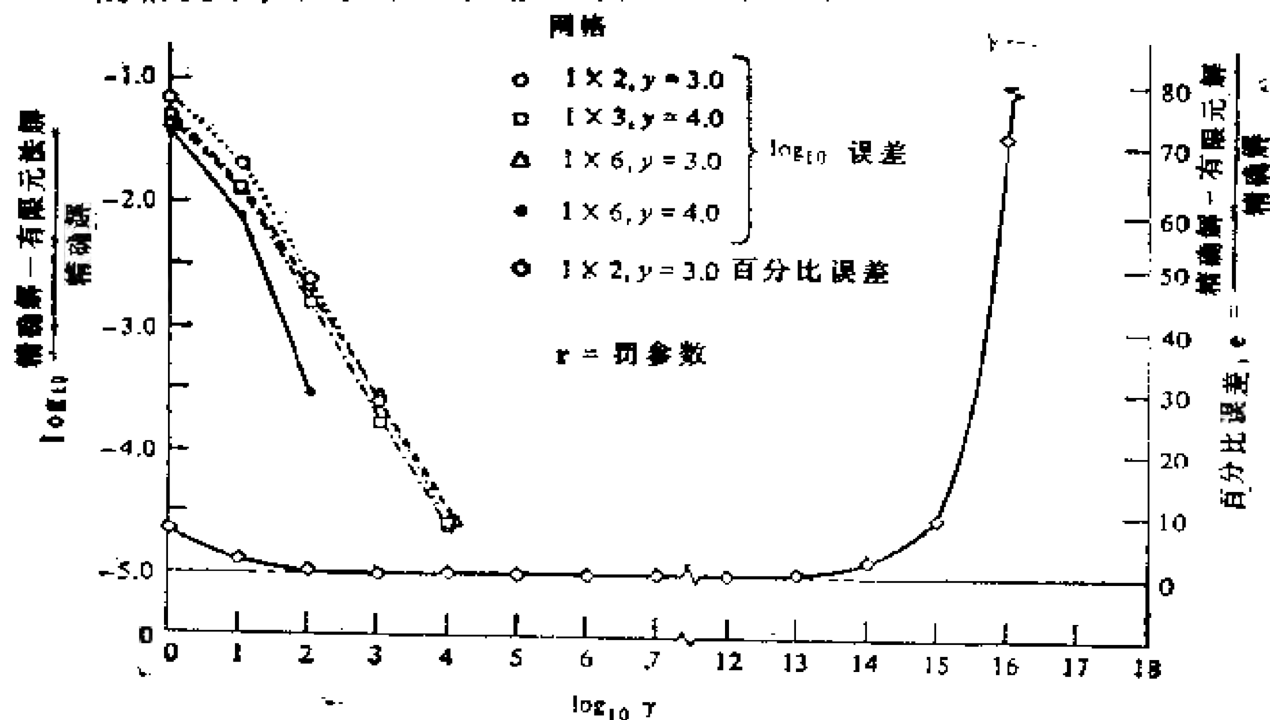


图4.37 罚有限元解随罚参数的收敛性

显看出，对所有的固定网格，随着罚系数γ值的增大，这解是收敛的。同样，对所有固定的γ，随着网格的加密，解也是收敛的。注意，对罚参数的一个宽范围（$\gamma=10^4-10^{12}$），解实际上是不变的(见图4.37)。一般说，这范围取决于问题性质、所用的网格以及使用的计算机中的字长。

表4.8 随着罚参数的增大和网格的加密有限元解的收敛性

网格		γ							
	y	1.0	10	10^2	10^3	10^4	10^5-10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{17}
	1.0	—	—	—	—	—	—	—	—	
	2.0	—	—	—	—	—	—	—	—	无
1×2	3.0	4.0121	3.8280	3.7597	3.7510	3.7501	3.7500	3.7500	3.7482	反函数
	4.0	—	—	—	—	—	—	—	—	存在
	5.0	—	—	—	—	—	—	—	—	
	6.0	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	
	1.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	2.0	3.2000	3.0541	3.0065	3.0007	3.0001	3.0000	2.9998	2.9967	0.4000
1×3	3.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	4.0	4.2000	4.0541	4.0065	4.0007	4.0001	4.0000	3.9998	3.9960	3.2000
	5.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	6.0	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000
	1.0	1.9335	1.8096	1.7590	1.7610	1.7501	1.7500	1.7497	1.7455	1.0310
	2.0	3.1649	3.0331	3.0012	3.0000	3.0000	3.0000	2.9995	2.9919	2.0075
1×6	3.0	3.9170	3.7978	3.7585	3.7510	3.7501	3.7500	3.7494	3.7404	2.4162
	4.0	4.1649	4.0331	4.0012	4.0000	4.0000	4.0000	3.9994	3.9914	2.6576
	.0	3.9335	3.8096	3.7590	3.7510	3.7501	3.7500	3.7496	3.7444	2.8420
	6.0	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000

例题4.11 研究粘性不可压缩材料在两个长的平行板间的流动。当板的长度比板的宽度和板间距离很大时，有一个平面流动的情况（在由板的宽度和板间距离形成的平面中）。假设平面流动的情况存在，我们确定自由表面的速度分布图。该问题的近似的(解析)解是由Nadai(1963)提出(参阅本章末的参考文献)：

$$u = \frac{3v_0 x}{2b}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \qquad v = -\frac{v_0 y}{2b}\left(3 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$P = \frac{P_0}{a^2}(a^2 + y^2 - x^2) \qquad P_0 = \frac{3\mu v_0 a^2}{2b^3}$$

$$\sigma_x \equiv 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - P = \frac{P_0}{a^2}(x^2 - 3y^2 - a^2 + 2b^2) \quad (4.219)$$

$$\sigma_y \equiv 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - P = \frac{P_0}{a^2}(x^2 + y^2 - a^2 - 2b^2)$$

$$\tau_{xy} \equiv \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{-2P_0 xy}{a^2}$$

令v_0是两块板互相移动的速度（也就是挤出的液体），而令$2b$和$2a$分别表示板间的距离和板的宽度（见图4.38a）。由于该题为双轴对称，只要图形的四分之一模型就够了。在混合（即压力—

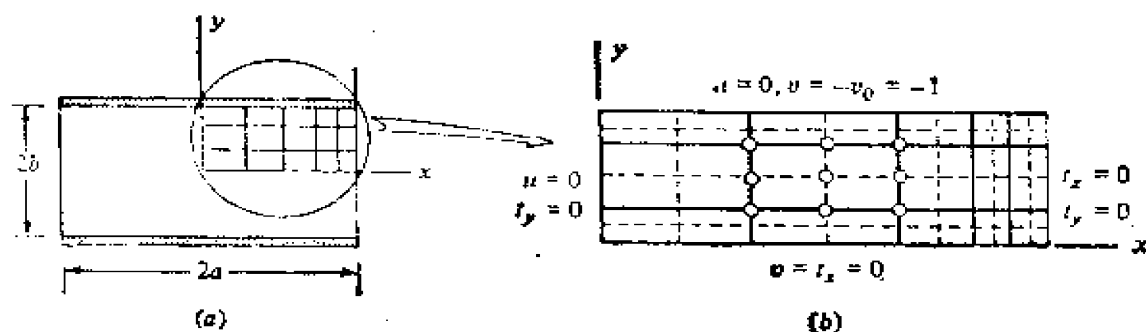


图4.38　板间不可压缩粘性液体问题的边界条件和有限元网格：

（a）流域的几何尺寸；（b）$\frac{1}{4}$的有限元网格

速度）模型中使用一个5×3的九结点二次单元的非均匀的网格，而在罚模型中（见图4.38b）使用10×6的四结点线性单元的网格。在自由表面（即在$x=a$处）附近，使用较小单元的非均匀网格能精确地接近剪应力的奇点。罚模型使用的网格正好与混合模型中使用的网格有相同的结点数量。

在$x=3$和$x=6$处，水平速度u作为y的函数曲线如图4.39所示。利用混合模型和罚有限元模型所得到的有限元解与Nadai的近似解是一致的。在$y=0.125$处（即接近对称水平轴）的压力和在y

$=1.875$处(即接近顶板)的法向应力σ作为x的函数绘制在图4.40中。无论是P或者是σ,都在10×6的网格的每个单元的中心处计算(在两种模型中)。在混合模型中，线性插值被用来计算10×6网格的每个单元中心的P值。有限元法得到的P与σ,与Nadai 的近似解是相当一致的。

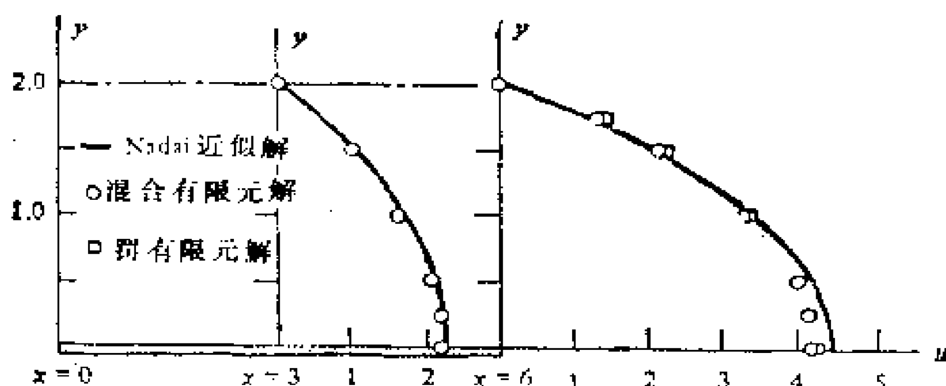


图4.39　板间挤压液体用混合模型和罚模型得到的有限元解u与Nadai的近似解的比较 ($a=6$, $b=2$, $\mu=1$)

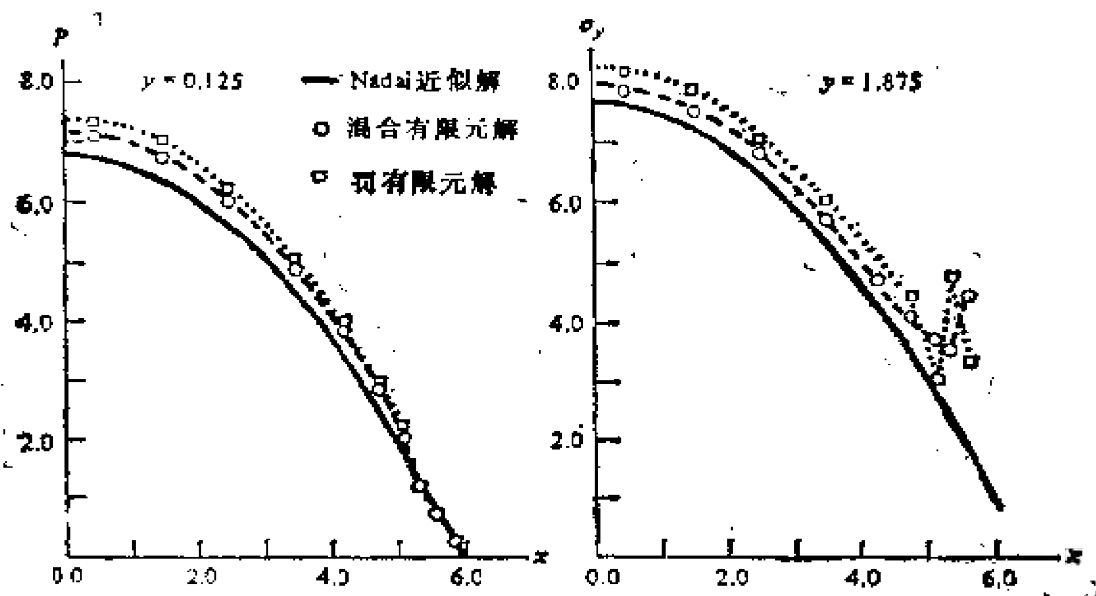


图4.40　两平行板间挤压液体问题的$P(x,\ 0.125)$和$\sigma_y(x,\ 1.875)$与中心线距离的曲线

对$u(x,0.25)$和$\sigma_y(x,0.125)$的有限元解与Nadai 的解析解的

比较列在表4.9中。位移的有限元解与Nadai的解析解的一致性比应力的更好。应该牢记解析解是不精确的解。

表4.9　两平行板间挤压液体问题的有限元解与解析解的比较

$u(x,0.25)$				$-\sigma_y(x,0.125)$			
x	混合	罚†	解析	x	混合	罚†	解析
0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	8.629	8.886	8.200
1.0	0.7378	0.7452	0.7383	1.5	8.261	8.500	7.825
2.0	1.4793	1.4910	1.4766	2.5	7.513	7.766	7.075
3.0	2.2211	2.2376	2.2148	3.	6.405	6.645	5.950
4.0	2.9744	3.0074	2.9531	4.25	5.406	5.612	4.860
4.5	3.3785	3.3984	3.3223	4.75	4.358	4.578	4.017
5.0	3.7616	3.7996	3.6914	5.12	3.309	3.693	3.323
5.25	3.9269	3.9630	3.8760	5.37	2.270	2.640	2.830
5.50	4.0418	4.1242	4.0605	5.62	1.197	1.546	2.314
5.75	4.1102	4.1986	4.2451	5.87	0.0688	0.0215	1.775
6.00	4.1356	4.2127	4.4297	—	—	—	—

† 罚参数$\gamma=10^9$。

*4-5-4　弹性板的弯曲

这里我们研究二维梁理论的推广，即板的弯曲。“板”字表示这样的物体，它是以两平行平面为界，它的横向尺寸比其平面间的间距大。从几何学上讲，板与在4-5-2节中讨论的平面弹性体相似。然而，板是横向（即垂直于板的平面）加载。在某些简化假设下，决定板中面的横向变形w和板中面的弯曲斜率S_x和S_y的方程式为（所谓板的剪切变形理论）

$$D_{44}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+D_{55}\frac{\partial}{\partial y}\left(S_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+q=0 \tag{4.220a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{11}\frac{\partial S_x}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial S_y}{\partial y}\right)+D_{33}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right)$$

$$-D_{44}\left(S_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \tag{4.220b}$$

$$D_{33}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{12}\frac{\partial S_x}{\partial x}+D_{22}\frac{\partial S_y}{\partial y}\right)$$

$$-D_{55}\left(S_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0 \qquad (4.220c)$$

这里，q是横向分布荷载，而D_{44}，D_{55}，D_{11}，D_{12}，D_{22}和D_{33}是正交各向异性板的刚度

$$D_{44}=G_{23}h \qquad D_{55}=G_{13}h \qquad D_{11}=\frac{E_1h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$$

$$D_{22}=\frac{E_2D_{11}}{E_1} \qquad (4.221)$$

$$D_{12}=\nu_{12}D_{22}=\nu_{21}D_{11} \qquad D_{33}=\frac{G_{12}h^3}{12}$$

式中，E_1 和 E_2分别是沿x和y方向的 Young氏模量，ν_{12} 和 ν_{21}（$=\nu_{12}E_2/E_1$）是Poisson比，G_{12}，G_{13}和G_{23}是在平面的主要坐标轴$x-y$,$x-z$和$y-z$平面中的剪切模量，而h是板的厚度。

在典型的单元Ω^e上，对方程式(4.220)的变分公式,用每个方程式乘以一加权函数ϕ_i($i=1$，2，3)并用分部积分可以获得以下结果：

$$\int_{\Omega^e}\phi_1\{\text{LHS of Eq.}(4.220a)\}dxdy=0$$

$$\int_{\Omega^e}\phi_2\{\text{LHS of Eq.}(4.220b)\}dxdy=0$$

$$\int_{\Omega^e}\phi_3\{\text{LHS of Eq.}(4.220c)\}dxdy=0$$

或

$$\int_{\Omega^e}\left\{D_{44}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\left(S_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+D_{55}\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\left(S_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}dxdy$$

$$=\int_{\Omega^e}\phi_1q\,dx\,dy+\oint_{\Gamma^e}\phi_1\left[D_{44}\left(S_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)n_x\right.$$

$$\left.+D_{55}\left(S_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)n_y\right]ds \qquad (4.222a)$$

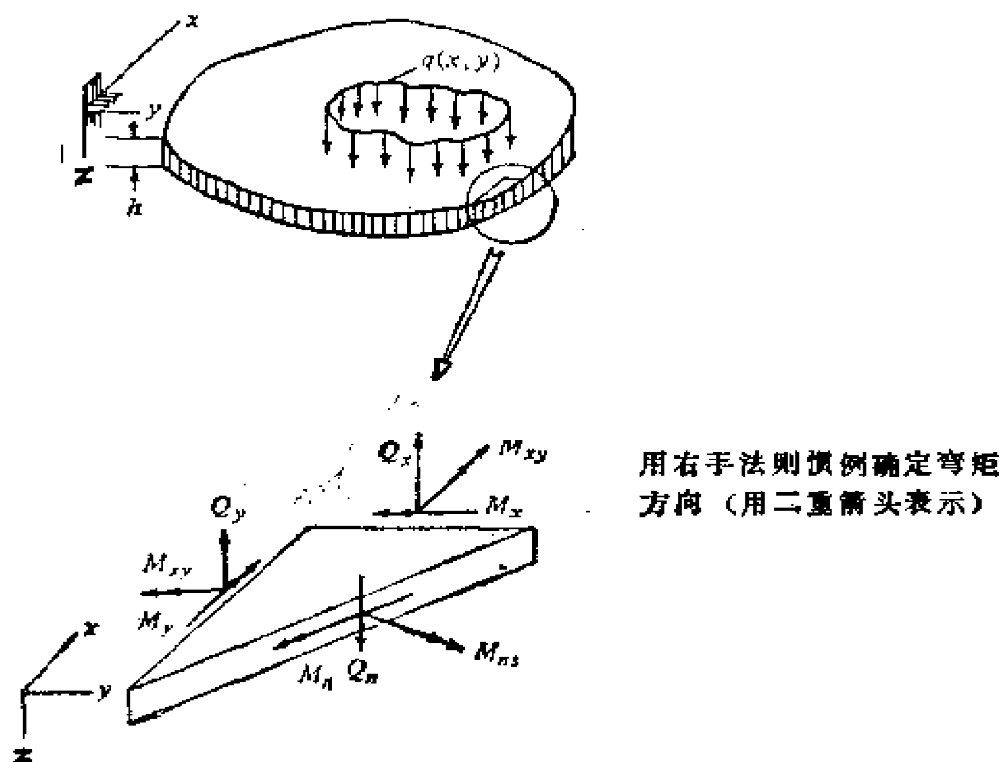
$$\int_{\Omega^e}\left\{D_{11}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial S_x}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial S_y}{\partial y}+D_{33}\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right)-D_{44}\phi_2\left(S_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}dxdy$$

$$
= \oint_{\Gamma^e} \phi_2 \left[\left(D_{11} \frac{\partial S_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) n_x + D_{33} \left(\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right) n_y \right] ds \tag{4.222b}
$$

$$
\int_{\Omega^e} \left\{ D_{33} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \left(\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \frac{\partial S_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \frac{\partial S_y}{\partial y} + D_{55} \phi_3 \left(S_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy
$$

$$
= \oint_{\Gamma^e} \phi_3 \left[\left(D_{12} \frac{\partial S_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) n_y + D_{33} \left(\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right) n_x \right] ds \tag{4.222c}
$$



板的边界条件

固定	简支—1	简支—2	自由
$w=0$	$w=0$	$w=0$	$Q_n=0$
$S_s=0$	$M_{ns}=0$	$S_s=0$	$M_{ns}=0$
$S_n=0$	$M_n=0$	$M_n=0$	$M_n=0$

图4.41　板单元的几何尺寸、弯矩和剪力合力以及各种边界条件

加权函数ϕ_1，ϕ_2和ϕ_3可分别视作为变分δw，δS_x和δS_y。从变分方程式(4.222) 很明显看出，在边界项的方括号里对表达式的规定构成自然边界条件，而对w,S_x和S_y的规定构成基本边界条件。自然边界条件的各项可用弯矩和剪力合力来表示(见图4.41)：

$$M_x = D_{11}\frac{\partial S_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial S_y}{\partial y} \qquad M_y = D_{12}\frac{\partial S_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial S_y}{\partial y}$$

$$M_{xy} = D_{33}\left(\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x}\right) \tag{4.223}$$

$$Q_x = D_{44}\left(S_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad Q_y = D_{55}\left(S_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

方程式(4.222)的有限元模型可用假设的下述形式的插值得出

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i\psi_i \qquad S_x = \sum_{i=1}^{n} S_x^i\psi_i \qquad S_y = \sum_{i=1}^{n} S_y^i\psi_i \tag{4.224}$$

显然，ψ_i可以是线性的，二次的等等。将方程式(4.224)和$\phi_\alpha = \psi_i$ ($\alpha = 1, 2, 3$) 代入方程式(4.222)，得到

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ & [K^{22}] & [K^{23}] \\ \text{对称的} & & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{S_x\} \\ \{S_y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \end{Bmatrix} \tag{4.225}$$

式中

$$K_{ij}^{11} = \int_{\Omega^e}\left(D_{44}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x} + D_{55}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy$$

$$K_{ij}^{12} = \int_{\Omega^e} D_{44}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\psi_j dxdy$$

$$K_{ij}^{13} = \int_{\Omega^e} D_{55}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\psi_j dxdy$$

$$K_{ij}^{22} = \int_{\Omega^e}\left(D_{11}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x} + D_{33}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y} + D_{44}\psi_i\psi_j\right)dxdy$$

$$K_{ij}^{23} = \int_{\Omega^e}\left(D_{12}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y} + D_{33}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\right)dxdy$$

$$K_{ij}^{33} = \int_{\Omega^e}\left(D_{33}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y} + D_{55}\psi_i\psi_j\right)dxdy \tag{4.226}$$

$$F_i^1 = \int_{\Omega^e} q\psi_i dxdy + \oint_{\Gamma^e} Q_n\psi_i ds \qquad Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y$$

$$F_i^2 = \oint_{\Gamma^e} M_n\psi_i ds \qquad M_n = M_x n_x + M_{xy} n_y$$

$$F_i^3 = \oint_{\Gamma^e} M_{ns}\psi_i ds \qquad M_{ns} = M_{xy} n_x + M_y n_y$$

单元刚度矩阵(4.225)是$3n\times 3n$阶，这里，n 是每单元的结点数。当采用四结点矩形单元时，则单元刚度矩阵是12×12阶，且矩阵系数能利用方程式(4.226)和表4.7进行计算。

应该注意的是：当板的边厚比很大时（即薄板），在方程式中包含横向剪应变（即包括D_{44}和D_{55}项）带来计算上的困难。对于薄板，横向剪应变是可忽略不计的，因此单元刚度矩阵成为刚性的（即所谓出现联锁），并得出广义位移（w_i，S_x^i，S_y^i）的不正确结果。这种现象能解释为：由包含下述倾角—挠度关系式

$$S_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad S_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{4.227}$$

所引起，作为约束条件引入变分公式所致〔实际上，板目前的理论是一个出现在方程式(5.30)中梁罚公式的二维模型〕。为了避免计算上的困难（即避免联锁），应利用降阶积分方法计算与D_{44}和D_{55}有关的刚度系数。例如，当使用一个四结点矩形单元时，应采用1×1的Gauss准则，以计算剪切能量项（即包括D_{44}和D_{55}的项），而对所有其他项采用2×2的Gauss准则。当使用八结点或九结点矩形单元时，分别使用2×2和3×3的Gauss准则来计算剪切项和弯矩项。

例题4.12 研究承受均布横向荷载的一个简支的各向同性的

正方形板。由于双轴对称，我们仅需要板的四分之一的模型。在简支边上（$x=a/2$和$y=a/2$）的基本边界条件为

$$w=0 \qquad S_y=0 \quad \text{当} x=a/2 \text{时}$$
$$w=0 \qquad S_x=0 \quad \text{当} y=a/2 \text{时} \tag{4.228a}$$

沿对称线（$x=0$和$y=0$）的基本边界条件为

$$S_x(0,\ y)=S_y(x,\ 0)=0 \tag{4.228b}$$

在此情况下，自然边界条件（通过$\{F^i\}$列入有限元方程式）为

$$Q_n=0 \quad \text{沿} x=0 \text{和} y=0$$
$$M_x=0 \quad \text{沿} y=0 \text{和} x=a/2 \tag{4.228c}$$
$$M_y=0 \quad \text{沿} x=0 \text{和} y=a/2$$

对线性（四结点）单元，均布荷载q_0的影响为

表4.10 降阶积分、厚度和网格加密对均布荷载作用下简支、各向同性（$\nu=0.25$）的正方形板的中点挠度和应力的影响

		1×1 线性的		2×2 线性的		4×4 线性的		2×2 二次的	
$\frac{a}{h}$	积分	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$
10	F	0.964	0.0182	2.474	0.1185	3.883	0.216	4.770	0.2899
	M	3.950	0.0953	4.712	0.2350	4.773	0.2661	4.799	0.2715
20	F	0.270	0.0053	0.957	0.0476	2.363	0.1375	4.570	0.2683
	M	3.669	0.0954	4.524	0.2350	4.603	0.2660	4.633	0.2715
40	F	0.0695	0.0014	0.279	0.0140	0.9443	0.0558	4.505	0.2699
	M	3.599	0.0953	4.375	0.2349	4.560	0.2661	4.592	0.2714
50	F	0.0045	0.0001	0.182	0.0092	0.6315	0.0386	4.496	0.2667
	M	3.590	0.0953	4.472	0.2350	4.555	0.2660	4.587	0.2714
100	F	0.011	0.0002	0.047	0.0024	0.182	0.0108	4.482	0.2664
	M	3.579	0.0953	4.465	0.235	4.548	0.2661	4.580	0.271[illegible]

$\bar{w}=\dfrac{wEh^3\times 10^2}{q_0a^4}$　　$\bar{\sigma}_x=\sigma_x(A,A,\pm h/2)\dfrac{h^2}{q_0a^2}$，

$A=\dfrac{a}{4}$（1×1 线性的），$\dfrac{a}{8}$（2×2 线性的），$\dfrac{a}{16}$（4×4 线性的），

$0.05283a$（2×2 二次的），

古典板理论解〔Timoshenko和Woinowsky-Krieger(1969)〕：$\bar{w}=4.580$。

$$\int_0^{h_x}\int_0^{h_y} q_0\psi_i dxdy = \frac{h_x h_y}{4} q_0 \qquad (4.229)$$

式中，h_x和h_y是单元平面形状尺寸。除上述影响外，所有其他给定的力是零[由于方程式(4.228c)]。

研究降阶积分、厚度和网格对中点挠度和应力的影响，其结果列在表4.10中。注意，通常混合(*M*)积分比全(*F*)积分给出更精确的结果。随着网格的加密或使用高次单元时，降阶积分的影响在精确度上会削弱(也就是说，无论全积分还是降阶积分都给出满意的结果)。

*4-6 与时间有关的问题

4-6-1 概述

这一节研究有限元与时间有关的二维问题的分析法。如同3-5节一样，我们再次应用2-3-4节的结果。因为瞬时近似法在2-3-4节中已详细讨论了，这里讨论的重点是半离散的有限元模型以及热传递、流体力学及固体力学的具体例题．这里所提出的例证是非常简单的，我们用它们说明与时间有关问题的过程，解复杂的几何图形的二维问题则要求应用等参元及数值积分。4-8节专门讨论运用计算机解二维问题。在那里将提供大量的子程序以帮助读者开发他们自己的程序，当然，也可以运用列于附录*II*中的完整的程序。

4-6-2 半离散近似法

热传递(及类似)问题：考虑总边界Γ的二维区域 Ω 中瞬时热传递(及类似)问题的偏微分方程：

$$c_1\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f = 0 \quad 在\Omega中$$

$$0 < t < t_0 \qquad (4.230)$$

其边界条件为：

$$k_1\frac{\partial u}{\partial x}n_x + k_2\frac{\partial u}{\partial y}n_y + \beta(u - u_\infty) + \hat{q} = 0 \quad 在\Gamma_1上 \quad t \geq 0$$

$$u = \hat{u} \text{ 在} \Gamma_2 \text{上} \quad t \geqslant 0 \tag{4.231a}$$

初始条件为：

$$u = u_0 \text{ 在} \Omega \text{中} \quad t = 0 \tag{4.231b}$$

这里，t表示时间，c_1、k_1、k_2、β、u_0、$\hat{u}$、u_∞、f 和 $\hat{q}$ 是已知状态或时间的函数。

单元$\Omega^{(e)}$上方程式(4.230)和(4.231)的半离散变分公式为：

$$0 = \int_{\Omega^{(e)}} \left(c_1 v \frac{\partial u}{\partial t} + k_1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + vf \right) dxdy + \oint_{\Gamma^{(e)}} [\beta v(u - u_\infty) + vq] ds \tag{4.232}$$

将式

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{r} u_j(t) \psi_j(x, y) \tag{4.233}$$

的有限元插值函数和$v = \psi_i$代入式(4.232)，有：

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{j=1}^{r} \Bigg\{ & \left(\int_{\Omega^{(e)}} c_1 \psi_i \psi_j dxdy \right) \frac{du_j}{dt} \\ & + \left[\int_{\Omega^{(e)}} \left(k_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dxdy \right. \\ & \left. + \oint_{\Gamma^{(e)}} \beta \psi_i \psi_j ds \right] u_j \Bigg\} - \oint_{\Gamma^{(e)}} (\beta u_\infty - q) \psi_i ds \\ & + \int_{\Omega^{(e)}} \psi_i f dxdy \end{aligned}$$

或写成矩阵形式：

$$[M^{(e)}]\{\dot{u}\} + [K^{(e)}]\{u\} = \{F^{(e)}\} \tag{4.234}$$

式中

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} c_1 \psi_i \psi_j dxdy \\ K_{ij}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \left(k_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dxdy \\ & \quad + \oint_{\Gamma^{(e)}} \beta \psi_i \psi_j ds \end{aligned} \tag{4.235}$$

$$F_i^{(e)} = -\int_{\Omega^{(e)}} \psi_i f dx dy + \beta u_\infty \oint_{\Gamma^{(e)}} \psi_i ds - \oint_{\Gamma^{(e)}} q\psi ds$$

不可压缩的粘性流体：与式(4.188)相联系的与时间有关的方程式可用下式表示：

$$\left.\begin{aligned} c_1\frac{\partial u}{\partial t} - 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial P}{\partial x} - f_x = 0 \\ c_1\frac{\partial v}{\partial t} - \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial y} - f_y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \text{在}\Omega\text{中}$$

$$t > 0 \qquad (4.236a)$$

初始条件为：

$$u = u_0 \quad v = v_0 \text{在}\Omega\text{中} \quad t = 0 \qquad (4.236b)$$

对于$t \geqslant 0$的边界条件，可由(4.190)方程式表示。这里给出与方程式的混合函数和罚函数有关的有限元模型。

混合模型 方程式(4.326)中的时间导数项与方程式(4.234)中的时间导数项相类似，与方程式(4.236)其余项有关的单元矩阵和方程式(4.195)的完全一样。于是对于单元$\Omega^{(e)}$有：

$$\begin{bmatrix} [M^{11}] & [0] & [0] \\ [0] & [M^{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{v}\} \\ \{\dot{P}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] & [K^{23}] \\ [K^{13}]^T & [K^{23}]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \qquad (4.237)$$

式中$[K^{\alpha\beta}]$和$\{F^\alpha\}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$可由方程式(4.196)给定，$M_{ij}^{11} = M_{ij}^{22}$可用方程式(4.235)中的$M_{ij}$给定，方程式(4.237)可写成通用形式：

$$[M]\{\dot{\Delta}\}+[K]\{\Delta\}=\{F\} \qquad \{\Delta\}=\begin{Bmatrix}\{u\}\\\{v\}\\\{P\}\end{Bmatrix} \tag{4.238}$$

罚函数模型 与方程式(4.236)有关的与时间相关模型可由下式表示：

$$[M]\{\dot{\Delta}\}+[K]\{\Delta\}=\{F\} \tag{4.239}$$

式中，$[K]$和$\{F\}$的定义见方程式(4.201)和(4.196)，$[M]$可用下式表示：

$$[M]=\begin{bmatrix}[M^{11}] & [0]\\ [0] & [M^{22}]\end{bmatrix}$$

$M_{ij}^{11}=M_{ij}^{22}$为在上述混合模型已定义的系数矩阵。

平面弹性 考虑平面弹性体运动方程[即方程式(4.140)的动力模拟]

$$\left.\begin{aligned}c_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-A(u,v)-f_x=0\\ c_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-B(u,v)-f_y=0\end{aligned}\right\}\text{在}\Omega\text{中} \tag{4.240a}$$

初始条件为：

$$\left.\begin{aligned}&u=u_0 \qquad v=v_0\\ &\frac{\partial u}{\partial t}=\dot{u}_0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=\dot{v}_0\end{aligned}\right. \qquad t=0 \tag{4.240b}$$

式中，$A(\cdot,\cdot)$和$B(\cdot,\cdot)$是方程式(4.140)左边线性(微分)算子，c_1是与物体密度$\rho(c_1=\rho h)$有关的常数。对于典型单元$\Omega^{(e)}$，该半离散有限元模型可将方程式(4.146)代入方程式(4.240a)的半离散的变分公式中而得：

$$\begin{bmatrix}[M^{11}] & [0]\\ [0] & [M^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{u}\}\\\{\ddot{v}\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}]\\ [K^{12}]^T & [K^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u\}\\\{v\}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\\{F^2\}\end{Bmatrix} \tag{4.241}$$

式中，$M_{ij}^{11}=M_{ij}^{22}$是由式(4.235)定义的质量矩阵（用ρh代替

c_1), $K_{ij}^{\alpha\beta}$和F_i^{α}($i,j=1,2,\cdots,n$; $\alpha,\beta=1,2$)由式(4.156)表示。

板的弯曲 弹性板弯曲的运动方程式可用下式表示:

$$\left.\begin{aligned}L_1(w,S_x,S_y)+q=c_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\L_2(w,S_x,S_y)=c_2\frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2}\\L_3(w,S_x,S_y)=c_2\frac{\partial^2 S_y}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\text{在}\Omega\text{中}\quad t\geqslant 0 \tag{4.242}$$

式中,$L_1(\cdot)$,$L_2(\cdot)$和$L_3(\cdot)$是由式(4.220)左边定义的线性微分算子,c_1及c_2是与板的特性有关的常数。将方程式(4.224)代入半离散的变分公式,可得:

$$\begin{bmatrix}[M^1] & [0] & [0]\\ [0] & [M^2] & [0]\\ [0] & [0] & [M^3]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{w}\}\\ \{\ddot{S}_x\}\\ \{\ddot{S}_y\}\end{Bmatrix}+[K]\{\Delta\}=\{F\} \tag{4.243}$$

式中,$\{\Delta\}=\{\{w\},\ \{S_x\},\ \{S_y\}\}^T$,$c_1=\rho h, c_2=\rho h^3/12,\rho$为密度

$$M_{ij}^1=\int_{\Omega^{(e)}}c_1\psi_i\psi_j dxdy \tag{4.244}$$

$$M_{ij}^2=M_{ij}^3=\int_{\Omega^{(e)}}c_2\psi_i\psi_j dxdy$$

$[K]$和$[F]$为系数矩阵,它们的元素由方程式(4.226)定义。

4-6-3 瞬时近似法

应该注意,对于各种不同的物理问题,4-6-2节中研究的半离散的有限元模型,可依据在模型中出现的时间导数的次数分为两组:

$$[M]\{\dot{\Delta}\}+[K]\{\Delta\}=\{F\} \tag{4.245}$$

$$[M]\{\ddot{\Delta}\}+[K]\{\Delta\}=\{F\} \tag{4.246}$$

方程式(4.234),(4.238)及(4.239)是方程式(4.245)的特例,而方程式(4.241)及(4.243)是方程式(4.246)的特例。应用2-3-4节的结果,可推导出方程式(4.245)及(4.246)的完全离散模型。

与方程式(4.245)及(4.246)有关的完全离散的单元方程式可用下式表示：

$$[\hat{K}]\{\Delta\}_{n+1}=\{\hat{F}\} \tag{4.247}$$

式中，对于方程式(4.245)和(4.246)的$[\hat{K}]$和$\{\hat{F}\}$可分别用下列各式表示

$$\begin{aligned}&[\hat{K}]=[M]+a_4[K]\\&\{\hat{F}\}=([M]-a_3[K])\{\Delta\}_n+a_4\{F\}_n+a_3\{F\}_{n+1}\end{aligned} \tag{4.248}$$

和

$$\begin{aligned}&[\hat{K}]=[K]+a_0[M]\\&\{\hat{F}\}=\{F\}_{n+1}+[M](a_0\{\Delta\}_n+a_1\{\dot{\Delta}\}_n+a_2\{\ddot{\Delta}\}_n)\end{aligned} \tag{4.249}$$

式中，a_0，a_1等可用下式表示

$$a_0=\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\qquad a_1=a_0\Delta t\qquad a_2=\frac{1}{2\beta}-1$$

$$a_3=(1-\alpha)\Delta t\qquad a_4=\alpha\Delta t \tag{4.250}$$

采用$t=t_n$时已知的$\{\Delta\}$，在时间$t=t_{n+1}\equiv(n+1)\Delta t$时，可对$\{\Delta\}$求解方程式(4.247)。当时间$t=0$时，问题的初始条件用于起始时间行程图，对二次时间问题，在$t=0$的$\{\ddot{\Delta}\}$可由方程式(4.246)计算。

例4.13 要求解出与时间有关的热传导方程式：

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\nabla^2T=1\text{在}\Omega=\{(x,y):0<(x,y)<1\}\text{中} \tag{4.251a}$$

$t>0$时，边界条件为：

$$\begin{aligned}&T=0\text{在}\Gamma_1=\{\text{直线}x=1\text{和}y=1\}\text{上}\\&\frac{\partial T}{\partial n}=0\text{在}\Gamma_2=\{\text{直线}x=0\text{和}y=0\}\text{上}\end{aligned} \tag{4.251b}$$

对在Ω中的(x,y)，其初始条件为：

$$T=0\qquad t=0 \tag{4.251c}$$

我们选择4×4的线性三角单元网格(参看图4.42)来模拟此

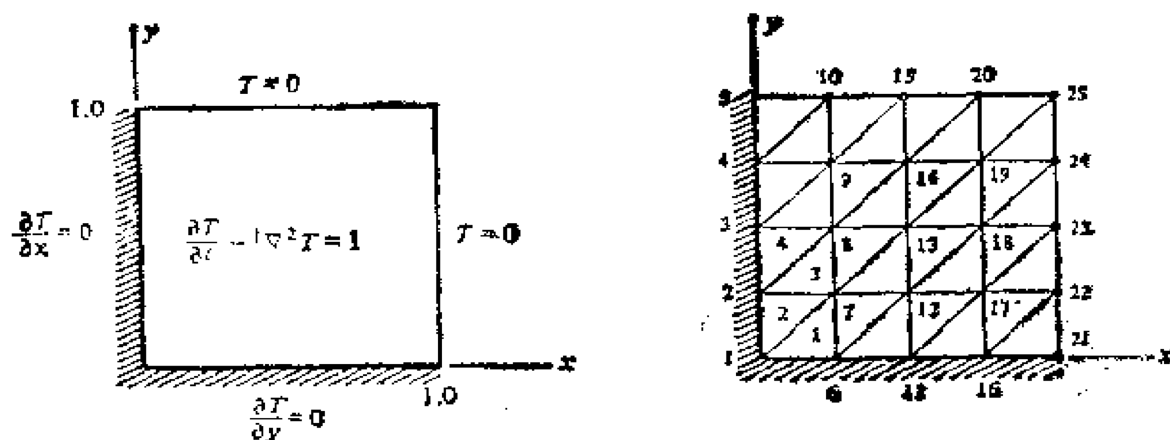


图4.42 例4.13的瞬时热传导问题的域、边界条件以及有限元网格

域，并将 Crank-Nicolson 方法用于瞬时近似问题，因为 Crank-Nicolson 法是绝对地稳定，可选择任意Δt值。然而，当Δt很大时，解可能不精确。为获得一合适的精确度，可按下式求Δt：

$$\Delta t \leqslant \frac{2}{\lambda_{\min}} \tag{4.252}$$

式中，$\lambda_{\min}$为运算子——∇^2的最小特征值（参看习题4.63），在目前的情况下，选择$\Delta t = 0.05$。

单元方程式为式(4.234)，式中，$c_1 = 1$，$k_1 = k_2 = 1$，$\beta = 0$和$f = 1$，而问题的边界条件用下式给定：

$$U_5 = U_{10} = U_{15} = U_{20} = U_{21} = U_{22} = U_{23} = U_{24} = U_{25} = 0$$

从初始条件$U_i = 0(i = 1,2,3,\cdots,25)$开始，可求解与方程式(4.247)和(4.248)有关的集合方程组，对不同时间值的温度$T(x,y,0)$与x的关系，如图4.43a所示。在时间$t = 1,0$时达到稳定状态，温度$T(0,0,t)$与时间的关系如图4.43b所示，它表明温度从零到稳定状态的变化过程。表4.11给出$t = 1,0$时瞬时解与稳定状态的有限元解，有限差分解以及精确解的比较。

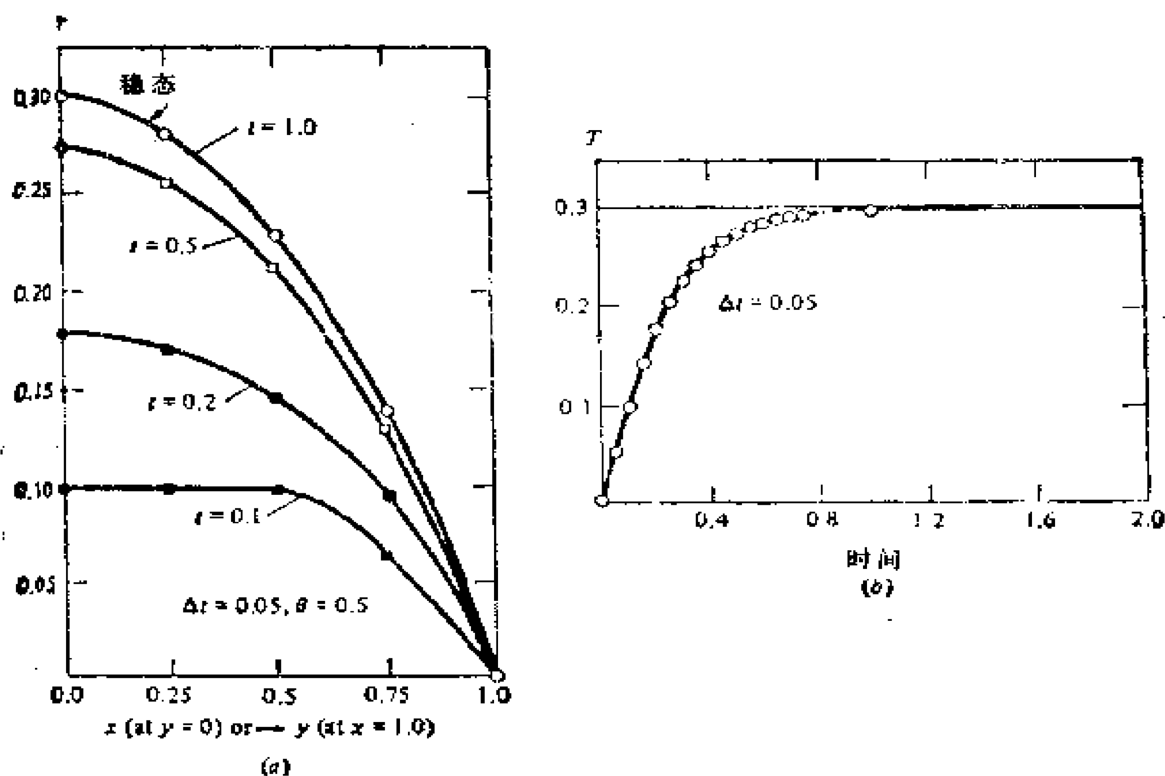


图4.43 例4.13瞬时热传导问题中的温度随位置x及时间t的变化

表4.11 热传导问题的有限差分解和有限元解与精确解的比较

节点	精确解	有限差分解	误差	有限元解（稳定解）	误差	有限元解（不稳定解）在t = 1.0点
1	0.2947	0.2911	0.0036	0.3013	−0.0066	0.2993
2	0.2789	0.2755	0.0034	0.2805	−0.0016	0.2786
3	0.2293	0.2266	0.0027	0.2292	0.0001	0.2278
4	0.1397	0.1381	0.0016	0.1392	0.0005	0.1385
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.2642	0.2609	0.0033	0.2645	−0.0003	0.2628
8	0.2178	0.2151	0.0027	0.2172	0.0006	0.2159
9	0.1333	0.1317	0.0016	0.1327	0.0006	0.1320
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.1811	0.1787	0.0024	0.1801	0.0010	0.1791
14	0.1127	0.1110	0.0017	0.1117	0.0010	0.1111
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0728	0.0711	0.0017	0.0715	0.0013	0.0712
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

例4.14 当为零初始条件(即$u_i=v=0$)和方程式(4.208)的边界条件时，考虑例4.10的Couette流问题。采用双线性单元及例4.10中的相同网格研究流体的瞬时运动，应用由罚有限元模型得到的结果，图4.44表示在$t=1.0$，5.0，10.0和35.0时水平速度u随y值的变化关系。在35个时间单位内(粘性的单位值)，流体逐渐地变为完全发展的状态。

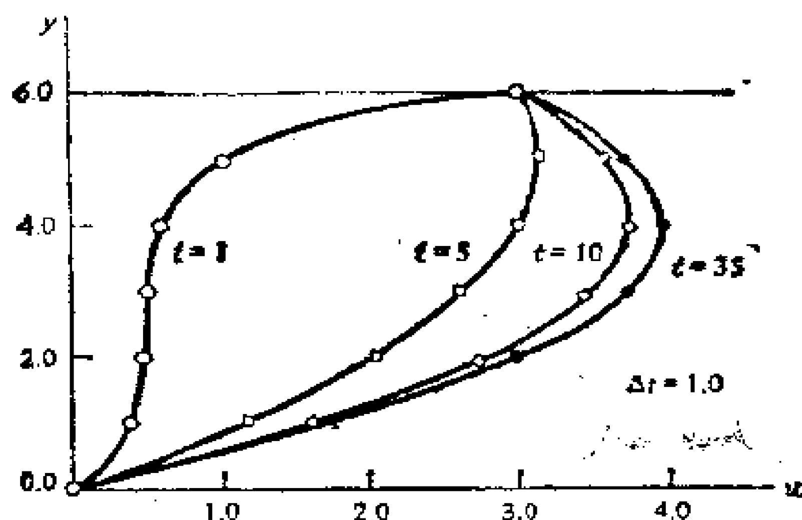


图4.44 例4.14Couette流问题水平速度的瞬时解

例4.15 考虑一块各向同性的($\nu=0.3$，$\rho=1.0$)简支的长方形板($a/b=\sqrt{2}$，$h/b=0.2$)，在板中心的一个方块面积上突加上一个均匀的分布荷载($c/b=0.4$)。由于板是双向对称的，仅取板

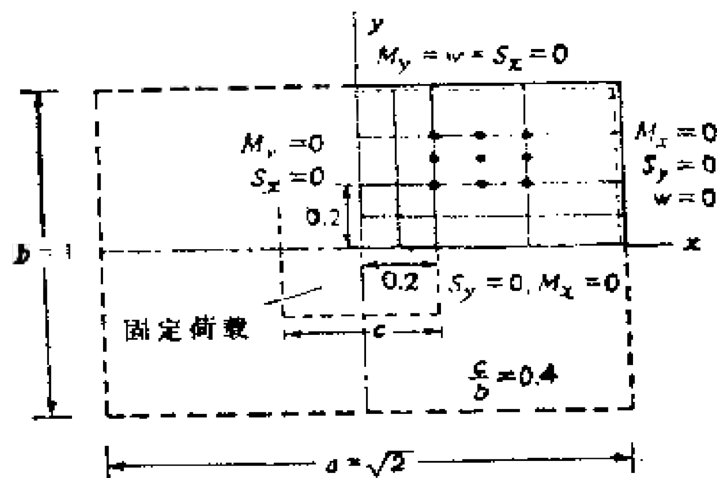
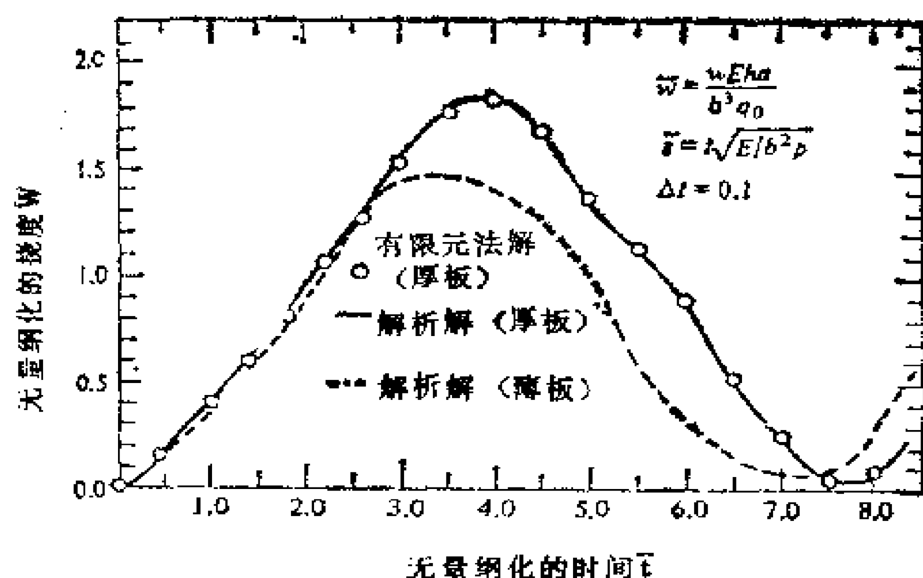


图4.45 在板中心的方形域上突加一脉冲荷载时，长方形板弯曲的域、边界条件和有限元网格

的四分之一进行分析，图4.45表示其几何图形、边界条件和4×4个九节点单元的有限元(不均匀的)网格。

对厚板弯曲的有条件地稳定时间积分图采用下列的计算时，时间间隔选取为：



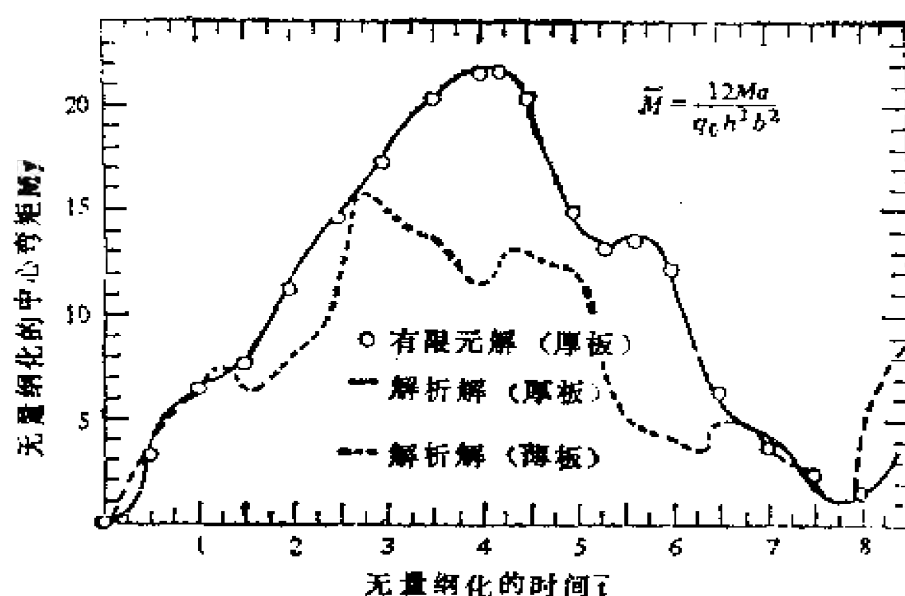


图4.46 在中心方形域上突加脉冲荷载时，简支长方形各向同性板的有限元解与解析解的比较

$$(\Delta t)^2 \leqslant \frac{d^2[\rho(1-\nu^2)/E]}{2+(1-\nu)(\pi^2/12)[1+1.5(d/h)^2]} \qquad (4.253)$$

式中，d为单元节点之间的最短距离，对于目前的问题采用方程式(4.253)时，可得$\Delta t=0.03$(对$d=0.05$)，因为对有条件稳定的时间积分图表应用方程(4.253)估算是有效的，且对$\alpha=0.5$及$\beta=0.25$时图表是绝对稳定的，可用比较大的时间间隔，例如取$\Delta t=0.1$。

由Reismann和Lee（1969）（参看本书末附录参考文献）得到该问题的解析解。在板中心的无量纲的横向挠度和弯矩的有限元解与解析解的比较如图4.46所示。有限元的结果与解析解完全吻合。

习　　题

4.45　考虑一对方程式

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{grad}\,u-\frac{1}{k}\mathbf{q}=0 \\ \mathrm{div}\mathbf{q}+f=0 \end{aligned}\right\}\text{在}\Omega\text{中}$$

式中，u和$\mathbf{q}$为因变量，k和f是已知二维域Ω内的位置$(x,\ y)$的函数，试推导如下形式的有限元方程式：

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ & [K^{22}] & [K^{23}] \\ \text{对称} & & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{q^1\} \\ \{q^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \end{Bmatrix}$$

4.46　考虑弹性各向同性薄板的下列方程式：

$$-S(M_1-\nu M_2)-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

$$-S(M_2-\nu M_1)-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

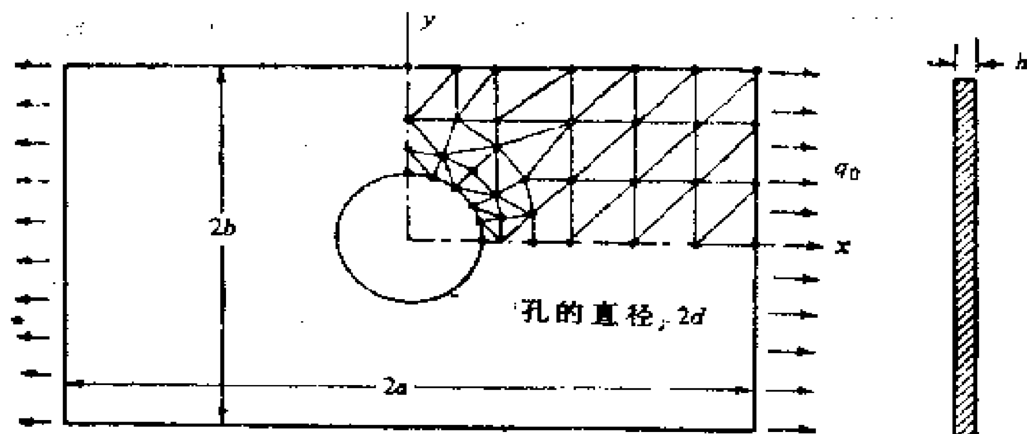
$$\frac{2}{(1+\nu)S}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}-q=0$$

式中，M_1及M_2是弯矩，w为横向挠度，q为分布荷载，ν为泊松比，S为常数，求：

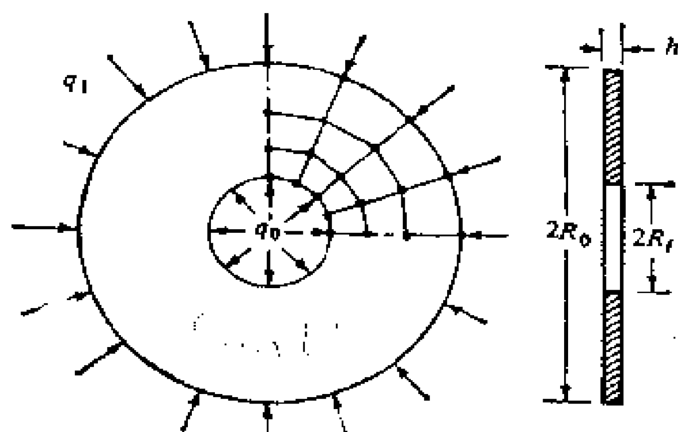
(a) 方程式的变分公式；

(b) 下列形式的有限元公式（M_1，M_2及w是独立的未知数）

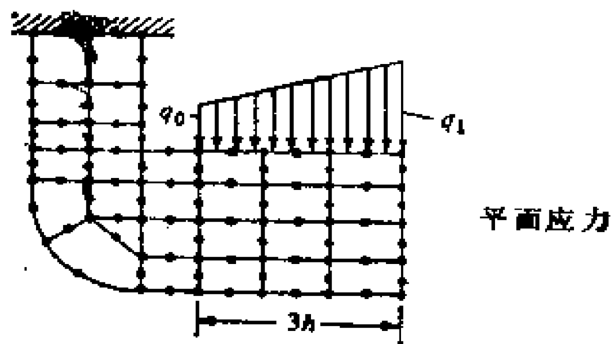
$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ & [K^{22}] & [K^{23}] \\ \text{对称} & & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{M_1\} \\ \{M_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \end{Bmatrix}$$



(a)



(b)



(c)

习题4.49的图

4.47 应用插值函数

$$w=\sum_{i=1}^{4}w_i\psi_i \qquad M_1=\sum_{i=1}^{2}m_i^1\phi_i^1 \qquad M_2=\sum_{i=1}^{2}m_i^2\phi_i^2$$

式中

$$\psi_1=(1-x)(1-y) \qquad \psi_2=x(1-y) \qquad \psi_3=xy \qquad \psi_4=(1-x)y$$

$$\phi_1^1=1-x \qquad \phi_2^1=x \qquad \phi_1^2=1-y \qquad \phi_2^2=y$$

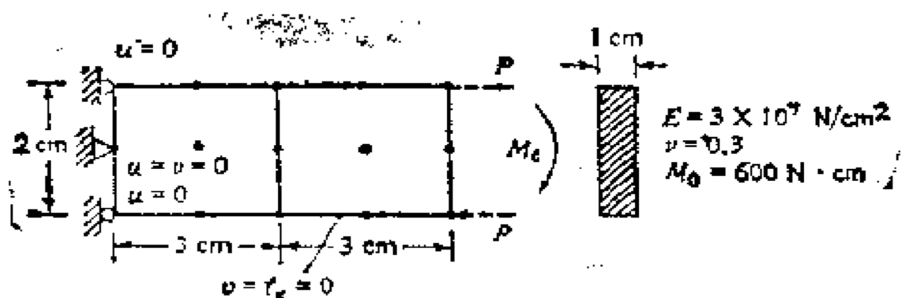
对边长为a和b的长方形单元，求习题4.46的矩阵$[K^{\alpha\beta}]$，α，$\beta=1,2,3$。

4.48 当$\phi_i^1=\phi_i^2=\psi_i(i=1, 2, 3, 4)$的情况下，重复习题4.47。

4.49 计算表面力对习题图4.49平面弹性问题总的自由度的影响。

4.50 求习题4.49图中平面弹性问题的连通矩阵和规定的初始自由度，只求连通矩阵的前三行元素。

4.51 研究习题图4.51所示的长6cm，高2cm，厚1cm的悬臂梁，材料特性是$E=3\times10^7$顿/厘米^2，$\nu=0.3$，在悬臂的自由端承受600N·cm的弯矩。在自由端用一对等效的平面力代替该力矩，并用4×2线性长方形单元网格模拟该域，求规定的位移和总的力。



习题4.51的图

4.52 研究习题图4.52所示的（"变换"）单元，用

$$\{u\}=\{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T$$

定义单元的广义位移矢量，用

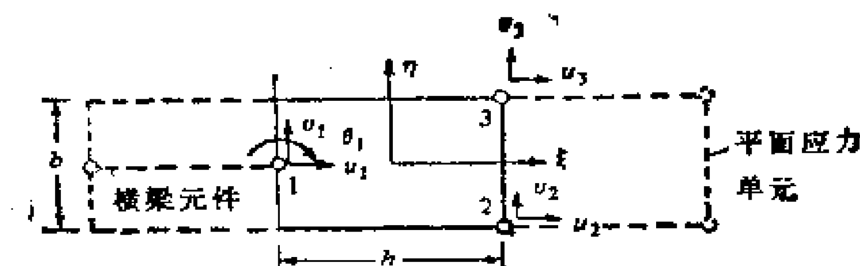
$$u=\psi_1u_1+\psi_2u_2+\psi_3u_3+\frac{h}{2}\eta\psi_1\theta_1$$

$$v=\psi_1v_1+\psi_2v_2+\psi_3v_3$$

表示位移分量u和v，式中ψ_1为梁的插值函数，ψ_2及ψ_3是节点2和3的插值函数：

$$\psi_1=\frac{1}{2}(1-\xi) \qquad \psi_2=\frac{1}{3}(1+\xi)(1-\eta) \qquad \psi_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

应用方程(4.150)求单元的刚度矩阵。

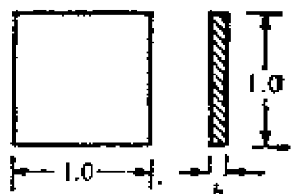


习题4.53的图

4.53 研究习题4.53所示的正方形、各向同性、厚度为h的弹性体，设其位移的近似式为：

$$u(x, y)=(1-x)yu_1+x(1-y)u_2$$

$$v(x, y)=0$$



习题4.53的图

假设物体为平面应力状态，求此单位正方形的2×2刚度矩阵。

$$[K]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\end{Bmatrix}$$

4.54（加热垂直板之间的自然对流） 研究两个固定长度垂直板之间出现温度梯度时，具有粘性不可压缩液体的流动。设板之间出现零压力梯度时，可写出$u=u(y)$，$v=0$，$T=T(y)$和

$$0=\rho\beta g(T-T_m)+\mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$0=k\frac{d^2T}{dy^2}+\mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

式中，$T_m=\frac{1}{2}(T_0+T_1)$是指两个板的平均温度，g为重力加速度，ρ为密度，β为热膨胀系数，k为液体的热传导系数，μ为粘性系数，求方程式的有限元公式，讨论计算图形的解法。

4.55 习题4.54的方程式，是较通用的Navier-Stokes二维流体方程式（它们是非线性的和耦合的）的一种特殊情况：

(a) 流体的连续性：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

(b) 动量守恒：

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+\rho g\beta(T-T_m)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

(*c*) 能量方程：

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

式中，c为比热（x坐标是垂直向下的）。求方程式的有限元模型，并对计算方法进行讨论。

4.56 设习题4.55方程式(*b*)中的非线性项和温度项为零（即动量方程与能量方程不相关联），重复习题4.55。

4.57 在柱面坐标（r，ϕ，z）中研究方程式(4.188)和（4.189），对具有轴对称的粘性不可压缩流体，则有：

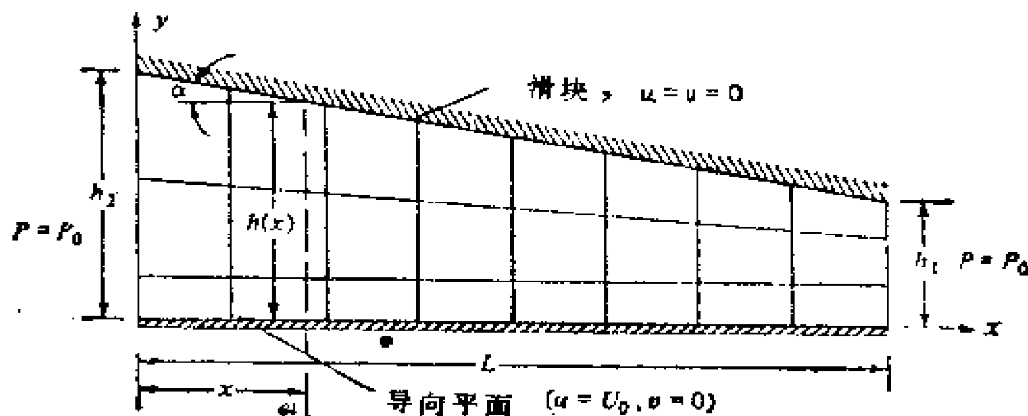
$$0=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$0=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

据(*a*)压力速度公式和(*b*)罚函数公式给出有限元方程式。

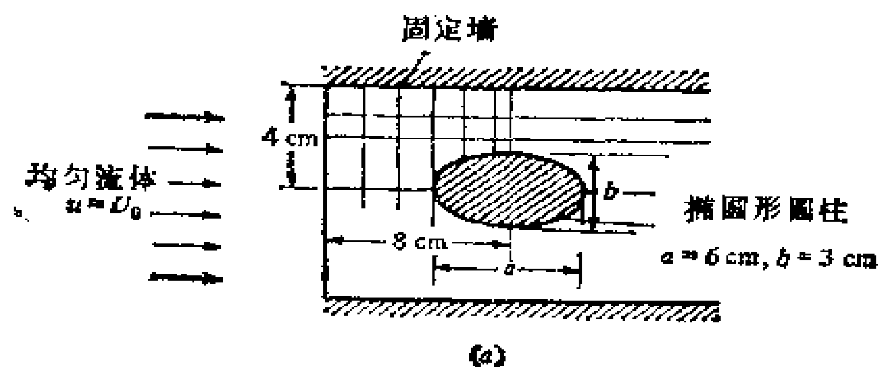
4.58（润滑油的流体动力学理论） 可应用粘性不可压缩流体方程式，分析油润滑轴承的流体现象。研究导向平面上滑块运动作为例子，可以了解运动的基本特性（参看习题图4.58），为了沿导向表面有一个不为零的压力梯度，该滑块对导向表面应该有一个较小的倾斜角α。对二维运动的稳态，假定滑面是很大的($l/h_1\gg1$)，且滑块静止，而导向平面以恒速v_0强迫移动。



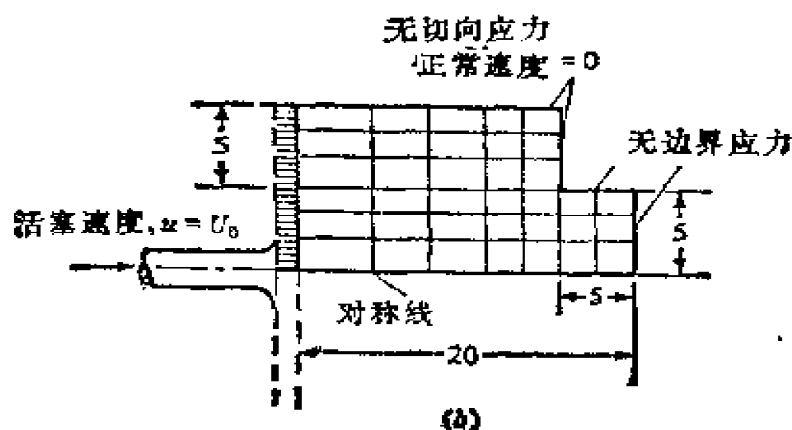
习题4.58的图

在这些条件下，充满滑块与导向平面之间的间隙的液体中将产生很大的压力差，因此，滑块表面被油膜隔开，以免金属表面间相接触。对习题4.58所示意的图，给出由液体充满该域的边界条件。假定开口处的大气压力为P_0，求粗的有限元网格，问题的罚有限元模型所规定的初始自由度和次自由度。

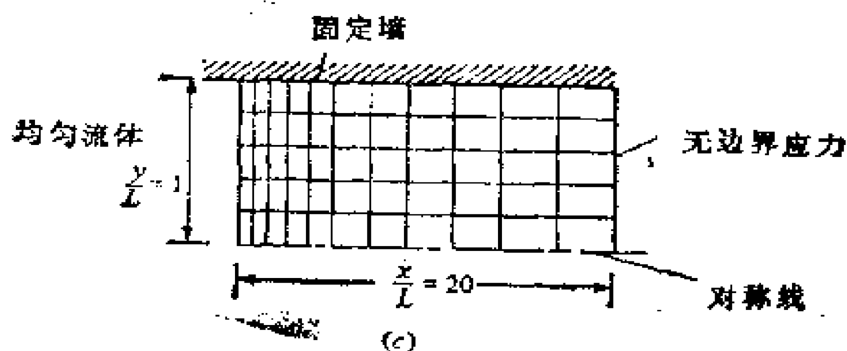
4.59 对习题图4.59中给出的粘性流体问题，求规定的初始自由度和次自由度及它们的值。



(a)



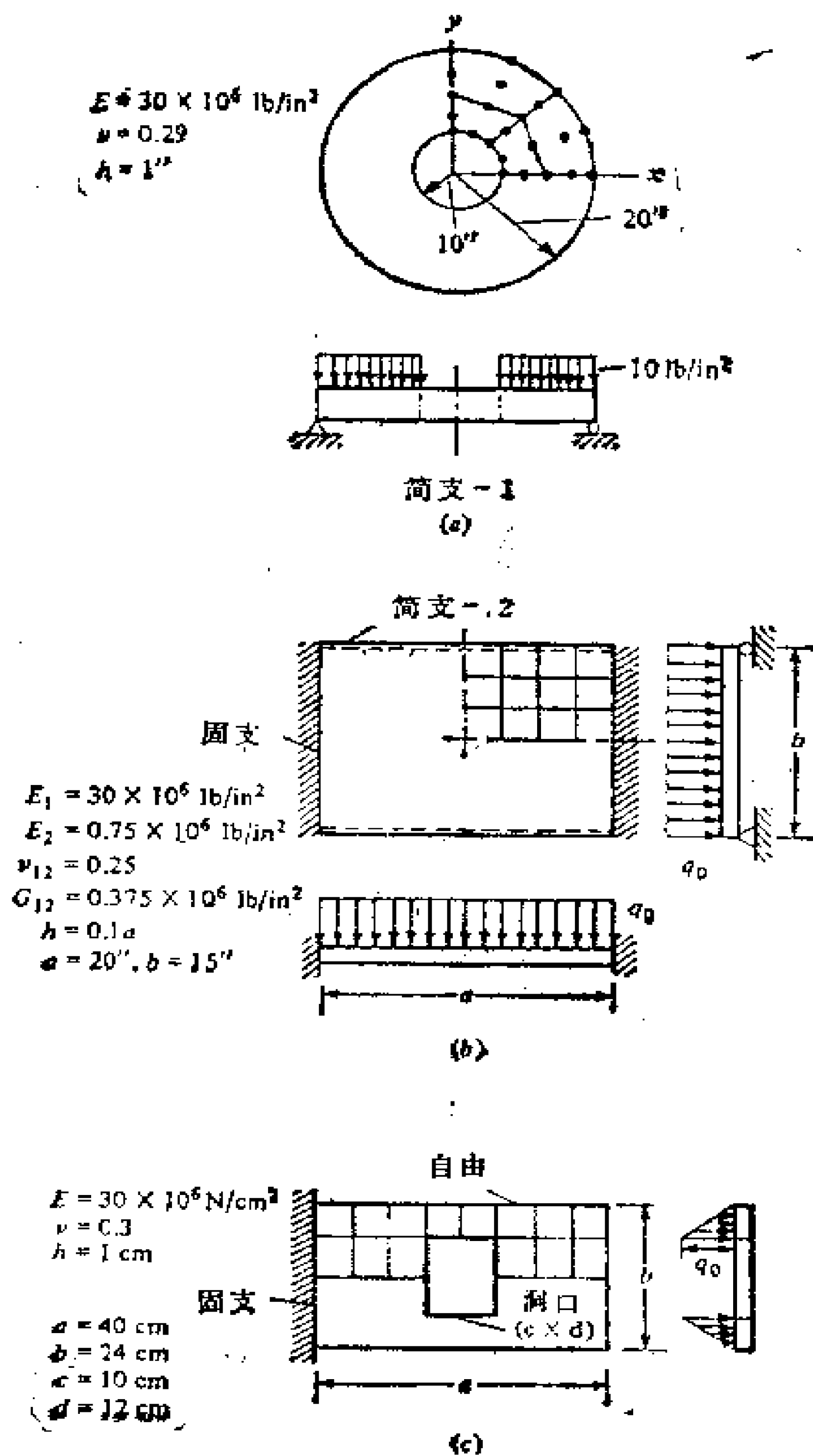
(b)



(c)

习题4.59的图

4.60 对习题图4.60给出平面弯曲问题，求规定的初始自由度和次自由度以及其值



习题4.60的图

4.61 计算线性三角形单元方程式（4.255）的单元矩阵〔即由方程式（4.25）给出方程式（4.224）中的ψ_i〕。

4.62 在平面荷载和横向荷载共同作用的情况下，对薄平面弹性物体，求刚度矩阵（在局部坐标系中）元素的代数形式（提示：将平面应力单元和板的弯曲单元的单元矩阵组合在一起，与由杆单元和梁单元组成的框架单元相类似）。

4.63 用求下列问题最小特征值的方法：

$$-\nabla^2 u = \lambda u \quad 在\Omega中$$

$$u = 0 \quad 在\Gamma上$$

求下列问题瞬时分析的时间间隔

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = 1 \quad 在\Omega中$$

$$u = 0,\ t \geqslant 0 \quad 在\Gamma上；\ u = 0,\ t = 0 \quad 在\Omega中$$

4.64（中心差分法） 考虑下面矩阵的时间微分方程：

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

式中：上面的小点表示对时间的微分，假定：

$$\{\ddot{U}\}_n = \frac{1}{(\Delta t)^2}(\{U\}_{n-1} - 2\{U\}_n + \{U\}_{n+1})$$

$$\{\dot{U}\}_n = \frac{1}{2(\Delta t)}(\{U\}_{n+1} - \{U\}_{n-1})$$

推导下式中$\{U\}_{n+1}$的解的代数方程式：

$$[A]\{U\}_{n+1} = \{F\}_n - [B]\{U\}_n - [C]\{U\}_{n-1}$$

4.65 考虑时间的一次微分方程

$$a\frac{du}{dt} + bu = f$$

采用线性近似式$u(t) = u_1\psi_1(t) + u_2\psi_2(t)$，$\psi_1 = 1 - t/\nabla t$和 $\psi_2 = t/\nabla t$，推导相应的代数方程式，并与用近似式的θ族得到的代数方程式相比较。

4.66（时—空单元） 考虑微分方程

$$c\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f \qquad 对0 < x < L \qquad 0 < t \leqslant T$$

$$u(0,\ t) = u(L,\ t) = 0 \qquad 对0 \leqslant t \leqslant T$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x) \qquad 对0 < x < L$$

式中，$c = c(x)$，$a = a(x)$，$f = f(x,\ t)$和u_0是已知函数，研究由下式规定的长方形域：

$$\Omega = \{(x,\ t):\ 0 < x < L,\ 0 < t \leqslant T\}$$

用矩形将Ω进行有限元离散是时一空矩形单元(用t代替y)。求时一空单元方程式的有限元公式，讨论这公式的数学方面或实用方面的限制。计算线性单元的单元矩阵。

4-7 等参元和数值积分

4-7-1 等参数单元

回顾3-6节可知，等参元可用以描述单元的几何形状及因变量的变化：

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i\hat{\psi}_i \qquad y=\sum_{i=1}^{n}y_i\hat{\psi}_i \qquad u=\sum_{i=1}^{n}u_i\hat{\psi}_i \tag{4.254}$$

式中，$\hat{\psi}_i=\hat{\psi}_i(\xi,\ \eta)$是自然坐标$(\xi,\ \eta)$中的插值函数。

等参元的概念是很有用的，因为它使不规则域（即曲线边界域）能比较容易准确的表示，但是，使用曲线等参元使得按整体

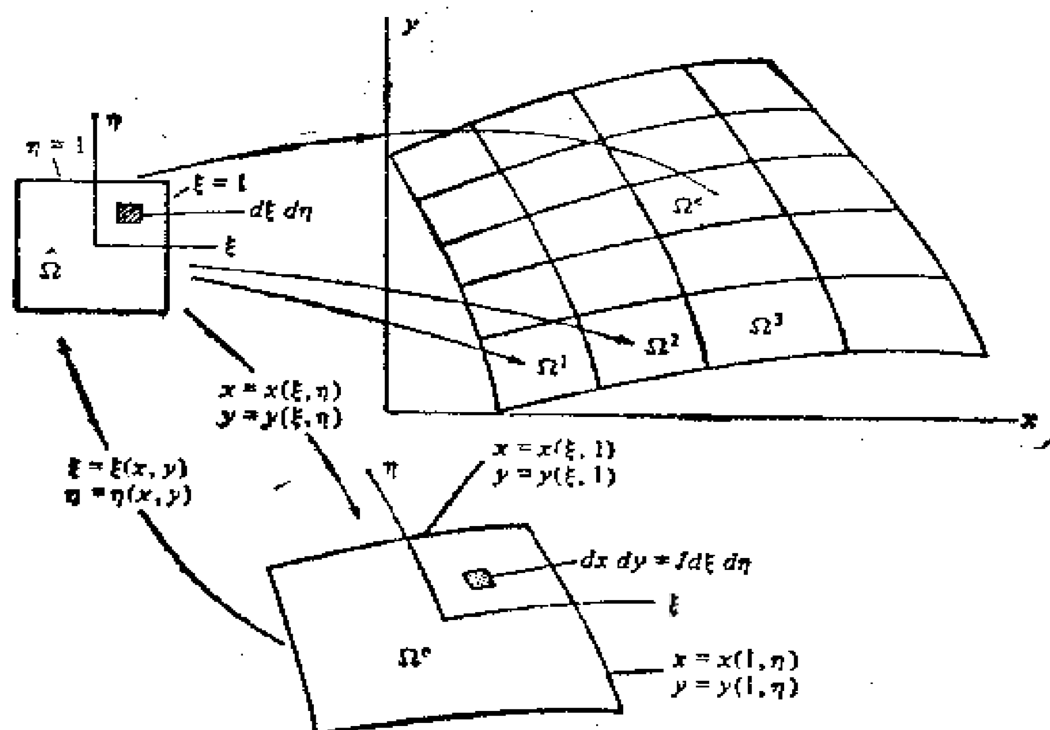


图4.47　由主单元形成的有限元网格

坐标直接求单元系数矩阵及列向量变得困难些（整体坐标用以描述问题的方程）。将图4.47所示的曲线单元(Ω^e)与使单元方程式数值积分比较容易的形状简单的主单元($\hat{\Omega}$)间引入可逆变换，这些困难可以得到克服。这种变换由式(4.254)的坐标变换来进行。例如，研究图4.47所示的主元。主元的坐标取自然坐标(ξ, η)，故$-1\leqslant(\xi,\ \eta)\leqslant 1$。这种选择是由Gauss积分法的限制决定的。研究主元$\hat{\Omega}$中的点(ξ, η)与单元Ω^e中的点(x, y)间的坐标变换：

$$x = x(\xi,\ \eta) \qquad y = y(\xi,\ \eta) \tag{4.255}$$

例如，这一变换使主元$\hat{\Omega}$中直线$\xi=1$转化为xy平面上以参数$x=x(1,\ \eta)$，$y=y(1,\ \eta)$表达的曲线。再考虑式（4.255）的一种特殊情况：

$$x = \sum_{i=1}^{4} x_i\hat{\psi}_i(\xi,\ \eta) \qquad y = \sum_{i=1}^{4} y_i\hat{\psi}_i(\xi,\ \eta) \tag{4.256}$$

式中，$\hat{\psi}_i$为双线性插值函数（见图4.27），其节点编号3和4可以互换（图4.48），(x_i, y_i)为单元Ω^e第i个结点的整体坐标。现考虑在$\hat{\Omega}$中$\xi=1$的直线，则有

$$\begin{aligned} x(1,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} x_i\hat{\psi}_i(1,\eta) = x_1\cdot 0 \\ &\quad + \frac{1}{2}x_2(1-\eta) + \frac{1}{2}x_3(1+\eta) + x_4\cdot 0 \\ &= \frac{x_2+x_3}{2} + \frac{x_3-x_2}{2}\eta \end{aligned}$$

$$y(1,\eta) = \sum_{i=1}^{4} y_i\hat{\psi}_i(1,\eta) = \frac{y_2+y_3}{2} + \frac{y_3-y_2}{2}\eta$$

很明显，x和y只是η的线性函数，因而确定一条直线。类似地，在单元Ω^e中$\xi=-1$及$\eta=\pm 1$的线也为直线。换言之，在线性变换下，主元$\hat{\Omega}$变换成xy平面内的四边形单元、当$\hat{\psi}_i$为二次式时，变换到xy平面上的单元将为曲线单元。通过确定单元的整体坐标，有限

元网格的各种单元均可由主元形成（看图4.47）。不同次的主元确定不同的变换，因而导致有限网格的不同聚合。例如，三次矩形主元能用以形成三次曲线矩形单元的网格。因而借助适当的主元，能形成任意的网格单元。但是，主元的变换应使单元间无缝隙及重迭现象。图4.27和4.28所示的单元可用作主元。

为进行单元计算，须将x，y的函数变换为ξ，η的函数。采用微分的连锁法，由（4.255）式可得：

$$dx=\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \qquad dy=\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta$$

或

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}=[J]^T\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \tag{4.257}$$

式中，$[J]$为变换式(4.255)的Jacobi矩阵，方程式(4.257)表示将主元$\hat{\Omega}$中的线性单元$d\xi$及$d\eta$变换为xy平面上的线元dx及dy的一个线性变换。要使x，y坐标变换为ξ，η坐标，矩阵$[J]$必须是可逆的。方程（4.257）可逆的充要条件是雅可比矩阵的行列式在$\hat{\Omega}$内的各点（ξ，η）处均不为零。

$$J\equiv\det[J]=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\neq 0 \tag{4.258}$$

当$J\neq 0$时，有：

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ \cdots \\ d\eta \end{Bmatrix}=([J]^{-1})^T\begin{Bmatrix} dx \\ \cdots \\ dy \end{Bmatrix}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix} dx \\ \cdots \\ dy \end{Bmatrix} \tag{4.259}$$

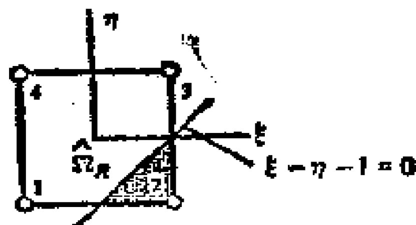
和

$$\xi=\xi(x,\ y) \qquad \eta=\eta(x,y) \tag{4.260}$$

从式（4.259）可知，函数$\xi=\xi(x,\ y)$及$\eta=\eta(x,\ y)$必须是

连续、可微分及可逆的，且变换式（4.255)在数学上应该是简单的，以使雅可比矩阵容易求出。变换式(4.256)能满足以上要求，且满足单元间无缝隙及无重迭的要求。

例4.16 研究图4.48所示三单元的网格，假定主元为四节点的正方形单元，单元1及2的节点编号为逆时针，它们与主元的节点编号保持一致，单元 3 的节点编号与主元的节点编号正好相反。单元1及3为凸形域，所谓凸形域是指域内任意两点的连线全部落



$$\hat{\varphi}_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),\ \hat{\varphi}_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$\hat{\varphi}_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),\ \hat{\varphi}_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

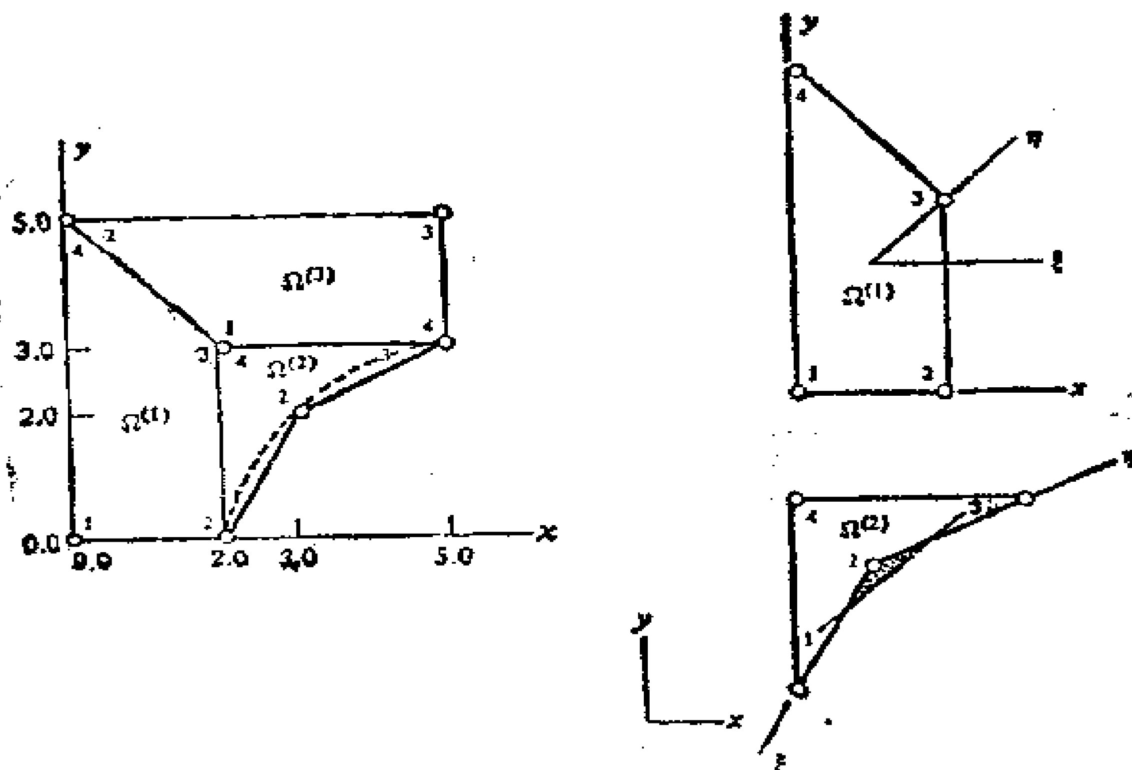


图4.48 矩形主元$\hat{\Omega}_R$的变换列子

在单元内部，很明显，单元2不是凸形的，因为连接节点1及3的直线不完全位于单元内部。在下节中，我们将考虑节点编号及单元的凸性对将主元变换成其它三个单元的影响。

首先，计算 Jaccobi 矩阵的元素（插值函数在图 4.48 中已给出）：

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\sum_{i=1}^{4} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi}=\frac{1}{4}[-x_1(1-\eta)+x_2(1-\eta)+x_3(1+\eta)-x_4(1+\eta)]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}=\sum_{i=1}^{4} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta}=\frac{1}{4}[-x_1(1-\xi)-x_2(1+\xi)+x_2(1+\xi)+x_4(1-\xi)] \tag{4.261}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=\sum_{i=1}^{4} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi}=\frac{1}{4}[-y_1(1-\eta)+y_2(1-\eta)+y_3(1+\eta)-y_4(1+\eta)]$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}=\sum_{i=1}^{4} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial h}=\frac{1}{4}[-y_1(1-\xi)-y_2(1+\xi)+y_3(1+\xi)+y_4(1-\xi)]$$

其次，计算每个单元的Jacobi式

单元1，有： $x_1=x_4=0$，$x_2=x_3=2$；$y_1=y_2=0$，$y_3=3$，$y_4=5$，

$$\begin{aligned}x&=2\hat{\psi}_2+2\hat{\psi}_3=1+\xi\\ y&=3\hat{\psi}_3+5\hat{\psi}_4=(1+\eta)\left(2-\frac{1}{2}\xi\right)\end{aligned} \tag{4.262a}$$

$$J=\det[J]=\begin{vmatrix}1 & \dfrac{-(1+\eta)}{2}\\ 0 & 2-\dfrac{1}{2}\xi\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(4-\xi)>0 \tag{4.262b}$$

显然，Jacobi式与ξ成线性关系，ξ值为：$-1\leqslant\xi\leqslant1$，Jacobi式为正的，因而（4.262a）式是可逆的。

单元2， 有： $x_1=x_4=2$，$x_2=3$，$x_4=5$，$y_1=0$. $y_2=2$，$y_3=y_4=0$，变换式及Jacobi式为：

$$x=3+\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\xi\eta}{2}$$

$$y=2+\frac{\xi}{2}+\eta-\frac{\xi\eta}{2} \tag{4.263a}$$

$$J=\begin{vmatrix}1+\dfrac{\eta}{2} & \dfrac{1-\eta}{2}\\ \dfrac{1+\xi}{2} & 1-\dfrac{\xi}{2}\end{vmatrix}=\frac{3}{4}(1+\eta-\xi) \tag{4.263b}$$

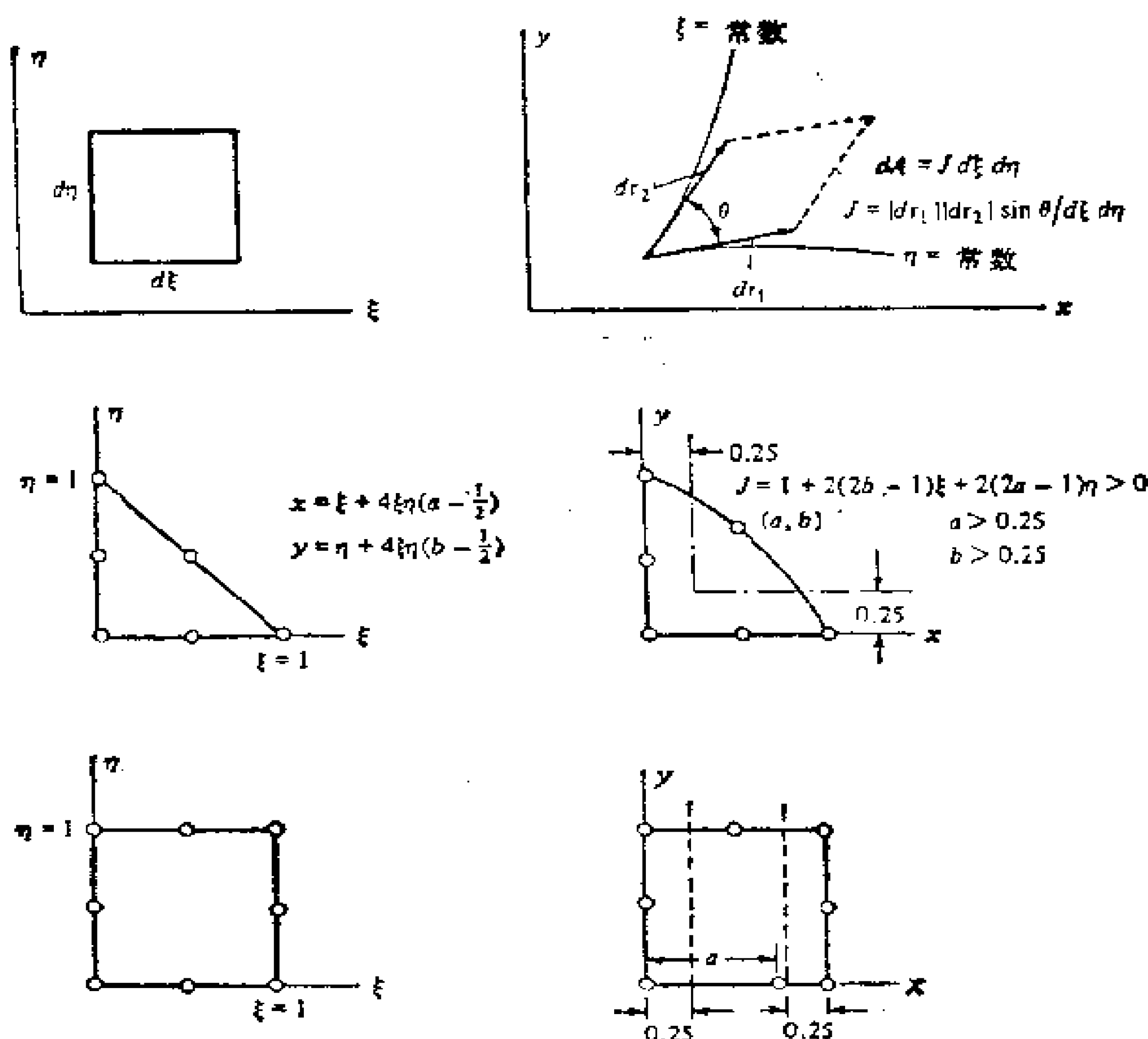


图4.49 单元变换的一些限制

Jacobi并非在主元中各点处都不为零，在直线$\xi=1+\eta$上为零，如主元中的阴影部分所示。并且主元中阴影面积已进入单元2的阴影区，因此，在任何有限元网格中均不采用大于180°的内角。

单元3，有：$x_1=2$，$x_2=0$，$x_3=x_4=5$，$y_1=y_4=3$，$y_2=y_3=5$，变换式及Jacobi式为（注意：节点为顺时针编号）：

$$x=3-\frac{\xi}{2}+2\eta+\frac{\xi\eta}{2} \tag{4.264a}$$

$$y=4+\xi$$

$$J=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(1-\eta) & 1 \\ 2+\frac{1}{2}\xi & 0 \end{vmatrix}=-\left(2+\frac{1}{2}\xi\right)<0 \tag{4.264b}$$

Jacobi值为负表明右手坐标系统被映入左手坐标系统。计算中应避免采用这样的坐标变换。

以上实例表明，对四节点的主元，在有限元网格中不允许非凸形单元。一般情况下，任何内角θ（见图4.49）不宜太大或太小，因为这可能导致Jacobi值$J=(|dr_1||dr_2|\sin\theta)/d\xi d\eta$太小。当采用高阶主元时，也有类似的限制。对高阶单元，可能引起其他的限制。例如，对高阶单元(三角形及矩形)，边及内节点的设置要受限制。对 8 节点的矩形单元，边节点应如下设置：其到任一边的距离应大于或等于所在边长的四分之一（图4.49）

4-7-2　数值积分

式（4.2.26)中单元系数矩阵及列向量的数值计算，与3-6-4节中所述的一维单元的计算完全一致。由于积分是在整体坐标x，y下进行的，而插值函数是自然坐标ξ、η的函数，因而引入坐标变换（式(4.254)）使积分用ξ及η表示（也即转换到主元上），本节中，我们讨论单元矩阵数值积分的步骤。

首先计算后面有许多用除的 Jacobi矩阵[J]，由（4.254）和（4.257）可知，对每个单元Ω^e有：

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi} & \sum_{i=1}^{n}y_i\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}\\ \sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta} & \sum_{i=1}^{n}y_i\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\end{bmatrix}$$

(4.265*a*)

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial\xi} & \cdots\dfrac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial\eta} & \cdots\dfrac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ \vdots & \vdots\\ x_n & y_n\end{bmatrix} \qquad (4.265b)$$

接着推导插值函数对x和y以及对ξ及η坐标的微分之间的关系，应用微分连锁法有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}&=\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\\ \frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial y}&=\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\end{aligned} \qquad (4.266a)$$

或用矩阵式：

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\end{Bmatrix}=[J^*]\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\end{Bmatrix}$$

(4.266*b*)

$$=\begin{Bmatrix}J_{11}^*\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}+J_{12}^*\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\\ J_{21}^*\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi_i}+J_{22}^*\dfrac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\end{Bmatrix} \qquad (4.266c)$$

式中，J_{ij}^*是在点（i,j）处的Jacobi逆阵

$$[J]^{-1}\equiv[J^*]=\begin{bmatrix}J_{11}^* & J_{12}^*\\ J_{21}^* & J_{22}^*\end{bmatrix} \qquad (4.267)$$

的元素。单元面积为：

$$dA\equiv dx\,dy=J\,d\xi\,d\eta \qquad (4.268)$$

如果单元边界为直线（非曲线单元），我们还可以用角节点确定单

元的几何形状。此时，式(4.265) 中的$\hat{\psi}_i$表示单元的线性插值函数。

式 (4.265) 和 (4.266) 为将单元$\Omega^{(e)}$的积分化为对应的主元$\hat{\Omega}$的积分提供了必要的关系。例如，考虑在任意单元$\Omega^{(e)}$中的下列积分表达式：

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega^{(e)}}\left(a\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+b\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}+c\psi_i\psi_j\right)dx\,dy \tag{4.269}$$

式中，$a=a(x,y)$，$b=b(x,y)$和$c=c(x,y)$均为x，y的函数。假定有限元的网格由主元$\hat{\Omega}$形成，采用变换式(4.260) 有：

$$\begin{aligned}K_{ij}^{(e)}=\int_{\hat{\Omega}}\Big[&\hat{a}\left(J_{11}^{*}\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}+J_{12}^{*}\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\right)\left(J_{11}^{*}\frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial\xi}\right.\\&\left.+J_{12}^{*}\frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial\eta}\right)+\hat{b}\left(J_{21}^{*}\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}+J_{22}^{*}\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}\right)\\&\left(J_{21}^{*}\frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial\xi}+J_{22}^{*}\frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial\eta}\right)+\hat{c}\hat{\psi}_i\hat{\psi}_j\Big]J\,d\xi\,d\eta\\=\int_{\hat{\Omega}}&F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\end{aligned} \tag{4.270}$$

式中，J_{ij}^{*}为Jacobi逆阵中的元素，$\hat{a}=a(\xi,\eta)$等。式(4.265)至式(4.270) 对三角形及矩形形状的主元均适用 (见图 4.50)。

矩形主元的数值积分　整个矩形主元$\hat{\Omega}_R$ (参见图4.48) 的积分公式可由3-6-4节的一维积分公式导出，故有：

$$\begin{aligned}\int_{\hat{\Omega}_R}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta&=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}F(\xi,\eta)\,d\eta\right)d\xi\\&=\int_{-1}^{1}\left(\sum_{J=1}^{N}F(\xi,\eta_J)W_J\right)d\xi\\&\simeq\sum_{I=1}^{M}\sum_{J=1}^{N}F(\xi_I,\eta_J)W_IW_J\end{aligned} \tag{4.271}$$

式中，M和N分别为沿ξ及η方向上积分点的个数，$(\xi_I,\ \eta_J)$是指Gauss点，W_I和W_J是指对应于Gauss点的Gauss权(见表3.8)。

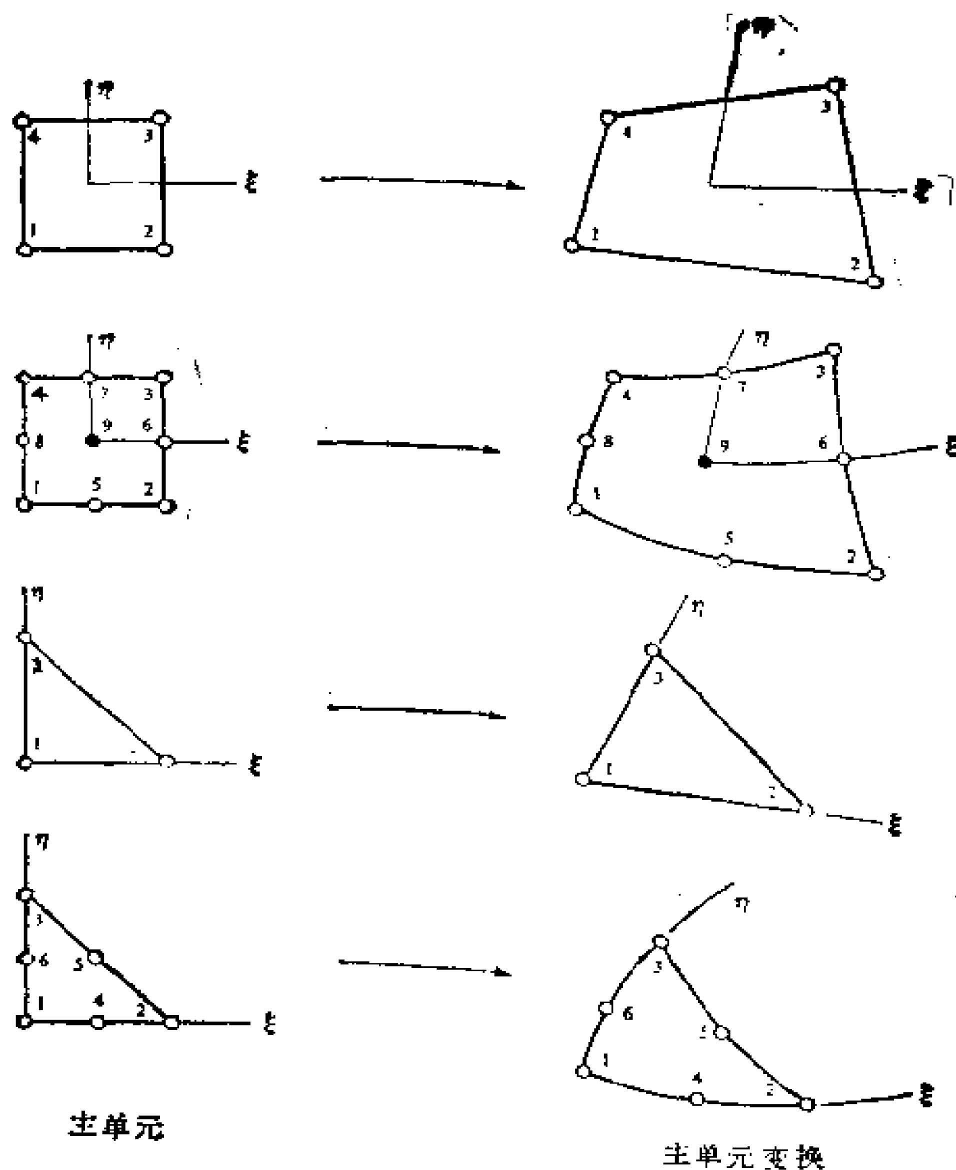


图1.50 线性和四边形主元及其变换

Gauss点数量的选择是基于与3-6-4节给出的同样公式：P次多项式用 $N=(P+1)/2$个Gauss点进行精确积分，当$P+1$为奇数时，应选 $N=P/2+1$个Gauss点。在大多数情况下，插值函数的次数与ξ及η是一样的，故有$M=N$。当被积函数在ξ及η中有不同的次数时，Gauss点的个数据次数高的多项式选择。表4.12包含对线性，二次和三次Lagrange（以及S型）四边形单元积分次数选择以及Gauss点位置的信息。多项式的最高次数是取ξ及η多项式的最大值，而

最高多项式在这类型的单元矩阵积分中已给出：

$$M_{ij}^{(e)} = \int_{\hat{\Omega}} J\hat{\psi}_i\hat{\psi}_j d\xi d\eta$$

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\hat{\Omega}} J\left(\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}\frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial x} + \frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial y}\frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial y}\right)d\xi\, d\eta$$

(4.272)

式中，$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}$及$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial y}$由式（4.266）给出。$N\times N$个Gauss点的位置由一维Gauss点$\xi_i$的张量积而得。

表4.12　对线性一二次及三次四边形单元Gauss点积分次数及位置的选择

单元形式	多项式的最大次数	积分次数	精度	主元中积分点的位置
线　性	2	2×2	3	ξ = −0.577 …；ξ = 0.577 …；η = 0.577 …；η = −0.577 …
二　次	4	3×3	5	ξ = −0.774 …；ξ = 0.774 …；η = 0.774 …；η = 0.0；η = −0.774 …
三　次	6	4×4	7	ξ = −0.861 …；ξ = 0.861 …；η = 0.861 …；η = 0.339 …；η = −0.339 …；η = −0.861 …

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{Bmatrix} \{\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_N\} \equiv \begin{bmatrix} (\xi_1, \xi_1) & (\xi_1, \xi_2) \cdots & (\xi_1, \xi_N) \\ (\xi_2, \xi_1) & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\xi_N, \xi_1) & \cdots & (\xi_N, \xi_N) \end{bmatrix}$$

(4.273)

以下两个例子说明如何计算矩形单元的Jacobi式和单元矩阵。

例4.17 考虑如图4.48所示的四边形单元$\Omega^{(1)}$，我们希望求得在$(\xi, \eta) = (0,\ 0)$及$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$处的$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x}$和$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y}$值，由(4.265$b$)式可得：

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1-\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 2.0 & 0.0 \\ 2.0 & 3.0 \\ 0.0 & 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1+\eta}{2} \\ 0 & \frac{4-\xi}{2} \end{bmatrix}$$

Jacobi矩阵的逆阵为：

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+\eta}{4-\xi} \\ 0 & \frac{2}{4-\xi} \end{bmatrix}$$

$$J_{11}^* = 1 \quad J_{21}^* = 0 \quad J_{12}^* = \frac{1+\eta}{4-\xi} \qquad J_{22}^* = \frac{2}{4-\xi}$$

由式(4.266c)可得：

$$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} + \frac{1+\eta}{4-\xi} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} = \frac{2}{4-\xi} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta}$$

式中

$$\hat{\psi}_i=\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$$

$$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\xi}=\frac{1}{4}\xi_i(1+\eta\eta_i)\qquad\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial\eta}=\frac{1}{4}\eta_i(1+\xi\xi_i)\tag{4.274}$$

$(\xi_i,\ \eta_i)$为主元中i节点的坐标（参看图4.48）

节点	ξ_i	η_i
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

(4.275)

因而有：

$$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}=\frac{1}{4}\xi_i(1+\eta\eta_i)+\frac{1}{4}\ \frac{1+\eta}{4-\xi}\eta_i(1+\xi\xi_i)$$

$$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial y}=\frac{1}{4}\ \frac{2}{4-\xi}\eta_i(1+\xi\xi_i)$$

(ξ,η)	→ $(0,0)$	$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}$	$\frac{1}{4}\xi_i+\frac{1}{16}\eta_i$	$\frac{1}{8}\xi_i(2+\eta_i)+\frac{3}{56}\eta_i(2+\xi_i)$
$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial y}$	$\frac{1}{8}\eta_i$	$\frac{1}{14}\eta_i(2+\xi_i)$

例4.18 考虑图4.51a所示的四边形单元，我们希望利用Gauss积分计算以下单元矩阵：

$$S_{ij}=\int_\Omega\hat{\psi}_i\hat{\psi}_j dx\,dy$$

$$S_{ij}^{11}=\int_\Omega\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}\ \frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial x}dx\,dy\tag{4.276}$$

$$S_{ij}^{12}=\int_\Omega\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}\ \frac{\partial\hat{\psi}_j}{\partial y}dx\,dy$$

$$S_{ij}^{12} = \int_\Omega \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial y} dxdy$$

我们有

$$[J] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8-2\eta & 2\eta \\ -2\xi & 10+2\xi \end{bmatrix} \quad J = (4-\eta)(5+\xi)+\xi\eta$$

$$= 20 + 4\xi - 5\eta \tag{4.277}$$

$$S_{ij} = \int_\Omega \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j \, dx\, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j J d\xi\, d\eta$$

$$S_{ij}^{11} = \int_\Omega \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial x}\, dx\, dy \tag{4.278}$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta}\right)\left(J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta}\right) J\, d\xi\, d\eta$$

等等。式中，$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi}$和$\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta}$由式（4.274）可得，计算式（4.276）的积分可得：

$$[S^{11}] = \begin{bmatrix} 0.40995 & -0.36892 & -0.20479 & 0.16376 \\ -0.36892 & 0.34516 & 0.25014 & -0.22639 \\ -0.20479 & 0.25014 & 0.43155 & -0.47690 \\ 0.16376 & -0.22639 & -0.47690 & 0.53953 \end{bmatrix}$$

$$[S^{22}] = \begin{bmatrix} 0.26237 & 0.16389 & -0.13107 & -0.29520 \\ 0.16389 & 0.22090 & -0.23991 & -0.14489 \\ -0.13107 & -0.23991 & 0.27619 & 0.09478 \\ -0.29520 & -0.14489 & 0.09478 & 0.34530 \end{bmatrix} \tag{4.279}$$

$$[S^{12}] = \begin{bmatrix} 0.24731 & 0.25156 & -0.25297 & -0.24589 \\ -0.24844 & -0.25090 & 0.25172 & 0.24762 \\ -0.25297 & -0.24828 & 0.24671 & 0.25454 \\ 0.25411 & 0.24762 & -0.24546 & -0.25627 \end{bmatrix}$$

$$
[S]=\begin{bmatrix}
2.27780 & 1.25000 & 0.55556 & 1.00000 \\
1.25000 & 2.72220 & 1.22220 & 0.55556 \\
0.55556 & 1.22220 & 2.16670 & 0.97222 \\
1.00000 & 0.55556 & 0.97222 & 1.72222
\end{bmatrix}
\tag{4.279}
$$

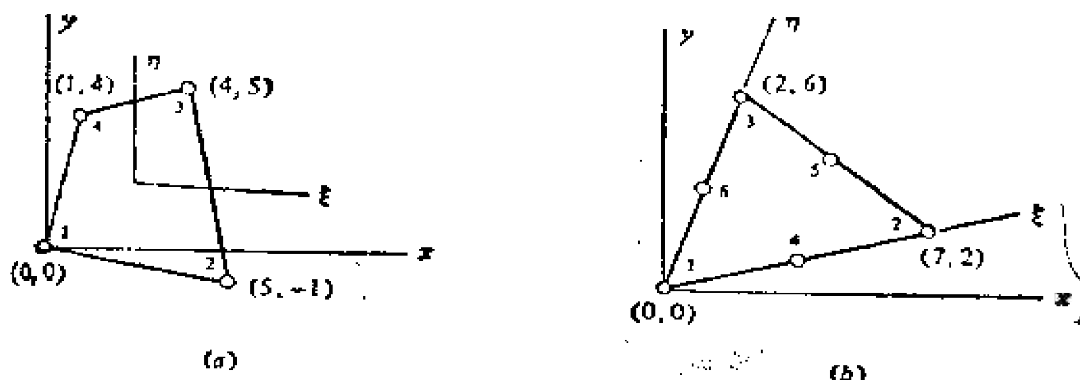


图4.51　单元几何形状：(a) 双线性四边形单元（见例4.18）；(b) 二次三角形单元（见例4.19）

三角形主元的数值积分　在4-4节及前面几页中，已经讨论了四边形等参元，我们可用它来模拟（即表示）很普通的几何形状以及场变量。在此，我们讨论三角形等参元，从计算的观点来看它要方便及有用一些。因为四边形单元是几何可变的，故可以移动角点位置将四边形单元变为所需要的三角形单元（即将第四个角点与相邻点并合）。在实际计算中，可以对四边形单元的两角点编以相同的整体节点编号来进行。因此，三角形主元自然可由与它相关的四边形主元而得。在此我们讨论由三角形主元（等参元）到任意一三角形单元的变换。

我们选取边长为1的等腰直角三角形作为主元（图4.52a），任意一三角形单元$\Omega^{(e)}$可利用式（4.260）由三角形主元$\hat{\Omega}_T$转换而得。在$\hat{\Omega}_T$中，$\xi=0$和$\eta=0$的坐标线与$\Omega^{(e)}$中1—3及1—2的曲线坐标线对应。

在4-4-2节中，我们介绍了三节点三角形单元，并阐述了其在热传导、流体流动以及平面弹性问题中的应用。在那里，我们可

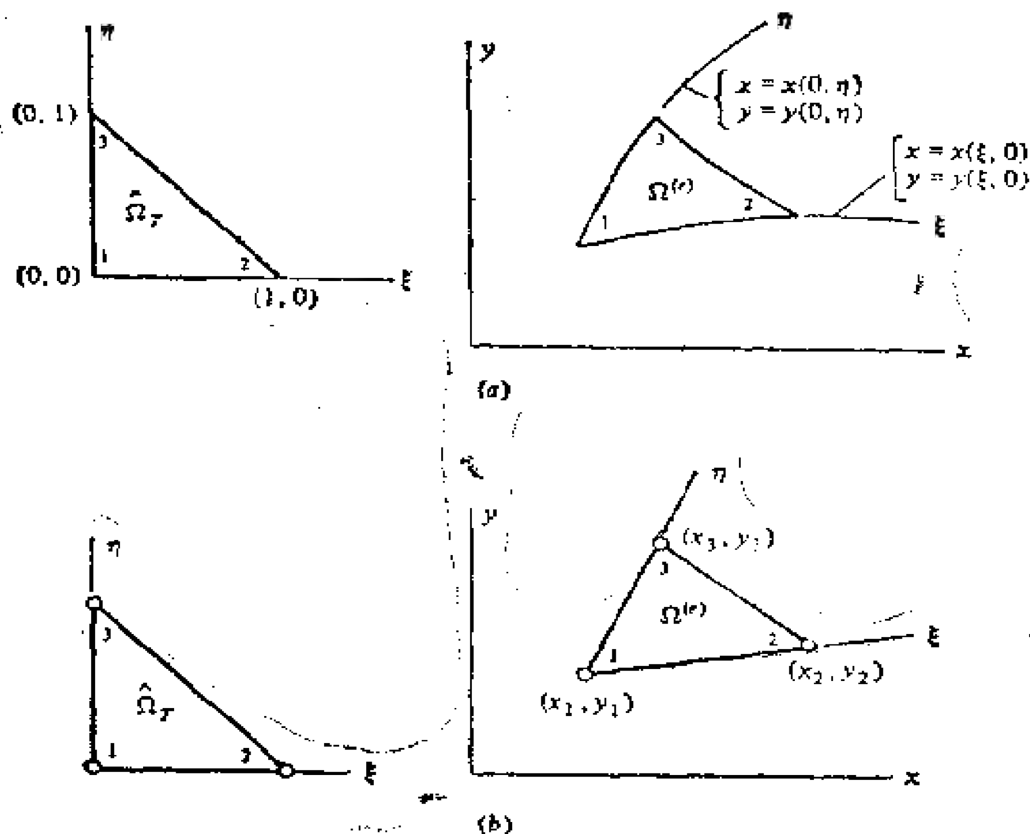


图4.52　三角形主元及其变换：(a) 一般的变换；(b) 主元对三角形单位的线性变换

以直接求单元方程中的积分值。对三节点的三角形单元变换式(4.260)取为：

$$x=\sum_{i=1}^{3}x_i\hat{\psi}_i(\xi,\eta)\qquad y=\sum_{i=1}^{3}y_i\hat{\psi}_i(\xi,\eta)\tag{4.280}$$

式中，$\hat{\psi}_i$ (ξ,η) 为三节点三角形主元的插值函数（参看图4.52b）。

$$\hat{\psi}_1=1-\xi-\eta\quad \hat{\psi}_2=\xi\quad \hat{\psi}_3=\eta\tag{4.281}$$

上式满足插值函数的性质（4.26）式。由单元$\Omega^{(e)}$到$\hat{\Omega}_T$的逆变换通过对式(4.280)求逆可得

$$\xi=\frac{1}{2A}\Big[(x-x_1)(y_3-y_1)-(y-y_1)(x_3-x_1)\Big]$$

$$\eta=\frac{1}{2A}\left[(x-x_1)(y_1-y_2)+(y-y_1)(x_2-x_1)\right]$$

(4.282)

式中，A为$\Omega^{(e)}$的面积。

借助于(4.282)可知，式(4.25b)的插值函数与(4.281)中的$\hat{\psi}_i$是等价的。并且，式(4.110)中的面积坐标L_i也与$\hat{\psi}_i$等价。用于高阶的三角形主单元的插值函数可由面积坐标而得，在4-4节中对这点作过讨论。

线性三角形单元的Jacobi矩阵为：

$$[J]=\begin{bmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_3 & -\beta_3\\ -\gamma_2 & \beta_2\end{bmatrix} \qquad (4.283)$$

式中，β_i及r_i是在式(4.25b)中已确定的常数。Jacobi 矩阵之逆阵为：

$$[J]^{-1}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix} \quad J=\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3=2A \qquad (4.284)$$

关系式(4.266c)取为：

$$\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x}=-\frac{\beta_2+\beta_3}{2A}=\frac{\beta_1}{2A}$$

$$\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial y}=-\frac{\gamma_2+\gamma_3}{2A}=\frac{\gamma_1}{2A}$$

(4.285)

$$\frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial x}=\frac{\beta_2}{2A} \qquad \frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial y}=\frac{\gamma_2}{2A}$$

$$\frac{\partial\hat{\psi}_3}{\partial x}=\frac{\beta_3}{2A} \qquad \frac{\partial\hat{\psi}_3}{\partial y}=\frac{\gamma_3}{2A}$$

在一般情况下，$\hat{\psi}_i$对整体坐标的微分可由式(4.266)计算而得，取$L_3=1-L_1-L_2$

$$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial x}=\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x}+\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial y}=\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial y}+\frac{\partial\hat{\psi}_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y}$$

或

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} \quad [J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial L_1} & \dfrac{\partial y}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial L_2} & \dfrac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}$$

在一般情况下，在$\hat{\Omega}_T$内的积分有 ($\hat{G} = GJ$) (4.286)

$$\int_{\hat{\Omega}_T} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{\hat{\Omega}_T} \hat{G}(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 \quad (3.287)$$

表4.13　　三角形单元的积分点及其权

积分点数	精度及残数的次数	Gauss 点 的 位 置				
		L_1	L_2	L_3	W	几何位置
1	1 $0(h^2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	a
3	2 $0(h^2)$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0	0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	a b c
4	3 $0(h^4)$	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{11}{15}$ $\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{11}{15}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{11}{15}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{2}{15}$	$\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$ $\frac{25}{48}$ $\frac{25}{48}$	a b c d

上式可通过积分式($L_3 = 1 - L_1 - L_2$)近似表示。

$$\int_{\hat{\Omega}_T} \hat{G}(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 \approx \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{N} W_I \hat{G}(S_I) \quad (4.288)$$

式中，W_i和S_i分别代表积分的权及点。表4.13展示了对一点、三点和四点三角形单元的积分法则。

例4.19 考虑二次三角形单元，如图4.51b所示，我们要求在点$(x,y)=(2,4)$处$\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x}$，$\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial y}$，$\frac{\partial\hat{\psi}_4}{\partial x}$和$\frac{\partial\hat{\psi}_4}{\partial y}$的值及$\left(\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\hat{\psi}_4}{\partial x}\right)$的积分值。

由于单元边界为直线，因而几何形状可由角节点的插值函数来确定。对所讨论的单元有：

$$x=\sum_{i=1}^{3}x_iL_i=7L_2+2L_3=2-2L_1+5L_2$$

$$y=\sum_{i=1}^{3}y_iL_i=2L_2+6L_3=6-6L_1-4L_2 \tag{4.289}$$

$$[J]=\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 5 & -4\end{bmatrix}\qquad [J]^{-1}=\frac{1}{38}\begin{bmatrix}-4 & 6\\ -5 & -2\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac{1}{38}\begin{bmatrix}-4 & 6\\ -5 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial L_1}\\ \frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial L_2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{6-4}{38}\\ \frac{-5-2}{38}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial\hat{\psi}_4}{\partial x}\\ \frac{\partial\hat{\psi}_4}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac{1}{38}\begin{bmatrix}-4 & 6\\ -5 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial\hat{\psi}_4}{\partial L_1}\\ \frac{\partial\hat{\psi}_4}{\partial L_2}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{38}\begin{Bmatrix}-16L_2+24L_1\\ -20L_2-8L_1\end{Bmatrix}$$

式中，$\hat{\psi}_1=L_1$，$\hat{\psi}_4=4L_1L_2$。点(2，4)的面积坐标可由式(4.289)求得：

$$2=7L_2+2L_3$$

$$4 = 2L_2 + 6L_3$$
$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

解之得：

$$L_1 = \frac{5}{19} \qquad L_2 = \frac{2}{19} \qquad L_3 = \frac{12}{19}$$

计算点(2,4) 的$\frac{\partial \hat{\psi}_4}{\partial x}$及$\frac{\partial \hat{\psi}_4}{\partial y}$可得：

$$\frac{\partial \hat{\psi}_4}{\partial x} = \frac{-16}{(19)^2} + \frac{60}{(19)^2} = \frac{44}{361}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}_4}{\partial y} = \frac{-20}{(19)^2} + \frac{-20}{(19)^2} = \frac{-40}{361}$$

进而可得：

$$\int_{\Delta_1} \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}_4}{\partial x} dxdy = \frac{J}{361} \int_0^1 \int_0^{1-L_2} (12L_1 - 8L_2)\, dL_1 dL_2$$

由于对L_1及L_2的积分均为线性，故采用一点积分就足够。积分点选为$(L_1,\ L_2) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$，其权取为$W = 1$：

$$\frac{38}{361} \int_0^1 \int_0^{1-L_2} (12L_1 - 8L_2) dL_1 dL_2 = \frac{2}{19}\left(6 \times \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{4}{57}$$

我们可以应用式(4.117b)检证上式结果。

$$\frac{1}{361} \int_A (12L_1 - 8L_2) dA = \frac{A}{361}\left(\frac{12}{3} - \frac{8}{3}\right) = \frac{4A}{3 \times 361}$$

三角形的面积等于19，因而得到与上式一样的结果。

4-8 计算机执行程序

4-8-1 概述

在3—7节中，我们围绕一个典型的有限元程序的发展，讨论过一些基本观念，并且对一维问题有限元程序的各种逻辑单元和

FEM1D程序的应用作了详细说明。所提及的大部分观念对二维问题同样适应，其中包括如图3.20所示的逻辑单元。边界条件的引入及方程的解法与一维问题一样。在此，我们着重二维单元计算的计算机应用。并将讨论二维模型程序FEM2D及平面分析程序PLATE的使用。FEM2D 程序包括三节点三角形单元及4节点、8节点和9节点矩形等参元，可以用来解决静力平面弹性问题，稳定问题、瞬时热传导问题、粘性不可压缩液流的稳定和不稳定薄层的运动问题(用罚函数公式)。

在预处理单元中，程序MESH 可用以将矩形域划分为三角形及矩形有限元网格。子程序一般不适合于任意域的情况。当然，可以利用其它网格形成程序以替代MESH程序。子程序MESH产生连缀矩阵(数组NOD)及节点的整体坐标(数组X和Y)。当分析非矩形域时，必须读入网格信息。

4-8-2 单元计算

由于以下原因，在二维问题中，需要更多的单元计算：

1.单元的各种几何形状

2.单个和多变量问题

3.某些公式（平面弯曲和罚函数公式）中的降阶积分。

4.单元的不同节点的初始自由度数目的差异。

线性的三节点三角形单元的单元计算可以简化，因为插值函数的导数在整个单元上均连续。当用单元来解二次方程时，单元系数矩阵可由式（4.37）或式（4.117）精确地求出来。如对整个三角形单元考虑积分：

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega^{(e)}}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy \qquad (4.290)$$

$$M_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega^{(e)}}\psi_i\psi_j\,dxdy$$

利用式(4.25)及(4.36)有：

$$K_{ij}^{(e)}=\frac{1}{(2A)^2}(\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j)\int_{\Omega^{(e)}}dxdy$$

$$= \frac{1}{4A}(\beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j)$$

$$M_{ij}^{(e)} = \frac{1}{(2A)^2}\int_{\Omega^{(e)}}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)(\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y)dxdy \tag{4.291}$$

$$= \frac{1}{(2A)^2}[I_{00}\alpha_i\alpha_j + I_{10}(\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i)$$

$$+ I_{01}(\alpha_i\gamma_j + \alpha_j\gamma_i) + I_{20}\beta_i\beta_j + I_{11}(\beta_i\gamma_j + \beta_j\gamma_i) + I_{02}\gamma_i\gamma_j]$$

计算机直接形成矩阵[K]及[M]。数组的说明以及矩阵[K]和[M]的Fortran表达形式如下：

```
C     ..............................................................................
C
C      FORTRAN STATEMENTS TO CALCULATE THE ELEMENT MATRICES IN
C       (4.290) AND (4.291) FOR THE LINEAR TRIANGULAR ELEMENT
C
C      NPE ...... NODES PER ELEMENT
C      X,Y ...... GLOBAL COORDINATES OF THE ELEMENT NODES
C
C      ALPHA...
C      BETA  ... COEFFICIENTS IN THE INTERPOLATION FUNCTIONS
C      GAMA...
C
C      DET ...... TWICE THE AREA OF THE ELEMENT
C      AMN ...... INTEGRAL OF (X**M) (Y**N) OVER THE TRIANGLE
C      AK(I,J)... COEFFICIENT MATRIX IN EQN. (4.290)
C      AM(I,J)...COEFFICIENT MATRIX IN EQN. (4.291)
C
C      VARIABLES NPE, X(I), AND Y(I) ARE TRANSFERRED FROM MAIN
C
C     ..............................................................................
C
       IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
       DIMENSION AK(3,3),AM(3,3),ALPHA(3),BETA(3),GAMA(3),X(3),Y(3)
```

```
C
C     DEFINE THE COEFFICIENTS OF THE INTERPOLATION FUNCTIONS
C
      DO 10 I = 1,NPE
      J = I + 1
      IF (J. GT. NPE) J = J - NPE
      K = J + 1
      IF (K. GT. NPE) K = K - NPE
      ALPHA(I) = X(J)*Y(K) - X(K)*Y(J)
      BETA(I) = Y(J) - Y(K)
   10 GAMA(I) = X(K) - X(J)
      DET = X(1)*(Y(2) - Y(3)) + X(2)*(Y(3) - Y(1)) + X(3)*(Y(1) - Y(2))
C
      XBAR = (X(1) + X(2) + X(3))/3.0
      YBAR = (Y(1) + Y(2) + Y(3))/3.0
      A00 = 0.5*DET
      A01 = A00*YBAR
      A10 = A00*XBAR
      A11 = A00*(X(1)*Y(1) + X(2)*Y(2) + X(3)*Y(3) + 9.0*XBAR*YBAR)/12.0
      A20 = A00*(X(1)*X(1) + X(2)*X(2) + X(3)*X(3) + 9.0*XBAR*XBAR)/12.0
      A02 = A00*(Y(1)*Y(1) + Y(2)*Y(2) + Y(3)*Y(3) + 9.0*YBAR*YBAR)/12.0
C
```

```
C      COMPUTE THE COEFFICIENTS OF MATRICES IN EQN. (4 290)
C
       DO 20 I=1,NPE
       DO 20 J=1,NPE
   20  AK(I,J)=(AK1*BETA(I)*BETA(J)+AK2*GAMA(I)*GAMA(J))/DET/2.0
C
C      COMPUTE THE COEFFICIENTS OF MATRIX IN EQN. (4 291)
C
       DO 40 I=1,NPE
       DO 40 J=1,NPE
   40  B(I,J)=A00*(ALPHA(I)*ALPHA(J)+
      1        A10*(ALPHA(I)*BETA(J)+ALPHA(J)*BETA(I))+
      2        A11*(BETA(I)*GAMA(J)+BETA(J)*GAMA(I))+
      3        A01*(ALPHA(I)*GAMA(J)+ALPHA(J)*GAMA(I))+
      4        A20*BETA(I)*BETA(J)+A02*GAMA(I)*GAMA(J))/(DET*DET)
C
       RETURN
       END
```

任意阶矩形等参元的单元计算可由4-7-2节中提及的而得，包括以下主要步骤：

1. 提供子程序 SHAPE，以计算插值函数及其对整个坐标的导数〔见式(4.265)至(4.268)〕。

2. 采用Gauss积分法对单元系数矩阵进行数值积分。

3. 建立该类求解问题所要求的单元矩阵。

子程序SHAPE(调入对 Gauss点数的DO循环) 包括各种阶单元的插值函数的表达式及它们对局部坐标（自然坐标）的导数。在 Gauss点处的Jacobi矩阵可由式(4.265b)求得。这要求在矩形数组中插值函数对单元节点的自然坐标和整体坐标求导数。在Gauss点处插值函数对整体坐标的导数则可借助关系式（4.266)计算。

我们感兴趣的二维问题的单元矩阵的系数需要计算式(4.276)所表示的单元矩阵。这些矩阵包括插值函数及其对整体坐标导数的乘积。由于积分采用数值积分〔见式(4.271)〕，被积函数在每一积分点处都得计算，并且累加（每个坐标方向）所有积分点的数据(NGP)，因此，式(4.276) 的积分计算以及插值函数和插值函数的导数的计算必须在 DO 循环中进行。为强调这点，设：

SF(I)：单元第i个节点的插值函数ψ_i。

GDSF(K,I)：插值函数 ψ_i对x_k 的整体导数〔GDSF(K, I) = $\partial\psi_I/\partial x_k$，$x_1 = x$，$x_2 = y$〕

CONST：对应于Gauss积分点(ξ_{NI}，η_{NI})处的权与Jacobi(即〔J〕的行列式)的积，其值为：DET*WT(NI,NGP)*WT(NJ, NGP)

则S_{ij}，S_{ij}^{11}的Fortran形式为：

```
S(I,J) = S(I,J) + SF(I)*SF(J)*CONST
S11(I,J) = S11(I,J) + GDSF(1,I)*GDSF(1,J)*CONST
S12(I,J) = S12(I,J) + GDSF(1,I)*GDSF(2,J)*CONST
S22(I,J) = S22(I,J) + GDSF(2,I)*GDSF(2,J)*CONST
```

(4.292)

S(I,J)，S11(I,J)等的累计值表示式(4.276)的积分系数的值，以上讨论可总结为以下所示的Fortran语句：

```
C     ..........................................................................
C
C     FORTRAN STATEMENTS TO CALCULATE THE ELEMENT MATRICES IN
C     EQ. (4 276) FOR LINEAR ISOPARAMETRIC RECTANGULAR ELEMENT
C
C     NPE ......  NODES PER ELEMENT
C     ELXY......  NPE BY 2 ARRAY OF GLOBAL COORDINATES OF ELEMENT
C                 NODES: ELXY(I,1) = X(I) AND ELXY(1,2) = Y(I)
C     DET ......  DETERMINANT OF THE JACOBIAN
C     SF(I)......  ELEMENT INTERPOLATION FUNCTIONS (I=1,NPE)
C     GDSF(1,J). GLOBAL DERIVATIVE OF SF(J) WITH RESPECT TO X
C     GDSF(2,J). GLOBAL DERIVATIVE OF SF(J) WITH RESPECT TO Y
C     WT(I,J)...  I-TH GAUSS WEIGHT IN THE J-TH ORDER QUADRATURE
C     GAUS(I,J). I-TH GAUSS POINT IN THE J-TH ORDER QUADRATURE
C     NGP ......  NUMBER OF POINTS IN THE QUADRATURE RULE
C     S(I,J) ...
C     S11(I,J) .
C     S12(I,J) .   COEFFICIENT MATRICES DEFINED IN EQ. (4.276)
C     S22(1,J)
C
C     VARIABLES NPE,NGP AND ARRAY ELXY ARE TRANSFERRED FROM MAIN
C
C     ..........................................................................
```

```
C
      IMPLICIT REAL *8(A-H, O-Z)
      DIMENSION SF(4),GDSF(4),WT(4,4),GAUSS(4,4),ELXY(4,2),
     1          S(4,4),S11(4,4),S12(4,4),S22(4,4)
C
      DATA GAUS/4*0 0D0,-0.57735027D0,0 57735027D0,2*0.0D0,
     *-0.77459667D0,0.0D0,0.77459667D0,0.0D0,-0.86113631D0,
     *-0.33998104D0,0.33998104D0,0.86113631D0/
C
      DATA WT/2.0D0,3*0.0D0,2*1.0D0,2*0.0D0,0.55555555D0,
     *0.88888888D0,.55555555D0,.0D0,0.34785485D0,2*0.65214515D0,
     *0.34785485D0/
C
C     INITIALIZE THE ARRAYS
C
      DO 20 I=1, NPE
      DO 20 J=1, NPE
      S(I,J)=0.0
      S11(I,J)=0.0
      S12(I,J)=0.0
   20 S22(I,J)=0.0
C
C     DO-LOOPS ON NUMERICAL (GAUSS) QUADRATURE BEGIN HERE
```

```
C
      DO 60 NI=1,NGP
      DO 60 NJ=1,NGP
      XI=GAUSS(NI,NGP)
      ETA=GAUSS(NJ,NGP)
C
C     CALL SUBROUTINE SHAPE TO EVALUATE INTERPOLATION FUNCTIONS
C                     AND THEIR GLOBAL DERIVATIVES
C
      CALL SHAPE (NPE,XI,ETA,SF,GDSF,DET,ELXY)
C
      CONST=DET*WT (NI,NGP)*WT(NJ,NGP)
C
C     COMPUTE VARIOUS COEFFICIENT MATRICES OF EQ. (4.276)
C
      DO 40 I=1,NPE
      DO 40 J=1,NPE
      S(I,J)=S(I,J)+CONST*SF(I)*SF(J)
      S11(I,J)=S11(I,J)+CONST*GDSF(1,I)*GDSF(1,J)
      S22(I,J)=S22(I,J)+CONST*GDSF(2,I)*GDSF(2,J)
   40 S12(I,J)=S12(I,J)+CONST*GDSF(1,I)*GDSF(2,J)
   60 CONTINUE
C
      RETURN
      END
```

为建立一给定问题的单元系数矩阵，我们可以利用以上所定义的单元矩阵。作为一实例，考虑式（4.1）提出的问题，其单元系数矩阵及列向量已由（4.14）式给出，单元矩阵K_{ij}可据以下式求得：

```
STIF(I,J) = A00*S(I,J) + A11*S11(I,J) + A12*S12(I,J)
          + A21*S12(J,I) + A22*S22(I,J)        (4.293)
```

当然，可根据GDSF直接定义K_{ij}，以免引入数组S，S_{12}…：

```
STIF(I,J) = STIF(I,J) + (A00*SF(I)*SF(J)
          + A11*GDSF(1,I)*GDSF(1,J)
          + A12*GDSF(1,I)*GDSF(2,J)
          + A21*GDSF(2,I)*GDSF(1,J)
          + A22*GDSF(2,I)*GDSF(2,J))*CONST
                                               (4.294)
```

但是，如果在同一子程序中要对不同的问题定义单元矩阵，则使用[S]，[S11]…还经济些。

对多变量问题，单元矩阵由子程序自身定义，象式(4.155)，(4.195)及(4.200)一样。这样，节点自由度须重新编号，以减小集合系数矩阵的半带宽。例如，对平面弹性问题的单元方程(4.155)，单元节点变量Δ_i为：

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.295a}$$

因此，对任意节点，自由度的第一次编号与第二次编号的差距为4（一般情况下为n，n为每个单元的节点数），这个差值使得集合系数矩阵的半带宽增加。为纠正这种情况，我们重编节点自由度

如下：

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \vdots \\ \Delta_{2n-1} \\ \Delta_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \nu_1 \\ u_2 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \nu_n \end{Bmatrix} \tag{4.295b}$$

为保持方程的对称性而将节点自由度重新排布需要重新编号每个方程，为表明具体作法，考虑一四元方程组：

$$\begin{aligned} S^{11}_{11}u_1 + S^{11}_{12}u_2 + S^{12}_{11}\nu_1 + S^{12}_{12}\nu_2 &= F^1_1 \\ S^{11}_{21}u_1 + S^{11}_{22}u_2 + S^{12}_{21}\nu_1 + S^{12}_{22}\nu_2 &= F^1_2 \\ S^{21}_{11}u_1 + S^{21}_{12}u_2 + S^{22}_{11}\nu_1 + S^{22}_{12}\nu_2 &= F^2_1 \\ S^{21}_{21}u_1 + S^{21}_{22}u_2 + S^{22}_{21}\nu_1 + S^{22}_{22}\nu_2 &= F^2_2 \end{aligned} \tag{4.296a}$$

用矩阵表达为：

$$\begin{bmatrix} [S^{11}] & [S^{12}] \\ [S^{21}] & [S^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\nu\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \tag{4.296b}$$

假设

$$\Delta_1 = u_1 \quad \Delta_2 = \nu_1 \quad \Delta_3 = u_2 \quad \Delta_4 = \nu_2 \tag{4.297a}$$

重新排列(4.296）方程组可得：

$$\begin{aligned} S^{11}_{11}\Delta_1 + S^{12}_{11}\Delta_2 + S^{11}_{12}\Delta_3 + S^{12}_{12}\Delta_4 &= F^1_1 \\ S^{21}_{11}\Delta_1 + S^{22}_{11}\Delta_2 + S^{21}_{12}\Delta_3 + S^{22}_{12}\Delta_4 &= F^2_1 \\ S^{11}_{21}\Delta_1 + S^{12}_{21}\Delta_2 + S^{11}_{22}\Delta_3 + S^{12}_{22}\Delta_4 &= F^1_2 \\ S^{21}_{21}\Delta_1 + S^{22}_{21}\Delta_2 + S^{21}_{22}\Delta_3 + S^{22}_{22}\Delta_4 &= F^2_2 \end{aligned} \tag{4.297b}$$

或者用矩阵表达为：

$$[S]\{\Delta\} = \{F\} \tag{4.297c}$$

式中

$$\begin{aligned} S_{ij} &= S^{11}_{\alpha\beta} & S_{i,j+1} &= S^{12}_{\alpha\beta} \\ S_{i+1,j} &= S^{21}_{\alpha\beta} & S_{i+1,j+1} &= S^{22}_{\alpha\beta} \\ F_i &= F^1_\alpha & F_{i+1} &= F^2_\alpha \end{aligned} \tag{4.298}$$

$i = 2\alpha - 1 \quad j = 2\beta - 1 \quad \alpha, \beta = 1,2$

以上情况适合于与方程组（4.296)有同形式的方程组。计算机直接进行(4.298）的计算，此过程的一实例〔对应于(4.156）式〕编成以下Fartran语句：

```
C     ------------------------------------------------------------------
C
C     REARRANGEMENT OF ELEMENT EQUATIONS FOR PROBLEMS WITH
C     SEVERAL DEGREES OF FREEDOM PER NODE (SEE EQS. (4.155))
C
C     NPE ..........  NODES PER ELEMENT
C     NDF ..........  NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM PER NODE
C     S(I,J),ETC...  MATRIX DEFINED IN EQN. (4.292)
C     STIF(I,J)......REARRANGED ELEMENT COEFFICIENT MATRIX
C     C(I,J) ........  MATRIX OF MATERIAL CONSTANTS
C     ------------------------------------------------------------------
C
      II=1
      DO 20 I=1,NPE
      JJ=1
      DO 10 J=1,NPE
      STIF(II,JJ)=C(1,1)*S11(I,J)+C(3,3)*S22(I,J)
      STIF(II+1,JJ+1)=C(3,3)*S11(I,J)+C(2,2)*S22(I,J)
      STIF(II,JJ+1)=C(1,2)*S12(I,J)+C(3,3)*S12(J,I)
      STIF(II+1,JJ)=C(1,2)*S12(J,I)+C(3,3)*S12(I,J)
   10 JJ=NDF*J+1
   20 II=NDF*I+1
```

以上 Fortran 语句中采用的变量与前面讨论的变量有相同的意义。

4-8-3 计算机程序FEM2D介绍

本程序FEM2D(见附录II)可用以解决以下问题：

1.热传递问题的稳定和非稳定解，包括对流一类的边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(K_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f$$

2. 4-5-2节平面弹性问题的稳定(即静定)解。

3.引用4-5-3节中的罚函数公式求二维不可压缩液流的稳定与不稳定解(只能用矩形单元)。

第一种类型的问题是十分通用的，作为一特例，它包括如表2.2所示的一些物理问题。后两类问题指线弹性问题及线性(即Stokes)粘性不可压缩液流。在此讲述一些重要变量的含义：

问题类别由变量ITYPE判别：

$$\text{ITYPE}=\begin{cases}2: & \text{粘性液流(用四边形单元)问题}\\ 1: & \text{平面应变问题}\\ 0: & \text{平面应力问题}\\ -1: & \text{热传导或对流类问题}\end{cases}$$

变量ITEM用以区分稳定(ITEM = 0)及不稳定(ITEM = 1)的分析。程序中不包括平面弹性问题的不稳定分析。

单元类型(三角形或四边形)由变量IEL区分：

$$\text{IEL}=\begin{cases}0: & \text{三角形线单元}\\ 1: & \text{四边形线单元}\\ 2: & \text{二次四边形单元}\end{cases}$$

每个单元节点数(NPE)的分类进一步使我们有选择8节点或9节点四边形等参元的余地。

变量IMESH用以表明网格是由子程序*MESH*形成(IMESH = 1)还是读入程序(IMESH = 0)。子程序MESH只能用线性矩形、线性三角形或二次矩形单元(八节点或九节点)离散矩阵域。程序MESH的局部及整体节点编号系统如图4.53。连缀矩阵(数组NOD)

及节点的整体坐标(列向量X和Y)在子程序MESH中形成。

对热传导问题，变量ICONV用以表明是否存在对流边界(存在时ICONV＝1，不存在时ICONV＝0)，当存在对流边界时(也即ICONV＝1)，对流边界将对与其重合的单元的系数矩阵产生影响(见例4.4)。数组IBN用以贮存有对流边界的单元，而数组INOD用来贮存对流边界上的一对单元节点。如果一个单元在对流边界上

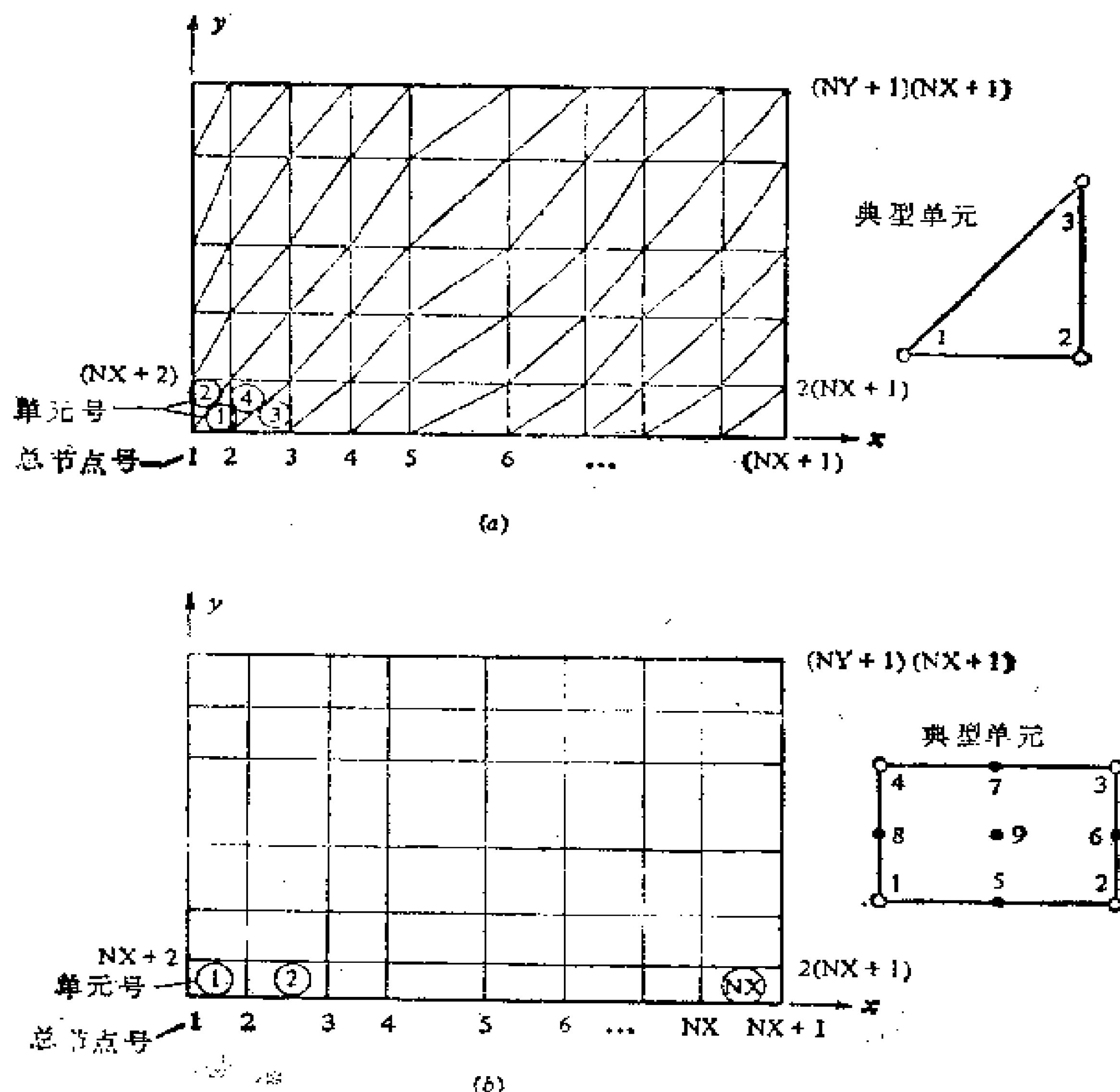


图1.53 由程序MESH而形成的三角形及矩形单元的有限元网格：(a)程序MESH中三角形单元的典型网格；(b)程序MESH中矩形单元的典型网格(结点由左到右、由下到上编号)

表4.14　计算机程序FEM2D的数据输入

列	变量	变量说明
*问题数据卡1	(20A4)	每个求解的问题一张卡，
1～80	TITLE	问题的标题用以标注程序的输出
*问题数据卡2	(16I5)	正确判定每一输入
1～5	IEL	单元类型： IEL＝0，线性三角形单元 IEL＝1，线性四边形单元 IEL＝2，二次四边形单元
6～10	NPE	每个单元的节点数： IEL＝0时　NPE＝3 IEL＝1时　NPE＝4 IEL＝2时　NPE＝8或9
11～15	ITYPE	问题的说明： ITYPE＝－1，热传导及类似问题 ITYPE＝0，平面应力问题 ITYPE＝1，平面应变问题 ITYPE＝2，粘性流问题
16～20	ICONV	对流情况(仅当ITYPF＝－1时需要)： ICONV＝1　有对流 ICONV＝0　无对流
21～25	IMESH	网格形成情况： IMESH＝1　网格由程序形成（只适合于矩形域） IMESH＝0　除上以外情况
26～30	ITEM	瞬时问题情况： ITEM＝1　瞬时分析 ITEM＝0　静态分析
31～35	NPRNT	NPRNT＝1　打印单元矩阵及列向量 NPRNT＝0　不打印单元矩阵及列向量
*问题数据卡3	(16I5)	如果IMESH＝1　则跳过卡3，4及5
1～5	NEM	网格中单元数目
6～10	NNM	网格中节点数目

续表1

列	变　量	变　量　说　明
*问题数据卡4	(16I5)	NEM卡及NPE卡
1～45	NOD(I,J)	连缀矩阵的第I行
*问题数据卡5	(8F10.4)	有 2*NNM 个数，每个卡中有 8 个数
1～80	X(I),Y(I)	节点I的x及y坐标
*问题数据卡6	(16I5)	如IMESH＝0，则跳过6，7及8卡
1～5	NX	x方向上的分段数
6～10	NY	y方向上的分段数
*问题数据卡7		数组DX为IEL*NX＋1个数
和 8	(8F10.4)	数组DY为IEL*NY＋1个数
1～80	DX(I)	沿x方向节点间的距离
1～80	DY(I)	沿y方向节点间的距离
*问题数据卡9	(8F10.4)	取决于ITYPE的常数：
		ITYPE＝－1：K_1，K_2，H，TINF，Q
		ITYPE＝0或1：E1，E2，ANU12，G12，T
		ITYPE＝2：AMU，罚参数
1～10	C1	C1＝K1，E1或AMU
11～20	C2	C2＝K2，E2或罚参数
21～30	C3	C3＝H，ANU12或零
31～40	C4	C4＝TINF，G12或零
41～50	C5	C5＝Q，T或零
*问题数据卡10	(16I5)	对线性单元（IEL＝0，1），如果ITYPE＝－1或包含ICONV＝对流，则跳过10及11卡
1～80	NBF，IBN(I)	单元边与对流边界重合的单元数量（在对流边界上有多少边数就应算多少次）以及有对流单元数的数组
*问题数据卡11	(16I5)	读入NBE对值
1～80	INOD(I,J)	在对流边界上的单元节点数
*问题数据卡12	(16I5)	如果NSDF＝0，则在第 5 列中输入零并跳过13及14卡
1～5	NSDF	给定的初始自由度数目
*问题数据卡13	(16I5)	读入NSDF值，每卡16个

续表2

列	变量	变量说明
1～80	IBDF(I)	给定的自由度
*问题数据卡14	(8F10.4)	读入NSDF值，每卡 8 个
1～80	VBDF(I)	数组IBDF(I)的给定自由度数
*问题数据卡15	(16I5)	如果NSBF＝0，在第 5 列中输入零，并跳过16，17卡
1～5	NSBF	已定的非零次自由度数
*问题数据卡16	(16I5)	读入NSBF值，每单元16个
1～80	IBSF(I)	已定的非零次变量
*问题数据卡17	(8F10.4)	读入NSBF值，每单元 8 个
1～80	VBSF(I)	已定次自由度值
*问题数据卡18	(8F10.4)	如果ITEM＝0，则跳过18和19卡
1～10	DT	瞬态分析的时间间隔
11～20	THETA	时间近似中的参数
21～30	TO	变换分析结束时的最后时间值
*问题数据卡19	(8F10.4)	读入'NEQ'值，每卡 8 个
1～80	GP(I)	有限元法模型的初始未知量的初始条件

的边不只一条，则必须重复其在对流边界上边数同样多的次数。当问题中存在对流边界条件时，在FEM2D程序中必须使用线性单元。

程序FEM2D 的输入变量的全部说明见表4.14，下节中将通过许多例子来说明程序FEM2D的应用。

4-8-4 计算机程序FEM2D的应用

本节中将提供几个FEM2D程序数据输入与输出的例子。为表明程序的能力及可选性，对例题的问题作了选择。程序的主要限制在非矩形域网格的形成上[即数组NOD (I, J)，X(I)及Y (I) 的计算]。对包括非矩形域的问题，要求用户输入网格信息(当采用许多单元时，这可能是件令人讨厌的事)。当然，可以修改程序加入子程序以形成其他任意形式的网格。其它的小的限制（可修改

程序的一部分而克服）已在上节中讨论过。

例4.20（解例4.1的Poisson方程）研究用线性三角形及矩形单元将域离散的问题。

三角形单元 采用图4.45a所示的2×2(即8单元)网格，我们有：

IEL＝0 NPE＝3 ITYPE＝－1 ICONV＝0 IMESH＝1

ITEM＝0 NPRNT＝1

注意，我们选择子程序MESH形成网格，因此，必须确定沿每个方向的段数及其长度：

NX＝2，NY＝2，{DX}＝{0.5,0.5,0.0}

{DY}＝{0.5，0.5,0.0}

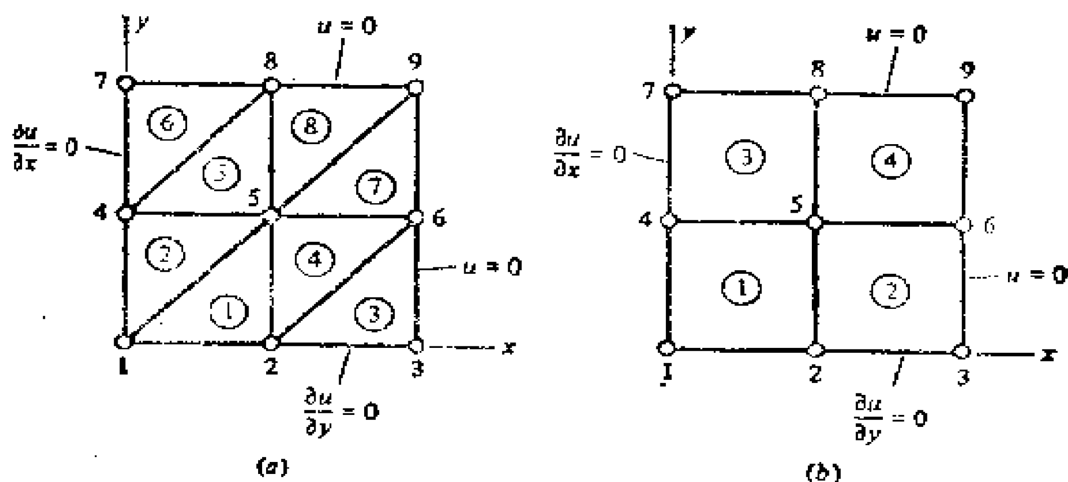


图4.54 例4.20中采用的线性三角形及矩形单元的网格：(a)2×2的三角形网格；(b)2×2的矩形网格

微分方程的系数K_1和K_2及源项Q的值均等于1：

C1(＝K1)＝1.0 C2(＝K2)＝1.0 C5(＝Q)＝1.0 C3(＝H)

及C4(＝TINF)均为零(无对流)，规定的初始自由度给出如下：

$U_3 = U_6 = U_7 = U_8 = U_9 = 0$

因而有：

NSDF＝5 {IBDF}＝{3,6,7,8,9} {VBDF}＝{0,0,0,0,0}

NSBF之值为零，因为问题中没有规定非零力。这就完成了三角形

单元情况下的数据形成工作，输入及输出数据的打印结果如表4.15所示。

矩形单元　采用2×2网格的矩形单元（共4个单元，见图4.54*b*)、输入数据只有单元类型及每个单元的结点数不同。

IEL＝1　　NPE＝4

输入数据的打印及程序输出结果如表4.16示。 ∎

例4.21(例4.2的圆柱体流)　由于域不是矩形，故须读入数组NOD(I,J)，X(I)及Y(I)，选取例4.2中采用的15个单元的三角形网格，则有(看图4.12*a*)：

IEL＝0　NPE＝3　ITYPE＝－1　ICONV＝0

IMESH＝0　ITEM＝0　NPRINT＝0　NEM＝15

NNM＝14　$C_1 = C_2 = 1.0$　$C_3 = C_4 = C_5 = 0.0$

表4.15 例4.20中程序FEM2D对三角形单元网格的输入及输出数据

```
SOLUTION OF THE POISSON EQUATION OF EXAMPLE 4.1 (TRIANGLES)
   0     3    -1     0     1     0     1
   2     2
  0.5         0.5
  0.5         0.5
  1.0         1.0         0.0         0.0         1.0
   5
   3     6     7     8     9
  0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
   0
```

```
   H E A T   T R A N S F E R   T Y P E   P R O B L E M
 SOLUTION OF THE POISSON EQUATION OF EXAMPLE 4.1 (TRIANGLES)
           ELEMENT TYPE................................=  0
           PROBLEM TYPE................................= -1
           CONVECTION (0:NO, 1:YES) ...................=  0
           PARAMETERS, C1, C2, C3, C4, AND C5:
                 C1 = 0.100D+01
                 C2 = 0.100D+01
                 C3 = 0.0
                 C4 = 0.0
                 C5 = 0.100D+01
```

```
        ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH ...=  8
        NUMBER OF NODES IN THE MESH.............=  9
        TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL...=  9
COORDINATES OF THE GLOBAL NODES:
 0.0         0.0          0.50000D+00  0.0          0.10000D+01  0.0
 0.0         0.50000D+00  0.50000D+00  0.50000D+00  0.10000D+01  0.50000D+00
 0.0         0.10000D+01  0.50000D+00  0.10000D+01  0.10000D+01  0.10000D+01

 BOOLEAN (CONNECTIVITY) MATRIX NOD(I,J)
        1    1    2    5
        2    1    5    4
        3    2    3    6
        4    2    6    5
        5    4    5    8
        6    4    8    7
        7    5    6    9
        8    5    9    8
 NO. OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM..........=  5
 ARRAY OF THE SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM=   3  6  7  8  9
 HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MATRIX=  5
ELEMENT MATRICES:
 0.50000D+00   -0.50000D+00   0.0
-0.50000D+00    0.10000D+01  -0.50000D+00
```

```
0.0              -0.50000D+00     0.50000D+00
SOLUTION VECTOR:
0.31250D+00     0.22917D+00     0.0              0.22917D+00     0.17708D+00     0.0
0.0              0.0              0.0
THE ANGLE IS DEFINED TO BE THE ARC TANGENT OF Y-COMPONENT DIVIDED BY THE X-COMPONENT
ELE. NO.  X-COMPONENT       Y-COMPONENT       MAGNITUDE        ANGLE
   1      -0.166667D+00     -0.104167D+00     0.196541D+00     -0.147995D+03
   2      -0.104167D+00     -0.166667D+00     0.196541D+00     -0.122005D+03
   3      -0.458333D+00      0.0              0.458333D+00      0.180000D+03
   4      -0.354167D+00     -0.104167D+00     0.369168D+00     -0.163610D+03
   5      -0.104167D+00     -0.354167D+00     0.369168D+00     -0.106390D+03
   6       0.0              -0.458333D+00     0.458333D+00     -0.900000D+02
   7      -0.354167D+00      0.0              0.354167D+00      0.180000D+03
   8       0.0              -0.354167D+00     0.354167D+00     -0.900000D+02
```

表4.16　　例4.20中程序FEM2D对三角形单元网格的输入及输出数据

```
SOLUTION OF THE POISSON EQUATION OF EXAMPLE 4.1 (4-NODE RECTANGLES)
   1     4   -1     0     1     0     1
   2     2
0.5      0.5
0.5      0.5
1.0      1.0      0.0      0.0      1.0
   5
```

```
   3      6     7      8      9
0.0      0.0       0.0       0.0       0.0
   0
.........................................................................................
  H E A T  T R A N S F E R  T Y P E  P R O B L E M
SOLUTION OF THE POISSON EQUATION OF EXAMPLE 4.1 (4-NODE RECTANGLES)
          ELEMENT TYPE............................................ =  1
          PROBLEM TYPE............................................ = -1
          CONVECTION  (0:NO, 1:YES) .............................. =  0
          PARAMETERS, C1, C2, C3, C4, AND C5:
                C1 = 0.100D+01
                C2 = 0.100D+01
                C3 = 0.0
                C4 = 0.0
                C5 = 0.100D+01
          ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH...... =  4
          NUMBER OF NODES IN THE MESH ............... =  9
          TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL ... =  9
COORDINATES OF THE GLOBAL NODES:
 0.0          0.0           0.50000D+00   0.0           0.10000D+01   0.0
 0.0          0.50000D+00   0.50000D+00   0.50000D+00   0.10000D+01   0.50000D+00
 0.0          0.10000D+01   0.50000D+00   0.10000D+01   0.10000D+01   0.10000D+01

 BOOLEAN (CONNECTIVITY) MATRIX NOD(I,J)
```

```
      1      1      2      5      4
      2      2      3      6      5
      3      4      5      8      7
      4      5      6      9      8
 NO. OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM.............. =  5
 ARRAY OF THE SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM=   3   6   7   8   9
 HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MATRIX- 5
ELEMENT MATRICES:
  0.66667D+00   -0.16667D+00   -0.33333D+00   -0.16667D+00
 -0.16667D+00    0.66667D+00   -0.16667D+00   -0.33333D+00
 -0.33333D+00   -0.16667D+00    0.66667D+00   -0.16667D+00
 -0.16667D+00   -0.33333D+00   -0.16667D+00    0.66667D+00
SOLUTION VECTOR:
  0.31071D+00   0.24107D+00   0.0          0.24107D+00   0.19286D+00   0.0
  0.0           0.0           0.0
THE ANGLE IS DEFINED TO BE THE ARC TANGENT OF Y-COMPONENT DIVIDED BY THE X-COMPONENT
 ELE. NO.   X-COMPONENT      Y-COMPONENT      MAGNITUDE       ANGLE
   1       -0.117857D+00    -0.117857D+00    0.166675D+00    -0..35000D+03
   2       -0.433929D+00    -0.482143D-01    0.436599D+00    -0.173660D+03
   3       -0.482143D-01    -0.433929D+00    0.436599D+00    -0.963402D+02
   4       -0.192857D+00    -0.192857D+00    0.272741D+00    -0.135000D+03
```

数组NOD由式(4.77)而得，X(I)及Y(I)之值如下：

$\{X\}=\{0.0, 0.0, 0.0, 1.5, 1.5, 1.5, 3.0, 3.0, 3.0,$
$3.5, 3.5, 4.0, 4.0, 4.0\}$

$\{Y\}=\{0.0, 1.0, 2.0, 0.0, 1.0, 2.0, 0.0, 1.0, 2.0,$
$1.0, 1.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$

规定的初始自由度（在流函数方程中）由式（4.78）给出，本问题不包括规定的非零的次自由度，故有：

$NSDF=10 \quad \{IBDF\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 14\}$

$\{VBDF\}=\{0.0, 1.0, 2.0, 0.0, 2.0, 0.0, 2.0, 0.0, 0.0, 2.0\}$

$NSBF=0$

数据的形成以上就完成了。输入数据的打印及程序的输出见表4.17。

应该指出，域可采用四边形单元进行离散。为说明这一点，我们研究一个线性四边形单元的网格（图4.55），除节点7、8及9以外该网格与三角形单元接近一致，其它节点的位置与图4.12所示节点的位置一致，故有：

$IEL=1 \quad NPE=4 \quad NEM=8 \quad NNM=15$

$$[NOD]=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 5 \\ 5 & 8 & 9 & 6 \\ 7 & 10 & 11 & 8 \\ 8 & 11 & 12 & 9 \\ 11 & 13 & 14 & 12 \\ 12 & 14 & 15 & 9 \end{bmatrix} \quad \{X\}=\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 3.0 \\ 3.5 \\ 3.5 \\ 4.0 \\ 4.0 \\ 4.0 \end{Bmatrix} \{Y\}=\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \end{Bmatrix}$$

NSDF = 11 $\{IBDF\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15\}$
$\{VBDF\} = \{0.0, 1.0, 2.0, 0.0, 2.0, 0.0, 2.0,$
$0.0, 0.0, 0.0, 2.0\}$ NSBF = 0

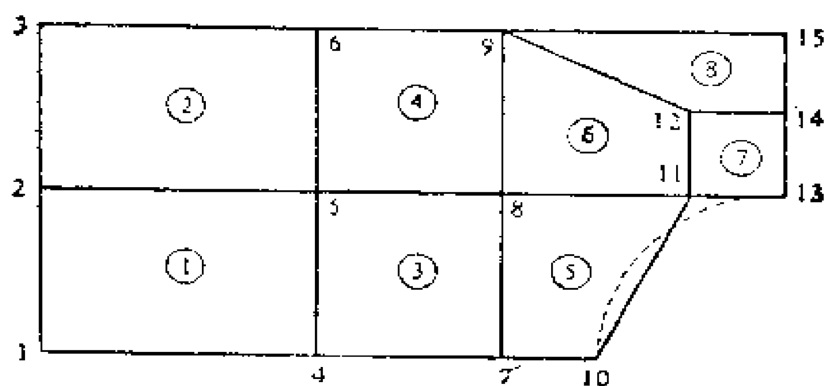


图4.55 圆柱流体的四边形单元网格(例4.21)

表4.17 例4.21中问题的输入及输出数据(采用三角形单元网格)

```
FLOW ABOUT A CIRCULAR CYLINDER BY STREAM FUNCTION FORMULATION (TRIANGLES)
   0      3     -1      0      0      0      0
  15     14
   1      4      5
   1      5      2
   2      5      6
   2      6      3
   4      7      8
   4      8      5
   5      8      9
   5      9      6
   7     10      8
   8     10     11
   8     11      9
  11     14      9
  10     12     11
  12     13     11
  11     13     14
 0.0    0.0    0.0    1.0    0.0    2.0    1.5    0.0
 1.5    1.0    1.5    2.0    3.0    0.0    3.0    1.0
 3.0    2.0    3.5    1.0    3.5    1.5    4.0    1.0
```

```
4.0       1.5       4.0       2.0
1.0       1.0       0.0       0.0       0.0
 10
  1    2    3    4    6    7    9   10   12   14
0.0       1.0       2.0       0.0       2.0       0.0       2.0       0.0
0.0       2.0
  0
```

H E A T T R A N S F E R T Y P E P R O B L E M

FLOW ABOUT A CIRCULAR CYLINDER BY STREAM FUNCTION FORMULATION (TRIANGLES)

```
        ELEMENT TYPE.................................. =  0
        PROBLEM TYPE.................................. = -1
        CONVECTION (0:NO, 1:YES) ..................... =  0
PARAMETERS, C1, C2, C3, C4, AND C5:
        C1 = 0.100D+01
        C2 = 0.100D+01
        C3 = 0.0
        C4 - 0.0
        C5 = 0.0
ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH......... =  15
NUMBER OF NODES IN THE MESH .................. =  14
TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL ....... =  14
COORDINATES OF THE GLOBAL NODES ("DELETED IN THE OUTPUT")
```

```
BOOLEAN CONNECTIVITY MATRIX (*DELETED IN THE OUTPUT*)
 NO. OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM............... = 10
 ARRAY OF THE SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM   1  2  3  4  6  7  9  10  12  14
 HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MATRIX =  6
SOLUTION VECTOR:
  0.0            0.10000D+01   0.20000D+01   0.0      0.93913D+00   0 20000D+01
  0.0            0.60436D+00   0.20000D+01   0.0      0.10863D+01   0.0
  0.10432D+01    0.20000D+01
THE ANGLE IS DEFINED TO BE THE ARC TANGENT OF Y-COMPONENT DIVIDED BY THE X-COMPONENT
```

ELE. NO.	X-COMPONENT	Y-COMPONENT	MAGNITUDE	ANGLE
1	0.0	0.939132D+00	0.939132D+00	0.900000D+02
2	-0.405785D-01	0.100000D+01	0.100082D+01	0.923237D+02
3	-0.405785D-01	0.106087D+01	0.106164D+01	0.921905D+02
4	0.0	0.100000D+01	0.100000D+01	0.900000D+02
5	0.0	0.604360D+00	0.604360D+00	0.900000D+02
6	-0.223182D+00	0.939132D+00	0.965287D+00	0.103368D+03
7	-0.223182D+00	0.139564D+01	0.141337D+01	0.990854D+02
8	0.0	0.106087D+01	0.106087D+01	0.900000D+02
9	-0.120872D+01	0.604360D+00	0.135139D+01	0.153435D+03
10	-0.120872D+01	0.217267D+01	0.248627D+01	0.119088D+03
11	-0.431686D+00	0.139564D+01	0.146088D+01	0.107187D+03
12	0.0	0.182733D+01	0.182733D+01	0.900000D+02
13	0.0	0.217267D+01	0.217267D+01	0.900000D+02
14	-0.86337_D-01	0.208634D+01	0.208812D+01	0.923696D+02
15	-0.863371D-01	0.191366D+01	0.191561D+01	0.925832D+02

程序的输入及输出数据见表4.18，注意，用四边形单元所得到的解与用三角形单元所得到的解是一致的。

例4.22（例4.4的开孔板的热传递） 除以下变量以外，其余数据与例4.21所讨论的数据一样：

ICONV = 1　C1 = C2 = 10.0　C3 = 15.0　C4 = 473.0

C5 = 0.0　{VBDF} = {293.0,293.0,293.0,293.0,293.0,293.0}

NSBF = 0

三角形单元网格（见图4.12a）

NBE = 2　{IBN} = {9,13}　{INOD} = {1,2;1,2},

NSDF = 6　{IBDF} = {1,2,3,6,9,14}

矩形单元网格（见图4.55）

NBE = 2　{IBN} = {5,7}　{INOD} = {2,3;1,2}

NSDF = 6　{IBDF} = {1,2,3,6,9,15}

表4.19包括三角形单元网格的输入数据和输出数据。

例4.23（例4.8的平面弹性问题） 在此考虑三角形及矩形两种网格（见图4.56）。

三角形单元 采用1×1（2个单元）的网格，且设IMESH = 1，NX = NY = 1，故有：

IEL = 0　NPE = 3　ITYPE = 0(plane stress)　ICONV = 0

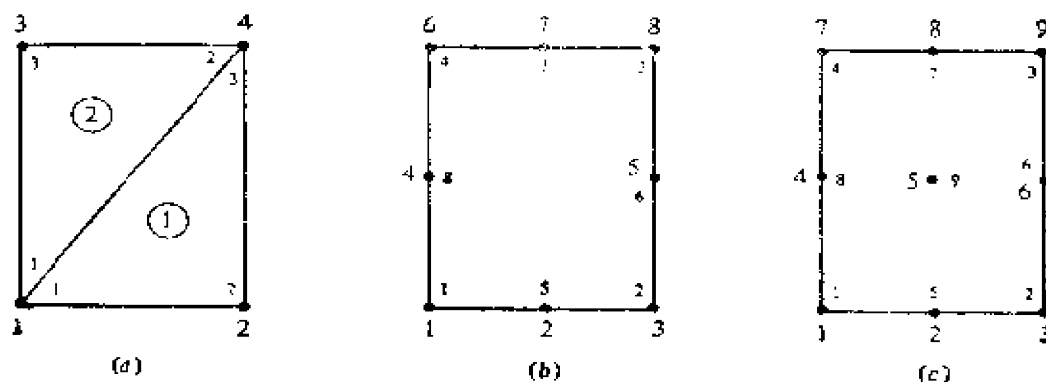


图4.56 例4.23中所讨论的平面弹性问题的各种有限元网格：(a)线单元；(b)8节点单元；(c)9节点单元

IMESH = 1

C1 = C2 = 3000(10^4) C3 = 0.25 C4 = 1200(10^4) C5 = 0.036

NSDF = 4 {IBDF} = {1,2,5,6} {VBDF} = {0.0,0.0,0.0,0.0}

NSBF = 2 {IBSF} = {3,7} {VBSF} = {800.0,800.0}

线性矩形元　采用1×1的网格时，除IEL = 1及 NPE = 4外，其余输入数据同上。

表4.18　　例4.21中问题的输入及输出数据(四边形单元)

```
FLOW ABOUT A CIRCULAR CYLINDER (MESH OF FOUR-NODE QUADRILATERAL ELEMENTS)
 1     4    -1     0  ,  0     0     0
 8    15
 1     4     5     2
 2     5     6     3
 4     7     8     5
 5     8     9     6
 7    10    11     8
 8    11    12     9
11    13    14    12
12    14    15     9
0.0      0.0      0.0      1.0      0.0      2.0      1.5      0.0
1.5      1.0      1.5      2.0      2.5      0.0      2.5      1.0
2.5      2.0      3.0      0.0      3.5      1.0      3.5      1.5
4.0      1.0      4.0      1.5      4.0      2.0
1.0      1.0      0.0      0.0      0.0
 11
 1    2    3    4    6    7    9   10   11   13   15
0.0      1.0      2.0      0.0      2.0      0.0      2.0      0.0
0.0      0.0      2.0
 0
```

```
HEAT TRANSFER TYPE PROBLEM
FLOW ABOUT A CIRCULAR CYLINDER (MESH OF FOUR-NODE QUADRILATERAL ELEMENTS)
          ELEMENT TYPE.............................................. =  1
          PROBLEM TYPE.............................................. = -1
          CONVECTION (0:NO, 1:YES).................................. =  0
          PARAMETERS, C1, C2, C3, C4, AND C5:
             C1 = 0.100D+01
             C2 = 0.100D+01
             C3 = 0.0
             C4 = 0.0
             C5 = 0.0
          ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH ....  =   8
          NUMBER OF NODES IN THE MESH................  =  15
          TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL....     15
COORDINATES OF THE GLOBAL NODES (*NOT INCLUDED HERE*)
BOOLEAN (CONNECTIVITY) MATRIX NOD(I,J) (*NOT INCLUDED HERE*)
 NO. OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM.............. =  11
 ARRAY OF THE SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM =   1   2   3   4   6   7   9  10  11  13
       15
 HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MATRIX =   7
SOLUTION VECTOR:
0.0          0.10000D+01   0.20000D+01   0.0          0.98123D+00   0.20000D+01
0.0          0.84356D+00   0.20000D+01   0.0          0.0           0.11260D+01
```

0.0 0.104[illegible]D+01 0.2[illegible]D+01

THE ANGLE IS DEFINED TO BE THE ARC TANGENT OF Y-COMPONENT DIVIDED BY THE X-COMPONETN

ELE.NO.	X-COMPONENT	Y-COMPONENT	MAGNITUDE	ANGLE
1	-0.625750D-02	0.999614D+00	0.999634D+00	0.903619D+02
2	-0.625750D-02	0.100939D+01	0.100941D+01	0.903552D+02
3	-0.688325D-01	0.912395D+00	0.914988D+00	0.943143D+02
4	-0.688325D-01	0.108761D+01	0.108978D+01	0.936213D+02
5	-0.562375D+00	0.562373D+00	0.795318D+00	0.135000D+03
6	-0.478351D+00	0.152165D+01	0.159507D+01	0.107451D+03
7	-0.823596D-01	0.216971D+01	0.217127D+01	0.921738D+02
8	-0.411796D-01	0.178911D+01	0.178958D+01	0.913185D+02

表4.19 例4.22中热传递问题的输入及输出数据(三角形单元)

```
CONVECTION HEAT TRANSFER IN A PLATE WITH HOLE (TRIANGLES)
  0    3   -1    1    0    0    0
 15   14
  1    4    5
  1    5    2
  2    5    6
  2    6    3
  4    7    8
  4    8    5
  5    8    9
  5    9    6
```

```
 7     10     8
 8     10    11
 8     11     9
11     14     9
10     12    11
12     13    11
11     13    14
0.0        0.0       0.0       1.0       0.0       2.0       1.5       0.0
1.5        1.0       1.5       2.0       3.0       0.0       3.0       1.0
3.0        2.0       3.5       1.0       3.5       1.5       4.0       1.0
4.0        1.5       4.0       2.0
10.0       10.0      15.0      473.0     0.0
2     9     13
1     2     1     2
6
1     2     3     6     9     14
293.0      293.0     293.0     293.0     293.0     293.0
0
```

```
H E A T   T R A N S F E R   T Y P E   P R O B L E M
CONVECTION HEAT TRANSFER IN A PLATE WITH HOLE (TRIANGLES)
          ELEMENT TYPE.................................. =  0
          PROBLEM TYPE.................................. = -1
```

```
CONVECTION (0:NO, 1:YES).................................. =  1
PARAMETERS, C1, C2, C3, C4, AND C5
     C1 = 0.100D+02
     C2 = 0.100D+02
     C3 = 0.150D+02
     C4 = 0.473D+03
     C5 = 0.0
ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH... =  15
NUMBER OF NODES IN THE MESH ............ =  14
TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL.. =  14
CONVECTIVE BOUNDARY DATA: NBE........... =  2
ARRAY IBN:      9      13
COORDINATES OF THE GLOBAL NODES (*NOT INCLUDED HERE*)
BOOLEAN (CONNECTIVITY) MATRIX NOD(I,J) (*NOT INCLUDED HERE*)
 NO. OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM......... =  6
 ARRAY OF THE SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM =   1   2   3   6   9   14
 HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MATRIX =  6
SOLUTION VECTOR:
 0.29300D+03  0.29300D+03  0.29300D+03  0.32332D+03  0.31345D+03  0.29300D+03
 0.39802D+03  0.35774D+03  0.29300D+03  0.39979D+03  0.33719D+03  0.39508D+03
 0.34062D+03  0.29300D+03
THE ANGLE IS DEFINED TO BE THE ARC TANGENT OF Y-COMPONENT DIVIDED BY THE X-COMPONENT
  ELE.NO.  X-COMPONENT    Y-COMPONENT     MAGNITUDE     ANGLE
```

1	0.202111D+03	-0.986267D+02	0.224892D+03	-0.260115D+02
2	0.136360D+03	0.0	0.136360D+03	0.0.
3	0.136360D+03	-0.204540D+03	0.245827D+03	-0.563099D+02
4	0.0	0.0	0.0	-0.563099D+02
5	0.497991D+03	-0.402767D+03	0.640482D+03	-0.389653D+02
6	0.295231D+03	-0.986267D+02	0.311269D+03	-0.184727D+02
7	0.295231D+03	-0.647387D+03	0.711528D+03	-0.654853D+02
8	0.0	-0.204540D+03	0.204540D+03	-0.900000D+02
9	0.640973D+03	-0.402767D+03	0.757013D+03	-0.321439D+02
10	0.640973D+03	-0.105188D+04	0.123178D+04	-0.586434D+02
11	0.236485D+03	-0.647387D+03	0.689228D+03	-0.699332D+02
12	0.0	-0.883872D+03	0.883872D+03	-0.900000D+02
13	0.105918D+03	-0.105188D+04	0.105720D+04	-0.842500D+02
14	0.684804D+02	-0.108931D+04	0.109146D+04	-0.864028D+02
15	0.684804D+02	-0.952352D+03	0.954811D+03	-0.858871D+02

八节点矩形单元　对于1×1的网格（见图4.56b），输入数据的变化为：

IEL = 2　NPE = 8　NSDF = 6　{IBDF} = {1,2,7,8,11,12}

{VBDF} = {0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0}　NSBF = 3

{IBSF} = {5,9,15}　{VBSF} = {266.67,1066.67, 266.67}

九节点矩形单元　对于1×1的网格(见图4.56c)，输入数据的改变为：

IEL = 2　NPE = 9　NSDF = 6　{IBDF} = {1,2,7,8,13,14}

{VBDF} = {0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0}　NSBF = 3

{IBSF} = {5,11,17}　{VBSF} = {266.67,1066.67, 266.67}

以上四种情况的输入数据见表4.20，每种情况的输出见表4.21。

例4.24(例4.11所示的两平行板间的粘性流体的挤压)　对线性矩形单元的10×6不规则网格及与之等价的9节点5×3的不规则的网格建立数据，对两种网格，大多数的数据是一样的，我们有：

ITYPE = 2　ICONV = 0　IMESH = 1　C1 = 0

C2 = 1.0×(10^8)和

线单元

IEL = 1　NPE = 4　NX = 10　NY = 6

9节点单元

IEL = 2　NPE = 9　NX = 5　NY = 3

剩下的数据对两种网格均一样。分段坐标、标定的边界自由度以及规定的值在表4.22及4.23的输入数据中已给出，读者应校核在指定的自由度下的数据，将输出数据的一部分选出来也列于表4.22及4.23中。

例4.25(滑动轴承中粘性润滑液流)　滑动轴承由一以速度$u = \overline{U}_0$运动的短滑动块组成，此滑块与固定的滑块有关，而此固定的滑块又有一小的倾斜角。两滑块间的小间隙填以润滑油（见图4.58），由于轴承两端一端是闯开的，因而存在大气压力p_0，如上部滑块与底板平行，那么间隙内每一处的压力均为大气压（因为对平行板间的流体而言dp/dx是连续的)，轴承不能承受任何横

向荷载。如上部滑块与底板斜交，则在间隙间有压力的增加（通常为x，y的函数），由于U_0值很大，产生的压力足以承受与底部滑块垂直的重的荷载。

表4.20　　例4.23中平面弹性问题对各种网格的输入数据

```
PLANE ELASTICITY PROBLEM OF EXAMPLE 4.8 (MESH OF 2 TRIANGULAR ELEMENTS)
    0     3     0     0     1     0     1
    1     1
120.0
160.0
3000.0    3000.0    0.25      1200.0    0.036
    4
    1     2     5     6
0.0       0.0       0.0       0.0
    2
    3     7
800.0     800.0
```

```
PLANE ELASTICITY PROBLEM OF EXAMPLE 4.8 (MESH OF ONE FOUR-NODE ELEMENT)
    1     4     0     0     1     0     1
    1     1
120.0
160.0
3000.0    3000.0    0.25      1200.0    0.036
    4
    1     2     5     6
0.0       0.0       0.0       0.0
```

```
    2
    3     7
800.0     800.0
.............................................................................................................
PLANE ELASTICITY PROBLEM OF EXAMPLE 4.8 (MESH OF ONE EIGHT-NODE ELEMENT)
    2     8     0     0     1     0     0
    1     1
60.0      60.0
80.0      80.0
3000.0    3000.0    0.25      1200.0    0.036
    6
    1     2     7     8     11    12
0.0       0.0       0.0       0.0       0.0       0.0
    3
    5     9     15
266.66667 1066.6667 266.66667
.............................................................................................................
PLANE ELASTICITY PROBLEM OF EXAMPLE 4.8 (MESH OF ONE NINE-NODE ELEMENT)
    2     9     0     0     1     0     0
    1     1
60.0      60.0
80.0      80.0
3000.0    3000.0    0.25      1200.0    0.036
```

```
6
1      2      7      8      13      14
0.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0
3
5      11      17
266.66667, 1066.6667   266.66667
```

表4.21　　例4.23中平面弹性问题的输出数据

```
A P L A N E  E L A S T I C I T Y  O R  F L U I D  F L O W  P R O B L E M
PLANE ELASTICITY PROBLEM OF EXAMPLE 4.8 (*EDITED*)
          ELEMENT TYPE..................................... =  0
          PROBLEM TYPE..................................... =  0
          CONVECTION (0:NO, 1:YES) ........................ =  0
          MODULUS OF ELASTICITY, E1 ....................... =  0.300D+04
          MODULUS OF ELASTICITY, E2 ....................... =  0.300D+04
          POISSONS RATIO, ANU12 ........................... =  0.250D+00
          SHEAR MODULUS, G12 .............................. =  0.120D+04
          PLATE THICKNESS, T............................... =  0.250D-01
          ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH............ =  2
          NUMBER OF NODES IN THE MESH ..................... =  4
          TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL........... =  8
*EDITED OUTPUT FOR VARIOUS MESHES*:
.................................................................
SOLUTION VECTOR (FOR TWO TRIANGULAR ELEMENTS):
```

```
  1     0.0           0.0                              2     0.11291D+02     0.19637D+01
  3     0.0           0.0                              4     0.10113D+02    -0.10800D+01
   ELE.NO.  STRESS, SXX    STRESS, SYY    STRESS,SXY     PRESSURE
      1     0.106274D+02   0.186156D+01    0.388807D+00
      2     0.970839D+01   0.242710D+01   -0.388807D+00
..........................................................................................
 SOLUTION VECTOR (FOR ONE FOUR-NODE ELEMENT):
  1     0.0           0.0                              2     0.10853D+02     0.23256D+01
  3     0.0           0.0                              4     0.10853D+02    -0.23256D+01

THE ANGLE IS DEFINED TO BE THE ARC TANGENT OF Y-COMPONENT DIVIDED BY THE X-COMPONENT
 ELE.NO.  STRESS, SXX    STRESS, SYY    STRESS,SXY     PRESSURE
    1     0.100000D+02   0.930233D+00   0.374700D-15
..........................................................................................
 SOLUTION VECTOR (FOR ONE EIGHT-NODE ELEMENT):
  1     0.0               0.0                          2     0.55212D+01     0.15949D+01
  3     0.11222D+02       0.19144D+01                  4     0.0             0.0
  5     0.10792D+02       0.64632D-14                  6     0.0             0.0
  7     0.55212D+01       0.15949D+01                  8     0.11222D+02    -0.19144D+01
 ELE.NO.  STRESS, SXX    STRESS, SYY    STRESS,SXY     PRESSURE
    1     0.978584D+01   0.293298D+00   0.528179D-15
..........................................................................................
 SOLUTION VECTOR (FOR ONE NINE-NODE ELEMENT):
  1     0.0               0.0                          2     0.56874D+01     0.16464D+01
```

```
  3      0.10988D+02      0.19156D+01             4      0.0            0.0
  5      0.52326D+01      0 35043D-14             6      0.10928D+02    0.10333D-13
  7      0.0              0.0                     8      0.56874D+01   -0.16464D+01
  9      0.10988D+02     -0.10156D+01
ELE,NO.  STRESS, SXX      STRESS, SYY      STRESS,SXY      PRESSURE
  1      0.989831D+01   0.251914D+00    0.154646D-14
```

表4.22　　例4.24中液流问题的输入及输出数据（采用四节点单元网格）

```
FLUID SQUEEZED BETWEEN TWO PARALLEL PLATES (FOUR-NODE QUADRILATERALS)
  1    4    2    0    1    0    0
 10    6
1.0        1.0          1.0        1.0        0.5        0.5        0.25        0.25
0.25       0.25
0.25       0.25         0.5        0.5        0.25       0.25
1.0        1.0
 39
  1     2     4     6     8    10    12    14    16    18    20    22    23    45    67    89
111   133   134   135   136   137   138   139   140   141   142   143   144   145   146   147
148   149   150   151   152   153   154
0.0
0.0
0.0        0.0        -1.0        0.0        -1.0        0.0        -1.0        0.0
-1.0       0.0        -1.0        0.0        -1.0        0.0        -1.0        0.0
-1.0       0.0        -1.0        0.0        -1.0        0.0        -1 0
```

0

EDITED OUTPUT

FLUID SQUEEZED BETWEEN TWO PARALLEL PLATES (FOUR-NODE QUADRILATERALS)

ELEMENT TYPE .... = 1
PROBLEM TYPE .... = 2
CONVECTION (0:NO, 1:YES) .... = 0
VISCOSITY .... = 0.100D+01
PENALTY PARAMETER .... = 0.100D+09
ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH ... = 60
NUMBER OF NODES IN THE MESH .... = 77
TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL... = 154

SOLUTION VECTOR:

Node			Node		
1	0.0	0.0	2	0.75757D+00	0.0
3	0.15135D+01	0.0	4	0.22756D+01	0.0
5	0.30541D+01	0.0	6	0.34648D+01	0.0
7	0.38517D+01	0.0	8	0.40441D+01	0.0
9	0.41712D+01	0.0	10	0.42654D+01	0.0
11	0.42549D+01	0.0	12	0.0	-0.18723D+00
13	0.74517D+00	-0.18845D+00	14	0.14911D+01	-0.18702D+00
15	0.22376D+01	-0.19[illegible]11D+00	16	0.30074D+01	-0.19694D+00
17	0.33984D+01	-0.20392D+00	18	0.37996D+01	-0.19019D+00
19	0.39630D+01	-0.16554D+00	20	0.41242D+01	-0.12273D+00

21	0.41986D+01	−0.45920D−01	22	0.42127D+01	0.42277D−01
23	0.0	−0.37101D+00	24	0.71032D+00	−0.36855D+00
25	0.14191D+01	−0.37061D+00	26	0.21323D+01	−0.37145D+00
27	0.28526D+01	−0.38812D+00	28	0.32306D+01	−0.39724D+00
29	0.35954D+01	−0.37990D+00	30	0.37883D+01	−0.33212D+00
31	0.39177D+01	−0.24673D+00	32	0.40379D+01	−0.11653D+00
33	0.40360D+01	0.10072D+00	34	0.0	−0.68763D+00
35	0.56777D+00	−0.69097D+00	36	0.11370D+01	−0.68718D+00
37	0.17018D+01	−0.69387D+00	38	0.22655D+01	−0.70773D+00
39	0.25388D+01	−0.72891D+00	40	0.28391D+01	−0.71331D+00
41	0.29831D+01	−0.67262D+00	42	0.31732D+01	−0.54507D+00
43	0.32932D+01	−0.29879D+00	44	0.34093D+01	0.54762D−01
45	0.0	−0.91552D+00	46	0.33163D+00	−0.91281D+00
47	0.66267D+00	−0.91545D+00	48	0.99380D+00	−0.91356D+00
49	0.13051D+01	−0.92558D+00	50	0.14526D+01	−0.93184D+00
51	0.15839D+01	−0.94193D+00	52	0.16782D+01	−0.92065D+00
53	0.17826D+01	−0.88595D+00	54	0.20237D+01	−0.68019D+00
55	0.21793D+01	−0.10719D+00	56	0.0	−0.97396D+00
57	0.17749D+00	−0.98167D+00	58	0.35548D+00	−0.97384D+00
59	0.53189D+00	−0.98206D+00	60	0.69794D+00	−0.97643D+00
61	0.76680D+00	−0.98914D+00	62	0.82738D+00	−0.98056D+00
63	0.84894D+00	−0.99788D+00	64	0.89343D+00	−0.95763D+00
65	0.98981D+00	−0.94599D+00	66	0.15183D+01	−0.52550D+00

```
 67  0.0         -0.10000D+01        68  0.0         -0.10000D+01
 69  0.0         -0.10000D+01        70  0.0         -0.10000D+01
 71  0.0         -0.10000D+01        72  0.0         -0.10000D+01
 73  0.0         -0.10000D+01        74  0.0         -0.10000D+01
 75  0.0         -0.10000D+01        76  0.0         -0.10000D+01
 77  0.0         -0.10000D+01
```

表4.23 例4.24中液流问题的输入及输出数据（采用四节点单元网格）

```
FLUID SQUEEZED BETWEEN TWO PARALLEL PLATES (NINE-NODE QUADRILATERALS)
   2    9     2     0     1     0     0
   5    3
1.0       1.0       1.0       1.0       0.5       0.5       0.25      0.25
0.25      0.25
0.25      0.25      0.5       0.5       0.25      0.25
1.0       1.0
  39
   1    2    4    6    8   10   12   14   16   18   20   22   23   45   67   89
 111  133  134  135  136  137  138  139  140  141  142  143  144  145  146  147
 148  149  150  151  152  153  154
0.0
0.0
0.0       0.0      -1.0       0.0      -1.0       0.0      -1.0       0.0
-1.0      0.0      -1.0       0.0      -1.0       0.0      -1.0       0.0
-1.0      0.0      -1.0       0.0      -1.0       0.0      -1.0
```

```
0
***EDITED OUTPUT***
FLUID SQUEEZED BETWEEN TWO PARALLEL PLATES (NINE-NODE QUADRILATERALS)
      ELEMENT TYPE.............................................. = 2
      PROBLEM TYPE.............................................. = 2
      CONVECTION (0:NO, 1:YES).................................. = 0
      VISCOSITY ................................................ = 0.100D+01
      PENALTY PARAMETER......................................... = 0.100D+09
      ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH ... = 15
      NUMBER OF NODES IN THE MESH ..................... = 77
      TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL ... = 154

SOLUTION VECTOR
  1  0.0          0.0            2  0.75047D+00  0.0
  3  0.14992D+01  0.0            4  0.22557D+01  0.0
  5  0.30233D+01  0.0            6  0.34307D+01  0.0
  7  0.38029D+01  0.0            8  0.39944D+01  0.0
  9  0.41085D+01  0.0           10  0.42130D+01  0.0
 11  0.41937D+01  0.0           12  0.0         -0.13591D+00
 13  0.73830D+00 -0.16690D+00   14  0.14777D+01 -0.18599D+00
 15  0.22184D+01 -0.18941D+00   16  0.29796D+01 -0.19502D+00
 17  0.33680D+01 -0.19879D+00   18  0.37572D+01 -0.18294D+00
 19  0.39198D+01 -0.15377D+00   20  0.40721D+01 -0.11729D+00
```

21	0.41487D+01	−0.50030D−01	22	0.41719D+01	0.36083D−01
23	0.0	−0.36935D+00	24	0.70353D+00	−0.36624D+00
25	0.14052D+01	−0.36947D+00	26	0.21128D+01	−0.37089D+00
27	0.28250D+01	−0.38578D+00	28	0.32018D+01	−0.38918D+00
29	0.35561D+01	−0.36773D+00	30	0.37476D+01	−0.31669D+00
31	0.38626D+01	−0.23743D+00	32	0.39897D+01	−0.11019D+00
33	0.39621D+01	0.94162D−01	34	0.0	−0.68581D+00
35	0.56229D+00	−0.68849D+00	36	0.11256D+01	−0.68596D+00
37	0.16853D+01	−0.69339D+00	38	0.22446D+01	−0.70552D+00
39	0.25189D+01	−0.72230D+00	40	0.28143D+01	−0.69927D+00
41	0.29593D+01	−0.64992D+00	42	0.31351D+01	−0.52547D+00
43	0.32660D+01	−0.29363D+00	44	0.33808D+01	0.63822D−01
45	0.0	−0.91668D+00	46	0.32824D+00	−0.91282D+00
47	0.65484D+00	−0.91696D+00	48	0.98238D+00	−0.91478D+00
49	0.12897D+01	−0.92735D+00	50	0.14366D+01	−0.93279D+00
51	0.15680D+01	−0.94000D+00	52	0.16680D+01	−0.90892D+00
53	0.17619D+01	−0.86341D+00	54	0.20059D+01	−0.63400D+00
55	0.21208D+01	−0.67172D−01	56	0.0	−0.97289D+00
57	0.17569D+00	−0.97988D+00	58	0.35136D+00	−0.97283D+00
59	0.52580D+00	−0.98059D+00	60	0.68931D+00	−0.97550D+00
61	0.75772D+00	−0.98753D+00	62	0.82048D+00	−0.97797D+00
63	0.85124D+00	−0.98759D+00	64	0.91224D+00	−0.93664D+00
65	0.10188D+01	−0.89798D+00	66	0.14559D+01	−0.47391D+00

67	0.0	-0.10000D+01	68	0.0	-0.10000D+01
69	0.0	-0.10000D+01	70	0.0	-0.10000D+01
71	0.0	-0.10000D+01	72	0.0	-0.10000D+01
73	0.0	-0.10000D+01	74	0.0	-0.10000D+01
75	0.0	-0.10000D+01	76	0.0	-0.10000D+01
77	0.0	-0.10000D+01			

解析解：由于滑块间的间隙及倾斜的角度通常很小，可以认为精度很好，压力不为y的函数。假定为二维流体和小角度倾斜，同时忽略法向应力梯度（与剪应力梯度相比）时，控制滑块间润滑运动的方程可写为：

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\qquad u=u(x,\ y)\ \ v=0 \tag{4.299a}$$

边界条件为：

$$\begin{aligned}&y=0\quad u=U_0\quad p=0\\&y=h(x)\quad u=0\quad p=0\end{aligned} \tag{4.299b}$$

式中，$h(x)=h_1+\frac{h_2-h_1}{L}x$

方程(4.299)之解（u，p）为：

$$u=\left(v_0-\frac{1}{2\mu}h^2\frac{dp}{dx}\ \frac{y}{h}\right)\qquad p=\frac{6\mu U_0 x(h-h_2)}{h^2(h_1+h_2)} \tag{4.300}$$

应力为：

$$\tau_{xy}=\mu\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{dp}{dx}\left(y-\frac{h}{2}\right)-\mu\frac{U_0}{h},\quad \sigma_x=\sigma_y=-p \tag{4.301}$$

在计算中选取：

$$h_2=2h_1=8\times10^{-4}\qquad L=0.36\quad \mu=8\times10^{-4}\quad U_0=30$$

有限元解：首先应该指出，在有限元分析中，不必假定压力

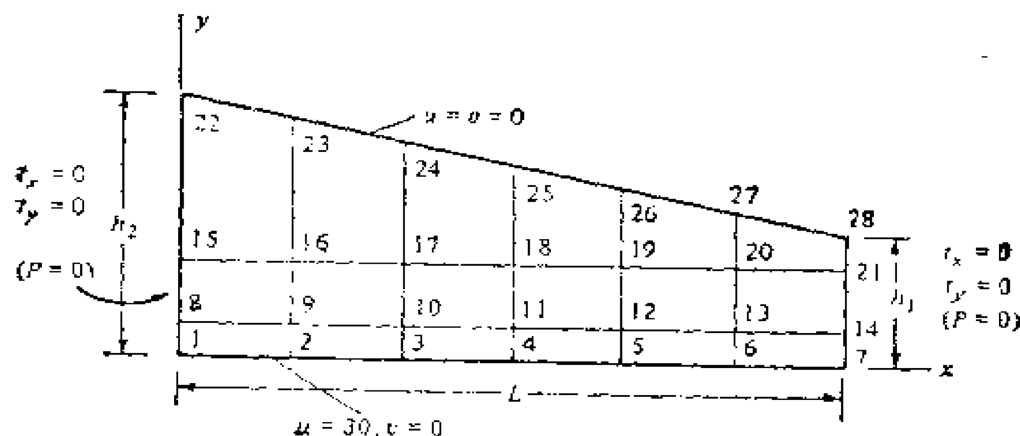
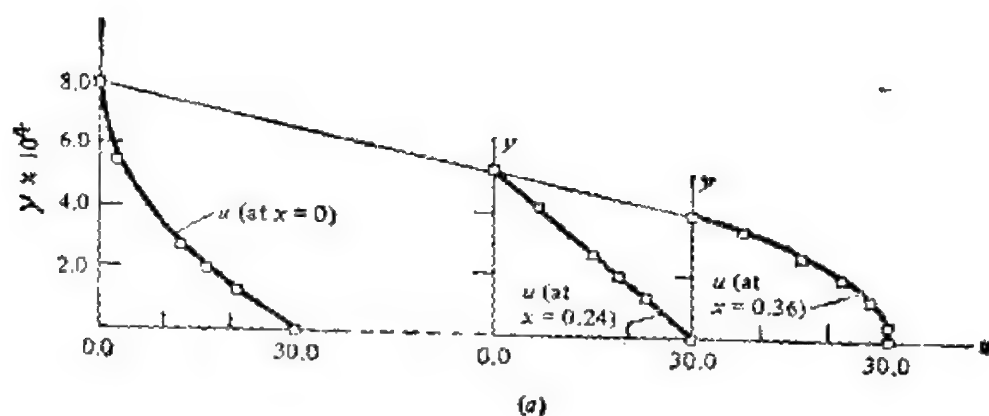


图4.57　例4.25中问题的边界条件及有限元网格（6×3）($L=0.36$，$h_1=0.0004$，$h_2=0.0008$)



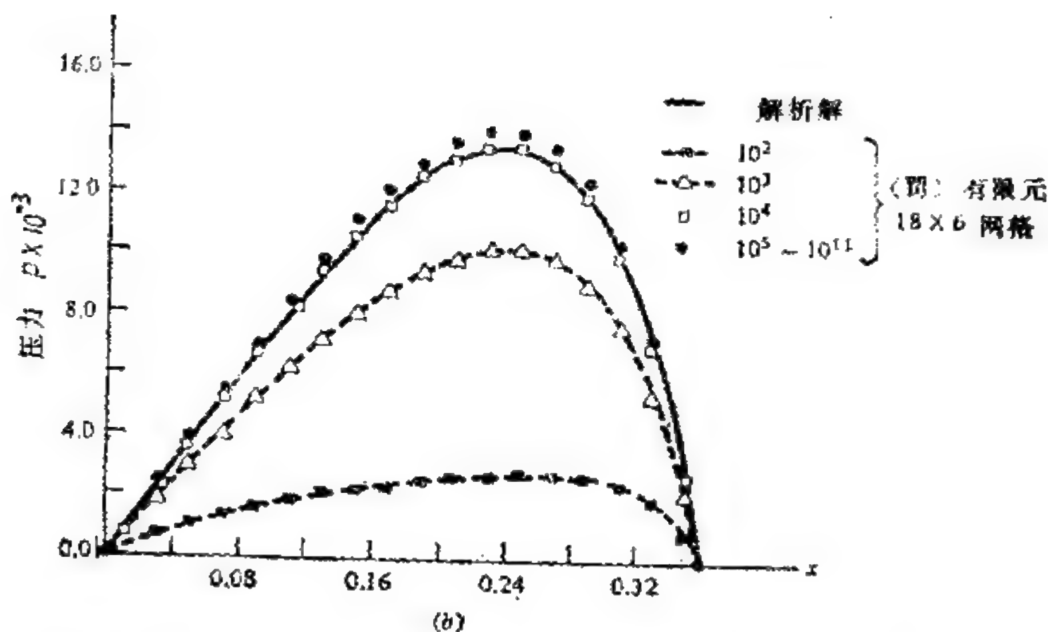


图4.58　对例4.25中问题的有限元解与解析解的比较：(*a*) 水平速度u与y的关系；(*b*) 压力与x间的关系

只是x的函数，在此，利用线单元的不规则网格建立数据以解决问题。网格及边条条件如图4.57所示。由于域非矩形，故须读入网格信息：

IEL = 1　NPE = 4　ITYPE = 2　IMESH = 0

NEM = 18　NNM = 28

程序的输入的数据及输出见表4.24(对曲线网格)。与解析解相比，

有限元解法所得到的垂直速度u及压力p的精度不如解析解。将网格加密些，可得到较接近的解答。图4.58包括速度曲线，以及沿轴承方向的压力分布图形（采用18×6的线单元网格）。

表4.24　　例4.25中液流问题的输入及输出的数据

SLIDER BEARING PROBLEM (FOUR-NODE QUADRILATERALS)

1	4	2	0	9	0	9	
18	28						
1	2	9	8				
2	3	10	9				
3	4	11	10				
4	5	12	11				
5	6	13	12				
6	7	14	13				
8	9	16	15				
9	10	17	16				
10	11	18	17				
11	12	19	18				
12	13	20	19				
13	14	21	20				
15	16	23	22				
16	17	24	23				
17	18	25	24				
18	19	26	25				
19	20	27	26				
20	21	28	27				
0.0	0.0	0.06	0.0	0.12	0.0	0.18	0.0
0.24	0.0	0.3	0.0	0.36	0.0	0.0	0.00005

```
0.06     0.00005    0.12  0.00005    0.18  0.00005    0.24  0.00005
0.3      0.00005    0.36  0.00005    0.0   0.00035    0.06  0.00035
0.12     0.0002833  0.18  0.00025    0.24  0.0002167  0.3   0.0001833
0.36     0.00015    0.0   0.0008     0.06  0.0007333  0.12  0.0006667
0.18     0.0006     0.24  0.0005333  0.3   0.0004667  0.36  0.0004
0.0008   1.0
  28
 2    4    6    8   10   12   14   43   44   45   46   47   48   49   50   51
52   53   54   55   56    1    3    5    7    9   11   13
0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0
0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0
0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    30.0   30.0   30.0
30.0   30.0   30.0   30.0
 0
```

EDITED OUTPUT

SLIDER BEARING PROBLEM (FOUR-NODE QUADRILATERALS)

ELEMENT TYPE .... = 1
PROBLEM TYPE .... = 2
CONVECTION (0:NO, 1:YES) .... = 0
VISCOSITY .... = 0.800D-03
PENALTY PARAMETER .... = 0.100D+09
ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH .... = 18

NUMBER OF NODES IN THE MESH……………………………… = 28

TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL………… = 56

SOLUTION VECTOR:

1	0.30000D+02	0.0	2	0.30000D+02	0.0
3	0.30000D+02	0.0	4	0.30000D+02	0.0
5	0.30000D+02	0.0	6	0.30000D+02	0.0
7	0.30000D+02	0.0	8	0.25866D+02	−0.16139D−02
9	0.25887D+02	0.15969D−02	10	0.26112D+02	−0.17843D−02
11	0.26431D+02	0.15191D−02	12	0.27110D+02	−0.20853D−02
13	0.28309D+02	0.10864D−02	14	0.30513D+02	−0.29237D−02
15	0.71193D+01	−0.52423D−02	16	0.78038D+01	0.17009D−02
17	0.11343D+02	−0.35837D−03	18	0.14154D+02	−0.37055D−02
19	0.17024D+02	−0.35013D−02	20	0.22087D+02	−0.72776D−02
21	0.28045D+02	−0.80164D−02	22	0.0	0.0
23	0.0	0.0	24	0.0	0.0
25	0.0	0.0	26	0.0	0.0
27	0.0	0.0	28	0.0	0.0

ELE.NO.	STRESS, SXX	STRESS, SYY	STRESS, SXY	PSESSURE
1	−0.285085D+04	−0.285085D+04	−0.659758D+02	0.285085D+04
2	−0.847124D+04	−0.847124D+04	−0.640939D+02	0.847124D+04
3	−0.135567D+05	−0.135567D+05	−0.596546D+02	0.135567D+05
4	−0.170622D+05	−0.170622D+05	−0.516687D+02	0.170622D+05
5	−0.170014D+05	−0.170014D+05	−0.366475D+02	0.170014D+05

6	-0.917713D+04	-0.917718D+04	-0.942770D+01	0.917716D+04
7	-0.285054D+04	-0.285056D+04	-0.491065D+02	0.285055D+04
8	-0.848151D+04	-0.847150D+04	-0.492816D+02	0.847150D+04
9	-0.135565D+05	-0.135565D+05	-0.499350D+02	0.135565D+05
10	-0.170623D+05	-0.170624D+05	-0.474781D+02	0.170623D+05
11	-0.170012D+05	-0.170013D+05	-0.418874D+02	0.170013D+05
12	-0.917708D+04	-0.917727D+04	-0.297975D+02	0.917718D+04
13	-0.285023D+04	-0.285022D+04	-0.143267D+02	0.285022D+04
14	-0.847183D+04	-0.847183D+04	-0.199782D+02	0.847183D+04
15	-0.135562D+05	-0.135562D+05	-0.278125D+02	0.135562D+05
16	-0.170627D+05	-0.170627D+05	-0.381382D+02	0.170627D+05
17	-0.170009D+05	-0.170009D+05	-0.529484D+02	0.170009D+05
18	-0.917769D+04	-0.917760D+04	-0.751884D+02	0.917765D+04

例4.26（例4.13 问题的不稳定解） 三角形或线性矩形的 A 2×2网格有同样多的节点数。

于是得到

$$\text{IEL}=0 \quad \text{NPE}=3 \quad 或 \quad \text{IEL}=1 \quad \text{NPE}=4$$

以及

$$\text{ITYPE}=-1 \quad \text{ICONV}=0 \quad \text{IMESH}=1 \quad \text{ITEM}=1$$
$$\text{NPRNT}=0 \quad \text{DT}=0.05 \quad \text{ALFA}=0.5$$
$$\text{T0}=1.0$$

输入数据及三角形单元网格的计算机选择输出列于表4.25。

例4.27（Couette 流的不稳定解法，见例4.14）我们用一个2×6的线性矩形单元网格来解决这个问题，则有：

$$\text{IEL}=1 \quad \text{NPE}=4 \quad \text{ITYPE}=2 \quad \text{ICONV}=0$$
$$\text{IMESH}=1 \quad \text{ITEM}=1 \quad \text{NPRNT}=0$$
$$\text{DT}=1.0 \quad \text{ALFA}=0.5 \quad \text{T0}=40.0$$

输入数据及选择输出见表4.26。

*4-8-5 计算机程序PLATE的说明和应用

PLATE程序是由 4-5-4 和4-6-3两节中研究的正交各向异性平板所列的方程编制而成的，前面的讨论中，假定单元的每个节点（即NDF = 3)有三个初始的自由度（w，S_x，S_y）。这个程序只包含了四、八和九节点的二次等参数单元。除了子程序STIFF 和STRESS外，所有其他的子程序都与用于程序FEM2D中的一样。式4.225和4.243中的有限元矩阵，编入子程序STIFF 中，平板顶和底的应力：

$$\sigma_x=\left(c_{11}\frac{\partial S_x}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial S_y}{\partial y}\right)\frac{h}{2} \qquad \sigma_y=\left(c_{21}\frac{\partial S_x}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial S_y}{\partial y}\right)\frac{h}{2}$$

$$\tau_{xy}=C_{33}\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right)\frac{h}{2} \qquad \tau_{xz}=c_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+S_x\right)$$

$$\tau_{yz}=c_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+S_y\right) \tag{4.302}$$

在子程序 STRESS中计算。

表4.27给出了输入变量的说明。下面是应用PLATE 程序的两

道例题。

例4.28（均布荷载作用下简支等参数平板的弯曲，见习题4.12） 2×2个线性单元的网格，1×1个九个节点的网格及边界条件见图4.59。数据由下式给出（见表4.28）

IEL = 1 NPE = 4 （或IEL = 2 NPE = 9） IMESH = 1,
NPRNT = 0 ITEM = 0 NTIME = 0 NSTP = 0 NOZERO = 0

NX = NY = 2 （或NX = NY = 1） {DX} = {DY} = {2.5, 2.5}

$E_1 = E_2 = 10^6$ G12 = G13 = G23 = 0.3846×10^6 $ANU_{12} = 0.3$

RHO = 0.0 T = 0.1 PO = 100.0

给定的边界自由度数（注意每个节点有3个自由度）如下：

{IBDY} = {2, 3, 6, 7, 9, 11, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27}

NBDY = 15

所有的值均规定为0。除均布非零荷载外，此题中没有其他非零力。应该指出，可通过数组 IBSF(I)，用规定$P_0 = 0.0$并计算它对各种内力自由度的影响，来包含均匀非零荷载：

{IBSF} = {1, 4, 10, 13} VBSF = $\{v_0,\ 2v_0,\ 2v_0,\ 4v_0\}$

$$v_0 = \frac{q_0 h_x h_y}{4} = 156.25$$

程序的选择输出列于表4.29。用线性单元算得中点挠度的有限元解，从下面收敛于经典的平板解；而用二次单元算得中点挠度的有限元解，从上面收敛于该经典平板的解。

$\overline{w} = wEh^3/q_0a^4$

Linear elements			Quadratic elements		Classical plate theory
1 × 1	2 × 2	4 × 4	1 × 1	2 × 2	
0.03486	0.04337	0.04416	0.04582	0.04446	0.04434

表4.25　　　例4.26　Poisson方程式不稳定分析法的输入和输出（三角形单元网格）

```
UNSTEADY  SOLUTION  OF  THE  POISSON  EQUATION (TRIANGLES)
   0        3    -1     0       1    1     0
   2        2
  0.5      0.5
  0.5      0.5
  1.0      1.0         0.0          0.0          1.0
   5
   3       6     7      8            9
  0.0      0.0         0.0          0.0          0.0
   0
  0.25      0.5        1.0
  0.0
  0.0
.......................................................................................
  UNSTEADY  SOLUTION  OF  THE  POISSON  EQUATION (TRIANGLES)
  ELEMENT  TYPE..............................................................=0
  PROBLEM  TYPE..............................................................=  1
  CONVECTION (O:NO, 1:YES) ..................................................=0
  PARAMETERS, C1, C2, C3, C4, AND  C5:
          C1 = 0.100D + 01
          C2 = 0.100D + 01
          C3 = 0.0
```

表4.25(续)

C4 = 0.0

C5 = 0.100D + 01

ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH………………………=8

NUMBER OF NODES IN THE MESH……………………………………………=9

TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL……………………=9

PARTIAL OUTPUT

TIME = 0.050

SOLUTION VECTOR:

0.49540D-01　0.58441D-01　0.0　0.58441D-01　0.53132D-01　0.0

0.0　0.0　0.0

ELE.NO.	X-COMPONENT	Y-COMPONENT	MAGNITUDE	ANGLE
1	0.177845D-01	-0.106176D 01	0.207128D-01	-0.308378D+02
2	-0.106176D-01	0.177845D-01	0.207128D-01	0.120838D+03
3	-0.116882D+00	0.0	0.116882D+00	0.180000D+03
4	-0.106264D+00	-0.106176D-01	0.106793D+00	-0.174294D+03
5	-0.106176D-01	-0.106264D+00	0.106793D+00	-0.957058D+02
6	0.0	-0.116882D+00	0.116882D+00	-0.900000D+02
7	-0.106264D+00	0.0	0.106264D+00	0.180000D+03
8	0.0	-0.106264D+00	0.106264D+00	-0.900000D+02

TIME = 1.000

```
SOLUTION  VECTOR:
0.31101D+00   0.22820D+00   0.0        0.22820D+00   0.17639D+00   0.0
0.0           0.0           0.0
ELE.NO.     X-COMPONENT        Y-COMPONENT        MAGNITUDE         ANGLE
   1        -0.165619D+00      -0.103630D+00      0.195368D+00      -0.147965D+03
   2        -0.103630D+00      -0.165619D+00      0.195368D+00      -0.122035D+03
   3        -0.456401D+00       0.0               0.456401D+00       0.180000D+03
   4        -0.352772D+00      -0.103630D+00      0.367678D+00      -0.163629D+03
   5        -0.103630D+00      -0.352772D+00      0.367678D+00      -0.106371D+03
   6         0.0               -0.456401D+00      0.456401D+00      -0.900000D+02
   7        -0.352772D+00       0.0               0.352772D+00       0.180000D+03
   8         0.0               -0.352772D+00      0.352772D+00      -0.900000D+02
```

表4.26　　例4.27不稳定流问题的输入及输出

```
UNSTEADY  COUETTE  FLOW  WITH  UPPER  WALL  MOVING (FOUR-NODE  QUADRILATERALS)
 1    4    2    0    1    1    0
 2    6
1.0  1.0
1.0  1.0          1.0      1.0     1.0     1.0
1.0  1.0
  22
  1  2    3    4    5    6    8    12    14    18    20    24    26    30    32    36
 38 40   42   37   39   41
```

```
0.0
0.0
0.0     0.0     0.0     3.0     3.0     3.0
  5
  7   13   19   25   31
1.0     1.0     1.0     1.0     1.0     1.0
1.0     0.5     40.0
0.0
0.0
0.0
.................................................................................
UNSTEADY  COUETTE  FLOW  WITH  UPPER  WALL  MOVING (FOUR-NODE  QUADRILATERALS)
          ELEMENT  TYPE...................................................= 1
          PROBLEM  TYPE...................................................= 2
          CONVECTION (O, NO, 1, YES)  ....................................= 0
          VISCOSITY ......................................................= 0.100D+01
          PENALTY  PARAMETER  ............................................= 0.100D+09
          ACTUAL  NUMBER  OF  ELEMENTS  IN  THE  MESH.....................= 12
          NUMBER  OF  NODES  IN  THE  MESH................................= 21
          TOTAL  NUMBER  OF  EQUATIONS  IN  THE  MODEL....................= 42
   **PARTIAL  OUTPUT**
    TIME =      1.000
```

表4.26（续）

SOLUTION VECTOR:

1	0.0	0.0	2	0.0	0.0
3	0.0	0.0	4	0.39659D+00	0.0
5	0.39659D+00	-0.52496D-08	6	0.39659D+00	0.0
7	0.48295D+00	0.0	8	0.48295D+00	-0.13809D-09
9	0.48295D+00	0.0	10	0.51818D+00	0.0
11	0.51818D+00	0.89648D-10	12	0.51818 D+00	0.0
13	0.60795D+00	0.0	14	0.60795D+00	0.67119D-09
15	0.60795D+00	0.0	16	0.10216D+01	0.0
17	0.10216D+01	0.56341D-08	18	0.10216D+01	0.0
19	0.30000D+01	0.0	20	0.30000D+01	0.0
21	0.30000D+01	0.0			

TIME- 5.000

SOLUTION VECTOR:

1	0.0	0.0	2	0.0	0.0
3	0.0	0.0	4	0.11948D+01	0.0
5	0.11948D+01	-0.55308D-08	6	0.11948D+01	0.0
7	0.20335D+01	0.0	8	0.20335D+01	0.42392D-09
9	0.20335D+01	0.0	10	0.26209D+01	0.0
11	0.26209D+01	-0.67896D-10	12	0.26209D+01	0.0
13	0.30447D+01	0.0	14	0.30447D+01	-0.30678D-08
15	0.30447D+01	0.0	16	0.31748D+01	0.0

17	0.31748D+01	0.29059D-08	18	0.31748D+01	0.0
19	0.30000D+01	0.0	20	0.30000D+01	0.0
21	0.30000D+01	0.0			

TIME= 40.000

SOLUTION VECTOR,

1	0.0	0.0	2	0.0	0.0
3	0.0	0.0	4	0.17500D+01	0.0
5	0.17500D+01	0.99817D-09	6	0.17500D+01	0.0
7	0.30000D+01	0.0	8	0.30000D+01	-0.27725D-08
9	0.30000D+01	0.0	10	0.37499D+01	0.0
11	0.37499D+01	-0.14757D-08	12	0.37499D+01	0.0
13	0.40000D+01	0.0	14	0.40000D+01	0.17192D-08
15	0.40000D+01	0.0	16	0.37500D+01	0.0
17	0.37500D+01	0.19195D-08	18	0.37500D+01	0.0
19	0.30000D+01	0.0	20	0.30000D+01	0.0
21	0.30000D+01	0.0			

表4.27　　输入计算机程序PLATE的数据

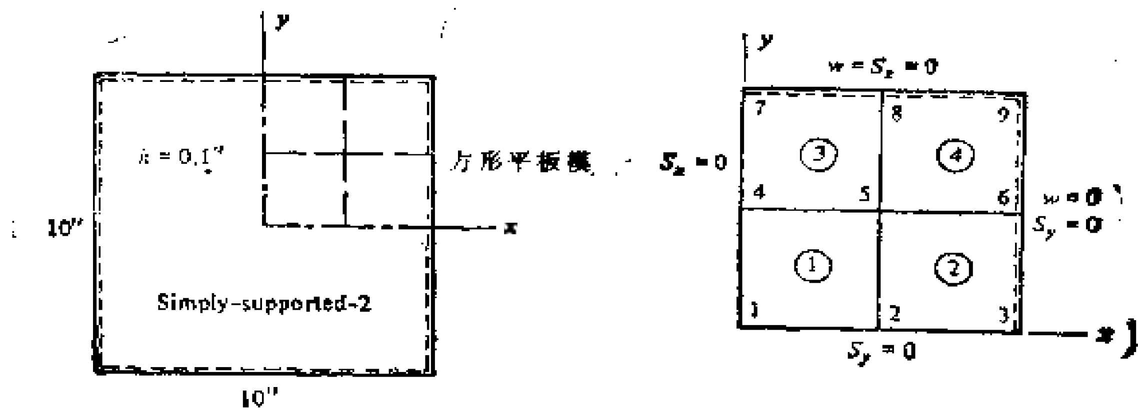
行　号	变量名	变量说明和注意事项
• 问题的数据卡1　(20A4)		问题题目卡；
1—80	TITLE	为输出定名的标题；
• 问题的数据卡2　(16I5)		本卡有8个输入值(右侧对齐)
1—5	IEL	单元类型IEL＝1，4节点单元； IEL＝2，8或9节点单元。
6—10	NPE	每单元节点数： IEL＝1，NPE＝4 IEL＝2，NPE＝8或9；
11—15	IMESH	网格形成指令： IMESH＝0，网格信息可以读入， IMESH＝1，网格形成(仅对矩形域)；
16—20	NPRNT	打印指令，打印(NPRNT＝1)或不打印(NPRNT＝0)单元矩阵或矢量；
21—25	ITEM	瞬时问题指令： ITEM＝0　静态分析 ITEM＝1　瞬时分析；
26—30	NTIME	时间间隔总数；
31—35	NS	当荷载移走时时间间隔数；
36—40	NOZERO	瞬时情况下，初始条件为0值(NOZERO＝0)或非0值的指令；
• 问题的数据卡3　(16I5)		当IMESH＝1时，省略指令卡3，4和5；
1—5	NEM	网格中单元个数；
6—10	NNM	网格中节点个数；
• 问题的数据卡4　(16I5)		读'NEM'卡：每卡的NPE；
1—45	NOD(i,j)	矩阵'NOD'的第i行
• 问题的数据卡5(8F10.4)		输入x,y坐标；读'2*NNM'输入值，每卡8个；
1—80	x(i)，y(i)	第i个节点的总坐标；
• 问题的数据卡6　(16I5)		当IMESH＝0时，省略指令卡6,7,8；
1—5	Nx	沿x轴方向细分数目；

表4.27 （续）

行　号	变量名	变量说明和注意事项
6—10	Ny	沿y轴方向细分数目；
• 问题的数据卡7和8(8F10.4)		读Dx：'IEL*Nx＋1'个输入值； Dy：'IEL*Ny＋1'个输入值；
1—80	Dx(i)	沿x坐标方向两节点间距；
1—80	Dy(i)	沿y坐标方向两节点间距；
• 问题的数据卡9 （8E10.3）		右侧对齐输入值
1—10	E1	x方向模量；
11—20	E2	y方向模量；
21—30	G12	x,y平面内的剪切模量；
31—40	G13	x，z平面内的剪切模量；
41—50	G23	y，z平面内的剪切模量；
51—60	ANU12	基本Poisson比；
61—70	RHO	材料密度；
71—80	H	平板厚度；
• 问题的数据卡10 （8F10.4）		对非均布荷载，输入0和经由语句 IBSF和VBSF读力；
1—10	PO	均布荷载集度；
• 问题的数据卡11 （16I5）		**NBDY≠0**；
1—5	NBDY	特定广义位移数值；
• 问题的数据卡12 （16I5）		读'NBDY'输入值，每卡16个；
1—80	IBDY(i)	给定自由度数组(次序w，S_x，S_y)；
• 问题的数据卡13 （8F10.4）		读'NBDY'输入值，每卡8个；
1—80	VBDY(i)	数组IBDY(i)中给定自由度的数值；
• 问题的数据卡14 （16I5）		如果NBSF＝0，第5列输入0；
1—5	NBSF	给定非零广义力个数；
• 问题的数据卡15 （16I5）		***如NBSF＝0，省略***；
1—80	IBSF(i)	给定非零力；
• 问题的数据卡16 （8F10.4）		读'NBSF'输入值，每卡8个；
1—80	VBSF(i)	给定力的值；
• 问题的数据卡17 （8F10.4）		如ITEM＝0，省略备用指令卡；

表4.27 （续）

行号	变量名	变量说明和注意事项
1—10	DT	瞬时问题的时间间隔；
11—20	ALFA	Newmark法中的参数；
• 问题的数据卡18（8F10.4）		NOZERO = 0时省略此卡；
1—80	GFO(i)	位移的初始值；
• 问题的数据卡19（8F10.4）		NOZERO = 0时省略此卡；
1—80	GF1(i)	速度的初始值。



$$q_0 = 100\,\text{lb/in}^2$$

$$E = 10^6\,\text{lb/in}^2,\ \nu = 0.3$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

每个节点上自由度顺序：$(W,\ S_x,\ S_y)$

图4.59　简支正方形板受弯的边界条件和有限元网格

例4.29　（突然作用有分布横向荷载时，周边固定圆形平板的动力反应）　一个周边固定圆形平板的半径为R = 100 in(吋)，板厚h = 20in(吋)，弹性模量$E = 100\ \text{lb/in}^2$（磅/吋²），Poisson比$\nu = 0.3$，密度$\rho = 10\ \text{lb}\cdot\text{S}^2/\text{in}^4$，所受到的突加荷载（即t = 0时，$w = S_x = S_y = \dot{W} = \dot{S}_x = \dot{S}_y = 0$）为$q_0 = 1\ \text{lb/in}^2$。我们用圆板的四分之一为模型（双轴对称），分5个9节点单元(图4.60a)。输入数据如下：

IEL = 2　NPE = 9　IMESH = 0　NPRNT = 0

ITEM = 1　NTIME = 10　NSTP = 10

NEM = 5　NNM = 29　DT = 2.5　ALFA = 0.5

数组NOD, X, Y, IBDY, 和VBDY 可容易地用图4.60*a*的网格提供。

全部计算机输入数据和选择输出数据，分别列于表4.28和表4.30，中心挠度和应力与时间关系曲线见图4.60*b*。

表4.28 例4.28和4.29中平板弯曲问题的输入数据

```
STATIC BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED PLATE UNDER UNIFORM LOAD (2X2L MESH)
   1    4    1    0    0    0    0
   2    2
2.5     2.5
2.5     2.5
   1.0E6     1.0E6  0.3846E6  0.3846E6  0.3846E6   0.30E0   0.0E0   0.1E0
100.0
  15
   2    3    6    7    9   11   16   18   19   20   22   23   25   26   27
0.0
0.0
   0
```

```
STATIC BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED PLATE UNDER UNIFORM LOAD (1X1Q9 MESH)
   2    9    1    0    0    0    0
   1    1
2.5     2.5
2.5     2.5
   1.0E6     1.0E6  0.3846E6  0.3846E6  0.3846E6   0.30E0   0.0E0   0.1E0
100.0
  15
   2    3    6    7    9   11   16   18   19   20   22   23   25   26   27
```

表4.28 （续）

```
0.0
0.0
  0
```

```
STATIC BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED PLATE UNDER UNIFORM LOAD (4X4L MESH)
  1    4    1    0    0    0    0
  4    1
1.25      1.25    1.25    1.25
1.25      1.25    1.25    1.25
  1.0E6     1.0E6   0.3846E6   0.3846E6   0.3846E6   0.30E0   0.0E0   0.1E0
100.0
 27
  2    3    8    9   12   13   15   17   28   30   32   43   45   47   58   60
 61   62   64   65   67   68   70   71   73   74   75
0.0
0.0
0.0
0.0
  0
```

```
DYNAMIC BENDING OF A CLAMPED CIRCULAR PLATE UNDER UNIFORM STEP LOAD (5Q9 MESH)
  2     9    0    0    1   10   10    0
```

表4.28（续）

5 29

1 5 7 9 2 6 8 4 3

5 15 17 7 10 16 12 6 11

9 7 17 19 8 12 18 14 13

15 25 27 17 20 26 22 16 21

19 17 27 29 18 22 28 24 23

0.0 0.0 16.5 0.0 11.6673 11.6673 0.0 16.5

33.0 0.0 30.488 12.6286 23.3345 23.3345 12.6286 30.488

0.0 33.0 49.5 0.0 45.732 18.9428 35.0 35.0

18.9428 45.732 0.0 49.5 66.0 0.0 60.976 25.2571

46.669 46.669 25.2571 60.976 0.0 66.0 83.0 0.0

76.682 31.7627 58.6898 58.6898 31.7627 76.682 0.0 83.0

100.0 0.0 92.388 38.2683 70.7107 70.7107 38.2683 92.388

0.0 100.0

1.0E2 1.0E2 0.3845E2 0.3845E2 0.3845E2 0.30E0 1.0E1 2.0E1

1.0

27

2 3 6 11 15 26 30 41 45 56 60 71 73 74 75 76

77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87

0.0

0.0

0.0

0.0

表4.28（续）

0	
2.5	0.5

表4.29　　例4.28中静力弯曲问题的选择输出

```
STATIC BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED PLATE UNDER UNIFORM LOAD (2x2L MESH)
   ELEMENT TYPE (1=LINEAR, 2=QUADRATIC)=1      NODES PER ELEMENT=4
         ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH=4
         NUMBER OF NODES IN IHE MESH=9
         DEGREES OF FREEDOM=3
   M A T E R I A L   P R O P E R T I E S:
         MODULUS, E1=0.10000D+07
         MODULUS, E2=0.10000D+07
         SHEAR MODULI, G12, G13  AND  G23=0.38460D+06  0.38460D+06  0.38460D+06
         POISSONS RATIO, NU12=0.30000D+00
         SHEAR CORRECTION COEFFICIENT, K=0.83333D+00
         MATERIAL DENSITY, RHO=0.0
         PLATE THICKNESS, H=0.10000D+00
         LOAD MAGNITUDE, P=0.10000D+03
   NUMBER OF SPECIFIED DISPLACEMENTS=    15
   SPECIFIED DISPLACEMENTS AND THEIR VALUES FOLLOW:
  2     3     6     7     9    11    16    18    19    20    22    23    25    26    27
 0.0               0.0        0.0                     0.0   0.0                     0.0   0.0   0.0
 0.0               0.0        0.0                     0.0   0.0                     0.0   0.0
```

表4.29 (续)

```
NUMBER OF SPECIFIED FORCES=0                                              0.0
SPECIFIED FORCE DEGREES OF FREEDOM FOLLOW AND THEIR SPECIFIED VALUES FOLLOW.
 0
0.0
 BOOLEAN (CONNECTIVITY) MATRIX-NOD(I, J)
 1    1    2    5    4
 2    2    3    6    5
 3    4    5    8    7
 4    5    6    9    8
COORDINATES OF THE GLOBAL NODES,
0.0          0.0          0.25000D+01  0.0          0.50000D+01  0.0          0.0          0.25000D+01
0.25000D+01  0.25000D+01  0.50000D+01  0.25000D+01  0.0          0.50000D+01  0.25000D+01  0.50000D+01
0.50000D+01  0.50000D+01
 HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MAIRIX=15
 TRANSVERSE DEFLECTION,
0.43368D+02  0.30838D+02  0.0          0.30838D+02  0.21963D+02  0.0          0.0  0.0
0.0
 BENDING SLOPE, SI X,
0.0  0.10019D+02  0.14636D+02  0.0          0.70974D+01  0.10460D+02          0.0  0.0
0.0
 BENDING SLOPE, SI-Y,
0.0  0.0          0.0          0.10019D+02  0.70974D+01  0.0  0.14636D+02  0.10460D+02
```

表4.29 （续）

```
0.0
X-COORD    Y-COORD    SIGMAX      SIGMAY      SIGMAXY      SIGMAXZ      SIGMAYZ
0.1250D+01 0.1250D+01 0.4075D+03  0.4075D+03  -0.3746D+02  -0.6250D+02  -0.6250D+02
0.3750D+01 0.1250D+01 0.1851D+03  0.1738D+03  -0.9099D+02  -0.2292D+03  -0.2083D+02
0.1250D+01 0.3750D+01 0.1738D+03  0.1851D+03  -0.9099D+02  -0.2083D+02  -0.2292D+03
0.3750D+01 0.3750D+01 0.8006D+02  0.8006D+02  -0.2251D+03  -0.1042D+03  -0.1042D+03
.......................................................................................
STATIC BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED PLATE UNDER UNIFORM LOAD (1X1Q9 MESH)
  ELEMENT TYPE (1=LINEAR, 2=QUADRATIC) =2     NODES PER ELEMENT=9
    ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH=1
    NUMBER OF NODES IN THE MESH=9
    DEGREES OF FREEDOM=3
   TRANSVERSE DEFLECTION,
 0.45821D+02  0.32303D+02  0.0     0.32303D+02  0.22826D+02  0.0     0.0     0.0
 0.0
   BENDING SLOPE, SI-X,
 0.0     0.99850D+01  0.15019D+02  0.0     0.70177D+01  0.10670D+02  0.0     0.0
 0.0
   BENDING SLOPE, SI-Y,
 0.0  0.0  0.0  0.99850D+01  0.70177D+01  0.0     0.15019D+02     0.10670D+02
 0.0
   X-COORD    Y-COORD    SIGMAX    SIGMAY    SIGMAXY    SIGMAXZ    SIGMAYZ
```

表4.29（续）

0.1057D+01	0.1057D+01	0.4559D+03	0.4559D+03	-0.3329D+02	-0.4675D+02	-0.4675D+02
0.1057D+01	0.3943D+01	0.1795D+03	0.1998D+03	-0.9042D+02	-0.1354D+02	-0.2365D+03
0.3943D+01	0.1057D+01	0.1998D+03	0.1795D+03	-0.9042D+02	-0.2365D+03	-0.1354D+02
0.3943D+01	0.3943D+01	0.8066D+02	0.8066D+02	-0.2556D+03	-0.1125D+03	-0.1125D+03

```
STATIC BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED PLATE UNDER UNIFORM LOAD (4 X4L MESH)
      TRANSVERSE DEFLECTION:
0.44157D+02 0.41011D+02 0.31823D+02 0.17486D+02 0.0         0.41011D+02 0.38100D+02 0.29584D+02
0.16268D+02 0.0         0.31823D+02 0.29584D+02 0.23018D+02 0.12690D+02 0.0         0.17486D+02
0.16268D+02 0.12690D+02 0.70216D+01 0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
0.0
```

表4.30　　例4.29中固支圆平板瞬时分析问题的选择输出

```
DYNAMIC BENDING OF A CLAMPED CIRCULAR PLATE UNDER UNIFORM STEP LOAD (5Q9 MESH)
   ELEMENT TYPE (1=LINEAR, 2=QUADRATIC)=2      NODES PER ELEMENT=9
      ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH=5
      NUMBER OF NODES IN THE MESH=29
      DEGREES OF FREEDOM=3
      M A T E R I A L  P R O P E R T I E S,
         MODULUS, E1=0.10000D+03
         MODULUS, E2=0.10000D+03
         SHEAR MODULI, G12, G13 AND G23=0.38450D+02  0.38450D+02  0.38450D+02
         POISSONS RATIO, NU12=0.30000D+00
```

表4.30（续）

```
        SHEAR CORRECTION COEFFICIENT, K=0.83333D+00
        MATERIAL DENSITY, RHO=0.10000D+02
        PLATE THICKNESS, H-0.20000D+02
        LOAD MAGNITUDE, P=0.10000D+01
     NUMBER OF SPECIFIED DISPLACEMENTS=   27
     SPECIFIED DISPLACEMENTS AND THEIR VALUES FOLLOW,
     2    3    6   11   15    26   30   41   45   56   60  71  73   74   75   76
    77   78   79   80   81    82   83   84   85   86   87
   0.0       0.0       0.0       0.0                       0.0        0.0  0.0  0.0
   0.0       0.0       0.0       0.0                       0.0        0.0  0.0  0.0
   0.0       0.0       0.0       0.0                       0.0        0.0  0.0  0.0
   0.0       0.0       0.0
  NUMBER OF SPECIFIED FORCES=   0
  SPECIFIED FORCE DEGREES OF FREEDOM FOLLOW AND THEIR SPECIFIED VALUES FOLLOW,
 0
0.0
  BOOLEAN (CONNECTIVITY) MATRIX-NOD (I, J)
1    1    5    7    9    2    6    8    4    3
2    5   15   17    7   10   16   12    6   11
3    9    7   17   19    8   12   18   14   13
4   15   25   27   17   20   26   22   16   21
5   19   17   27   29   18   22   28   24   23
```

表4.30 （续）

```
    COORDINATES OF THE GLOBAL NODES:
0.0          0.0          0.16500D+02  0.0          0.11667D+02  0.11667D+02  0.0          0.16500D+02
0.330000D+02 0.0          0.30488D+02  0.12629D+02  0.23334D+02  0.23334D+02  0.12629D+02  0.30488D+02
0.0          0.33000D+02  0.49500D+02  0.0          0.45732D+02  0.18943D+02  0.35000D+02  0.35000D+02
0.18943 D+02 0.45732D+02  0 0          0.49500D+02  0.66000D+02  0.0          0.60976D+02  0.25257D+02
0.46669 D+02 0 46669D+02  0.25257D+02  0.60976D+02  0.0          0.66000D+02  0.83000D+02  0.0
0.76682 D+02 0.31763D+02  0.58690D+02  0.58690D+02  0.31763D+02  0.76682D+02  0.0          0.83000D+02
0.10000 D+03 0.0          0.92388D+02  0.38268D+02  0.70711D+02  0.70711D+02  0.38268D+02  0.92388D+02
0.0          0.10000D+03
HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MATRIX =    39
DT=0.2500D+01      ALFA=0.5000D+00      BETA=0.2500D+00
    TEMPORAL PARAMETERS AO, AI, ETC.: 0.6400D+00 0.8000D+00 0.1600D+01 0.1000D+01 0.1000D+01
TIME=0.250D+01
TRANSVERSE DEFLECTION:
0.77060D-02  0.77897D-02  0.78680D-02  0.77897D-02  0.75219D-02  0.75974D-02  0.74506D-02  0.75974D-02
0.75219D-02  0.80174D-02  0.79961D-02  0.80240D-02  0.79961D-02  0.80174D-02  0.64338D-02  0.64725D-02
0.64261D-02  0.64725D-02  0.64338D-02  0.88882D-02  0.88648D-02  0.88888D-02  0.88648D-02  0.88882D-02
0.0          0.0          0.0          0.0          0.0
..........................................................................................................
    TIME=0.100D+02
    TRANSVERSE DEFLECTION:
0.19659D+00  0.19600D+00  0.19349D+00  0.19600D+00  0.19731D+00  0.19785D+00  0.19846D+00  0.19785D+00
```

表4.30 （续）

0.19731D+00	0.19262D+00	0.19183D+00	0.19252D+00	0.19183D+00	0.19262D+00	0.18541D+00	0.18788D+00
0.18554D+00	0.18788D+00	0.18541D+00	0.19929D+00	0.19705D+00	0.19923D+00	0.19705D+00	0.19929D+00
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			

TIME = 0.150D+02

TRANSVERSE DEFLECTION,

0.46622D+00	0.47675D+00	0.47645D+00	0.47675D+00	0.48188D+00	0.48585D+00	0.48259D+00	0.48685D+00
0.48188D+00	0.46240D+00	0.46035D+00	0.46250D+00	0.46035D+00	0.46240D+00	0.49869D+00	0.50706D+00
0.49860D+00	0.50705D+00	0.49869D+00	0.42642D+00	0.41751D+00	0.42646D+00	0.41751D+00	0.42642D+00
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			

TIME = 0.200D+02

TRANSVERSE DEFLECTION,

0.85851D+00	0.88548D+00	0.89397D+00	0.88548D+00	0.86245D+00	0.87890D+00	0.85258D+00	0.87890D+00
0.86245D+00	0.87583D+00	0.87010D+00	0.87680D+00	0.87010D+00	0.87583D+00	0.95875D+00	0.97620D+00
0.95763D+00	0.97620D+00	0.95875D+00	0.67815D+00	0.65764D+00	0.67825D+00	0.65764D+00	0.67815D+00
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			

TIME - 0.250D+02

TRANSVRRSE DEFLECTION,

0.14375D+01	0.14276D+01	0.14104D+01	0.14276D+01	0.13368D+01	0.13596D+01	0.13262D+01	0.13596D+01

表4.30（续）

0.13368D+01	0.14601D+01	0.14462D+01	0.14597D+01	0.14462D+01	0.14601D+01	0.14928D+01	0.15191D+01
0.14937D+01	0.15198D+01	0.14928D+01	0.92059D+00	0.88705D+00	0.92013D+00	0.88705D+00	0.92059D+00
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			

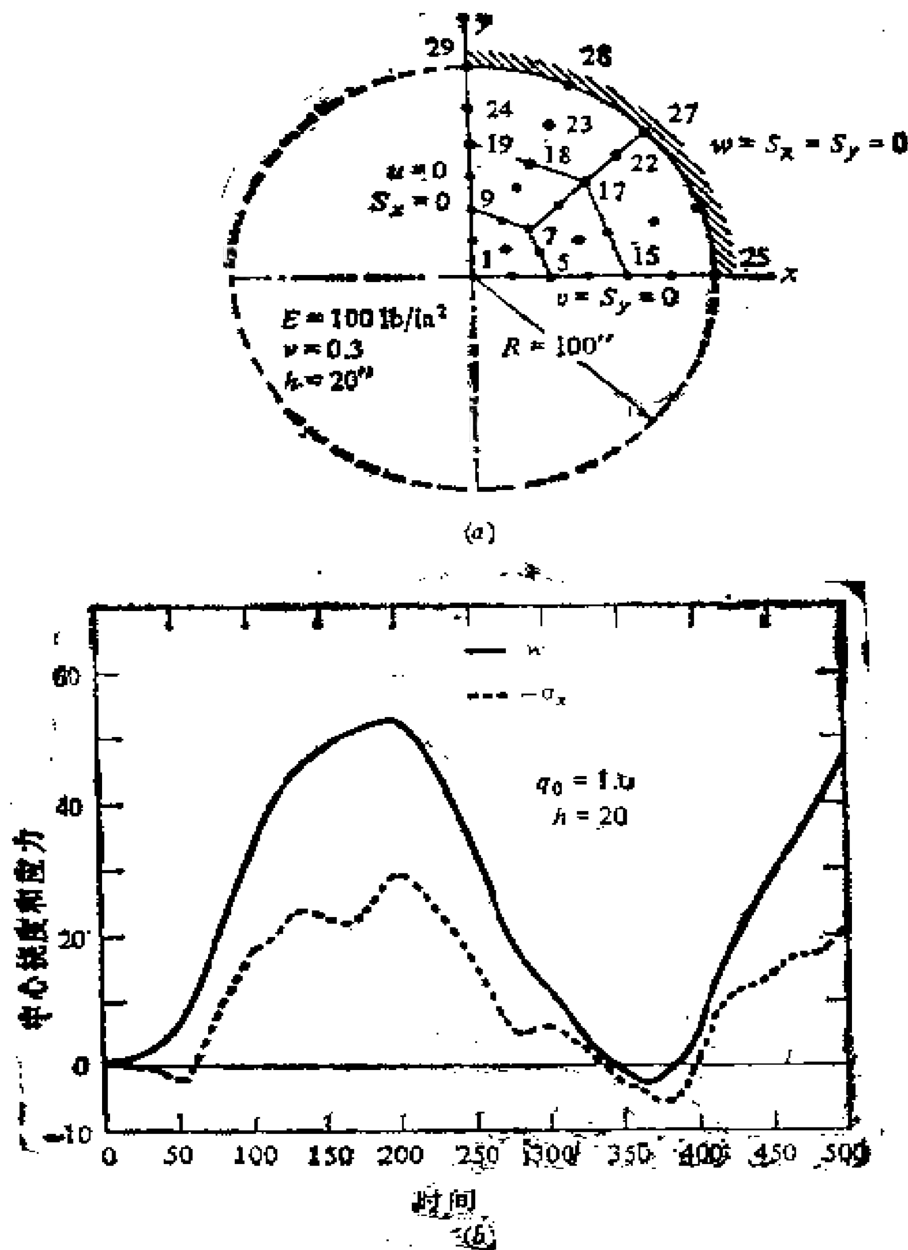
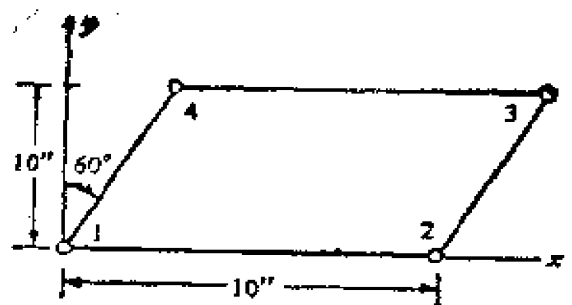


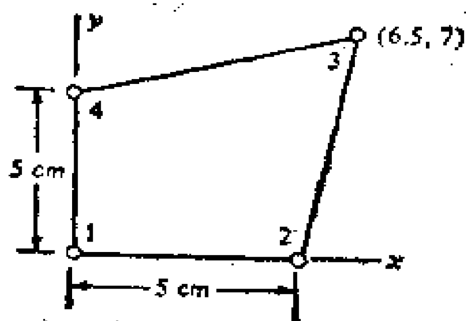
图4.60　突加均布荷载作用下的固支圆平板

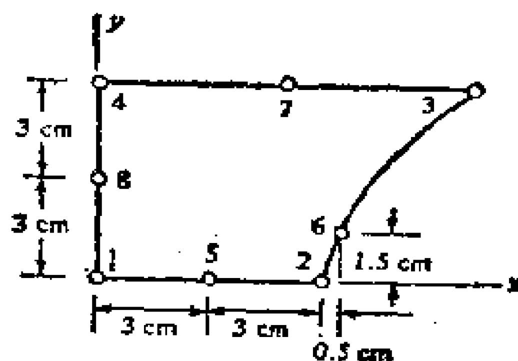
(a) 几何条件和边界条件，　(b) 中心挠度和应力与时间关系曲线

习　　题

4.67　确定习题4.67的图中给出单元的Jacobi矩阵和变换方程式。





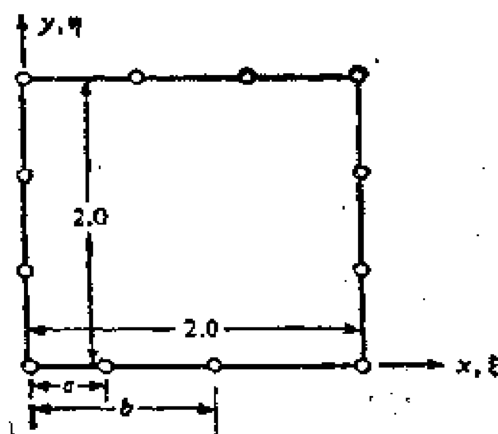


习题4.67的图

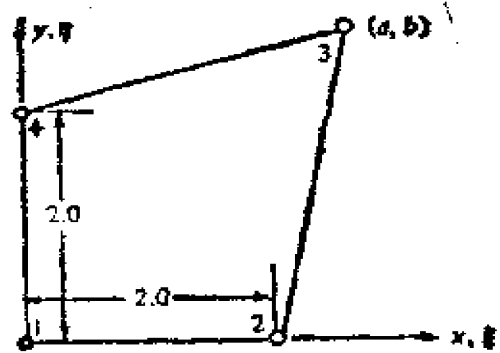
4.68 用Gauss积分法确定习题4.67b图所示均布源对四节点有限元节点的作用。

4.69 证明：图4.49所示八节点矩形元的边节点的位置为 $0.25<a<0.75$。

4.70 十二节点立方体单元如习题4.70的图所示，证明行列式J如下式：



习题4.70的图



习题4.71的图

$$J = \frac{9}{2}(2-10\xi+9\xi^2)a+\frac{9}{2}(-1+8\xi-9\xi^2)b+\frac{1}{2}(2-18\xi+27\xi^2).$$

你能从必要性$J>0$中得出什么结论？

4.71 确定习题4.71的图所示四边形单元节点3位置的条件，证明其坐标变换方程如下式：

$$x=\xi+\xi\eta(a-2),$$

$$y=\eta+\xi\eta(b-2)。$$

4.72 确定习题4.67b的图所示单元节点3的插值函数的全导数。

从习题4.73到4.105（原书误为4.108）写出程序FEM2D或程序FLATE的输入数据，并解之。f

4.73 习题4.11。

4.74 习题4.22。

4.75 习题4.25。

注f 建议将有限元解与其他文献上可找到的分析解和数值解进行比较。参看本章后面所列参考书目。

4.76 习题4.26。

4.77 习题4.29。

4.78 （输入流）习题4.59图b所示非矩形域中$U_0=1$时的粘滞不可压缩液流的流量。

4.79 分别用5×6，7×5和11×5的网格，对习题4.59图c中的问题进行数字的收敛性分析，并画出用x作函数的轴心速度图形。

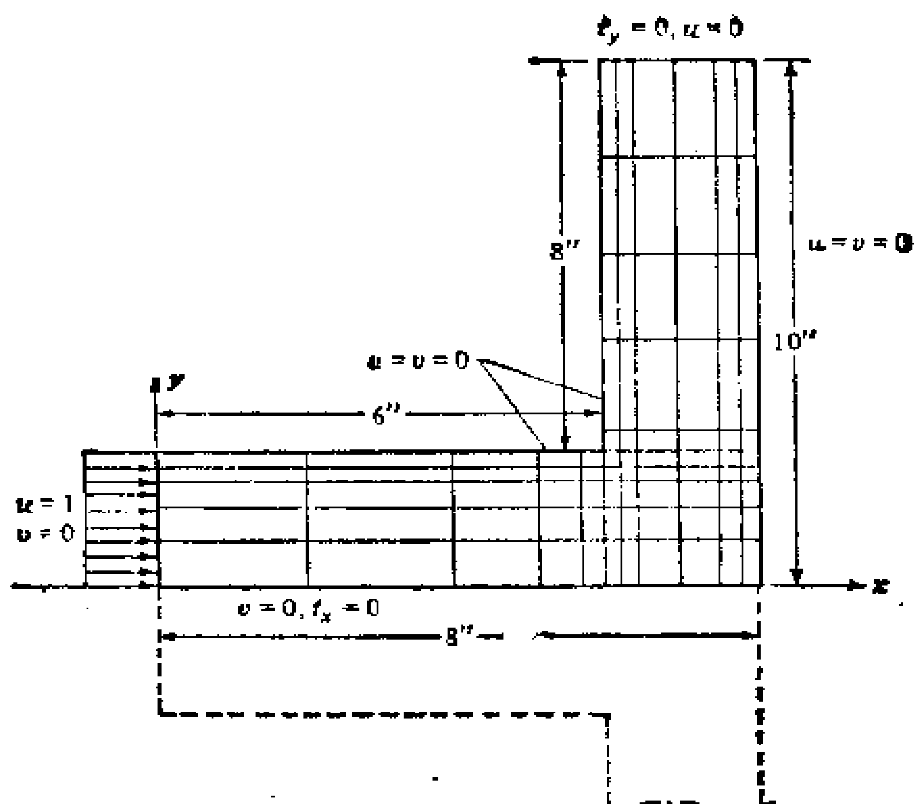
4.80 重复习题4.78，有对称放置的椭圆柱形阻碍（习题4.59的图a）。

4.81 考虑下述条件下，题4.25中的滑块支承问题，取$U_0=40$ft/s, $L=4$in$=0.333$ft, $\nu=4\times10^{-4}$ft^2/s, $h_2=0.008$in, $h_1=0.004$in, 和8×6个线性单元非均匀网格得出的数据并求其解答。研究罚参数（$10^8\sim10^{18}$）对速度场和压力的影响。

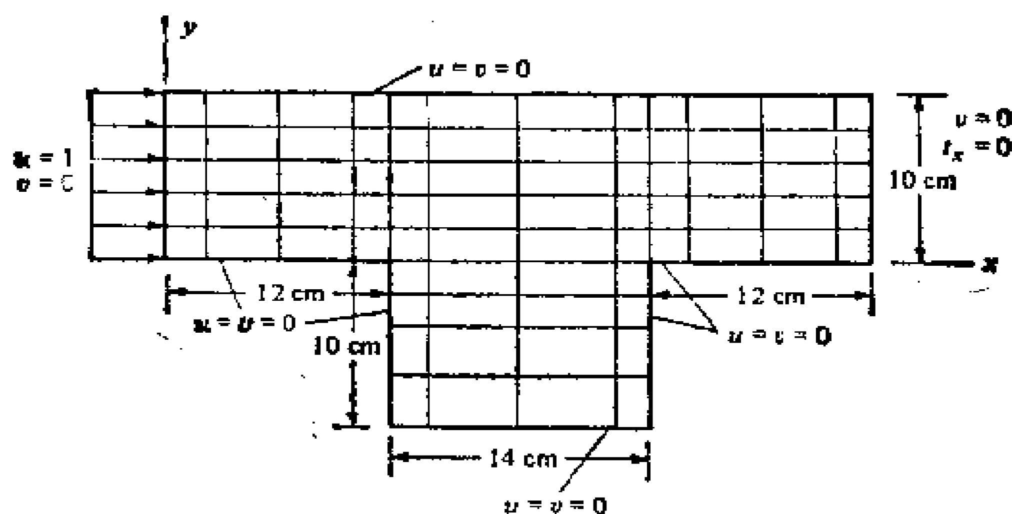
4.82 假设粘性的不可压缩液流，在一个矩形容器中，由顶盖带动，以均速$u=1.0$运动，用8×8个线性单元网格确定速度场，沿垂直中心线画出水平速度曲线。

4.83 证明例4.11的结论。

4.84 假设粘性的不可压缩液流在一个成90°角的平面T形管中，用习题4.84的图所示的网格和对称性，确定出口处的速度分布。



习题4.84的图

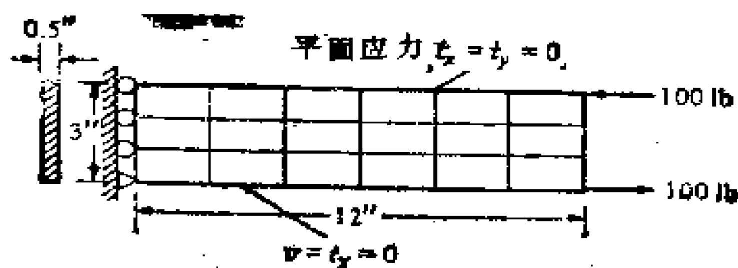


习题4.85的图

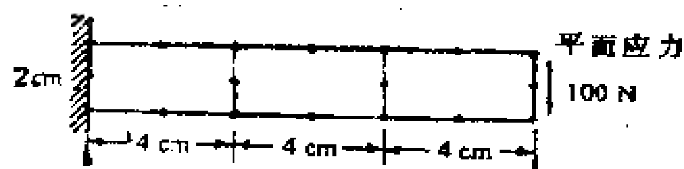
4.85 求解粘性不可压缩液流在习题4.85的图所示非矩形域的情况。

4.86—4.87 解出习题4.49图a和b中平面弹性问题。

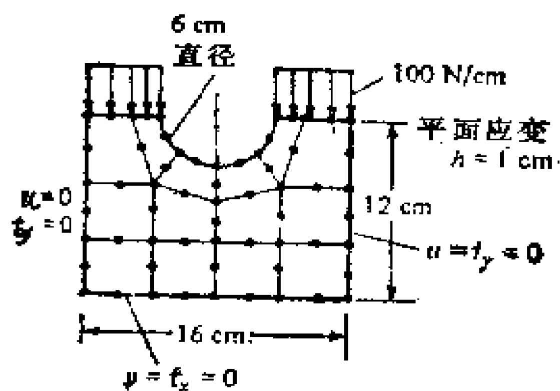
4.88—4.92 用$\gamma=0.3$和E取近似值（因各向同性），分析习题4.88—4.92的图所示平面弹性问题。



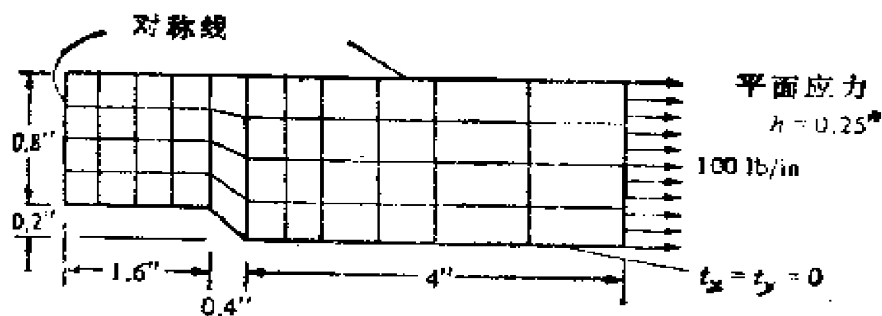
习题4.88的图



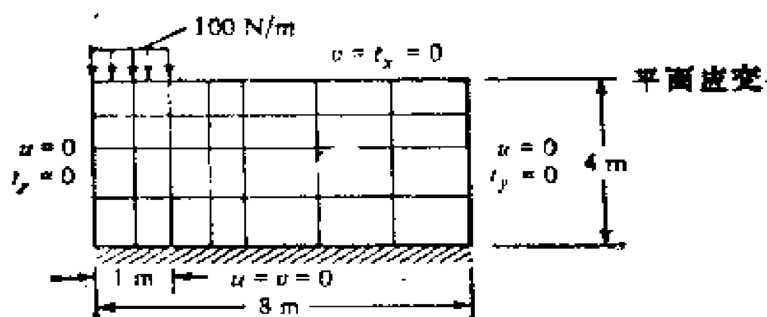
习题1.89的图



习题4.90的图



习题4.91的图



习题4.92的图

4.93 见图4.45所示简支平板。已知$E_1=25\times10^6$lb/in², $E_2=10^6$lb/in², $G_{12}=G_{13}=0.5\times10^6$lb/in², $G_{23}=0.2\times10^6$lb/in², $\gamma_{12}=0.25$,用4 × 4 不规则线元网格，求中心挠度。

4.94 同习题4.93，当平板沿垂直边固定，沿水平边简支时，求中心挠度。

4.95 假设一个各向同性的环形平板（$E=30\times10^6$lb/in², $\gamma=0.29$），外边缘简支，承受均布荷载（习题4.60的图a），确定内边缘挠度。

4.96 习题4.95中当环形平板内缘上受线荷载作用时，确定内边缘挠度。

4.97 同习题4.93,设平板中心有一方孔（边长$c=0.4$),承受均布荷载作用，求中心挠度。

在习题4.98到4.105中，假定初始条件为0。

4.98 求习题4.73的瞬时解。

4.99 求习题4.20的瞬时解。

4.100 求习题4.82的瞬时解。

4.101 修改程序FEM2D，使之包含弹性问题的瞬时分析（提示：运用程序PLATE的推理法及其格式）。

4.102 用程序PLATE解例4.12。

4.103 求习题4.95的瞬时解。

4.104 求习题4.97的瞬时解。

4.105 求习题4.93的瞬时解，设五个时间间隔后荷载被卸去。

参 考 文 献

有关流体力学问题参照第三章的参考文献

Eskinazi, S. : *Principles of Fluid Mechanics*, Allyn and Bacon, Boston(1962).

Nadai, A. : *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. II, McGraw-Hill, New York(1963).

Roache, P. J. : *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, N. M. (1972)

Schlichting, H. : *Boundary-Layer Theory* (translated by J. Kestin), 7th ed. , McGraw-Hill, New York(1979).

Verruijit, A. : *Theory of Groundwater Flow*, Gordon and Breach, New York(1970).

有关热传导问题(参照第三章的参考文献)

Bruch, J. C. , and G. Zyvoloski:"Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by the Finite Element Method, " *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **8**, pp481-494(1974).

Carslaw, H. S. , and J. C. Jaeger: *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford(1959).

Compbell, B. C. , B. Kaplan, and A. H. Moore: "A Numerical Comparison of the Crandall and Crank-Nicolson Implicit Methods for Solving a Diffusion Equation, " *Journal of Heat Transfer. Transactions of the ASME*, **88**, pp. 324-326(1966).

Donea, J. : "On the Accuracy of Finite Element Solutions to the Transient Heat-Conduction Equation, "*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **8**, pp. 103-110 (1974).

Moore, A. H., B. Kaplan, and D. B. Mitchell: "A Comparison of Crandall and Crank-Nicolson Methods for Solving a Transient Heat Conduction Problem," *International Numerical Methods in Engineering*, **9**, pp. 938-943(1975).

Wilson, E. L., and R. E. Nickell: "Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis," *Journal for Nuclear Engineering and Design*, **4**, pp276-286(1966).

Wood, W. L., and R. W. Lewis: "A Comparison of Time Marching Schemes for the Transient Heat Conduction Equation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **9**, pp. 679-690(1975).

有关平面弹性问题(参照第三章的参考文献)

Budynas, R. G.: *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, McGraw-Hill, New York(1977).

Ugural, A. C., and S. K. Fenster, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, American Elsevier, New York(1975).

Volterra, E., and J. H. Gaines: *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1971).

有关平板弯曲问题

Dym, C. L., and I. H. Shames: *Solid Mechanics: A Variational Approach*, McGraw-Hill, New York (1973).

Jones, R. M.: *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, New York(1975).

Kikuchi, F., and Y. Ando, "Rectangular Finite Element for Plate Bending Analysis Based on Hellinger-Reissner's Variational Principle," *Journal of Nuclear Science and Technology*, **9**, pp. 28-35(1972).

Reddy, J. N.: "Simple Finite Elements with Relaxed Continuity for Nonlinear Analysis of Plates," *Finite Element Methods in Engineering*, A. P. Kabaila and V. A. Pulmano, eds., The University of New South Wales, Sydney(1979), pp. 265-281.

Reddy, J. N.: "A Penalty-Plate Bending Element for the Analysis of Laminated Anisotropic Composite Plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **15**, pp. 1187-1206 (1980).

Reddy, J. N.: "On the Solutions to Forced Motions of Rectangular Composite Plates," *Journal of Applied Mechanics*, **49**, pp.

403-408(1982).

Reddy, J. N., and C. S. Tsay:"Mixed Rectangular Finite Elements for Plate Bending," *Proceedings of the Oklahoma Academy of Science*, **57**, pp. 144-148(1977).

Reismann, H., and Y. Lee: "Forced Motions of Rectangular Plates," in *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 4, D. Frederick, ed., Pergamon Press, New York, (1969) pp. 3-18.

Szabo, B. A., and G. C. Lee: "Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **1**, pp. 301-310(1969).

Szilard, R.: *Theory and Analysis of Plates*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1974).

Timoshenko, S., and S. Woinowsky-Krieger: *Theory of Plates and Shells*, 2d ed., McGraw-Hill, New York(1959).

Tsay, C. S., and J. N. Reddy: "Bending, Stability, and Free Vibration of Thin Orthotropic Plates by Simplified Mixed Finite Elements," *Journal of Sound and Vibration* (Letter to the Editor), **59**, pp. 307-311(1978).

有关时间近似问题〔亦见前述Carslaw和Jaeger(1959), Donea(1974), Moore等(1975), 和Verruijit(1970)的著作〕

Bathe, K. J.: *Finite Element Procedvres in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1982).

Chan, S. P., H. L. Cox, and W. A. Benefield, "Transient Analysis of Forced Vibrations of Complex Structural Mechanical Systems," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, **66**, pp. 457-460(1962).

Clough, R. W., and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York(1975).

Goudreau, G. L., and R. L. Taylor: "Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics," *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **2**, pp. 69-97

(1973).

Hughes, T. J. R., and W. K. Liu: "Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Stability Theory, and Implementation and Numerical Examples." *Journal of Applied Mechanics*, **45**, pp. 371-378(1978).

Johnson, D. E.:"A Proof of the Stability of the Hubolt Method," *Journal of the American Institute for Aeronautics and Astronautics*, 4, *pp.* 1450-1451. (1966).

Krieg, R. D.: "Unconditional Stability in Numerical Time Integration Methods," *Journal of Applied Mechanics*, **40**, pp. 417-421(1973).

Lax, P. D. , and R. D. Richtmyer:"Survey of the Stability of Finite Difference Equations," *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **9**, pp. 267-293(1956).

Leech, J. W. : "Stability of Finite-Difference Equations for the Transient Response of a Flat Plate," *Journal of the American Institute for Aeronautics and Astronautics*, **3**, pp. 1772-1773 (1965).

Levy, S. , and W. D. Kroll: "Errors Introduced by Finite Space and Time Increments in Dynamic Response Computation," *Journal of Research, National Bureau of Standards*, **51**, pp. 57-68 (1953).

Nickell, R. E. :"On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics," *International Journal for Solids and Structures*, **7**, pp. 301-319(1971).

Nickell, R. E. :"Direct Integration Methods in Structural Dynamics, "*Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **99**(EM2), (1972).

Tsui. T. Y., and P. Tong: "Stability of Transient Solution of Moderately Thick Plate by Finite Difference Method, "*Journal of the American Institute for Aeronautics and Astronautics*, **9**, pp 2062-2063(1971).

有关数值积分问题(求积分)

Carnahan, B., H. A. Luther, and J. O. Wilkes: *Applied Numerical Methods*, John Wiley, New York (1969).

Couper, G. R.: "Gaussian Quadrature Formulas for Triangles," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7, pp. 405-408(1973).

Froberg, C. E.: *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

Hammer, P. C., O. P. Marlowe, and A. H. Stroud: "Numerical Integration over Simplexes and Cones," *Mathematics Tables, National Research Council*(Washington), Vol. 10(1956), pp. 130-137.

Irons, B.M. "Quadrature Rules for Brick-Based Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, pp. 293-294 (1971).

Loxan, A. N., N. Davids, and A. Levenson: "Table of the Zeros of the Legendre Polynomials of Order 1-16 and the Weight Coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature Formula," *Bulletin of the American Mathematical Society*, **48**, pp. 739-743(1942).

Silvester, P.: "Newton-Cotes Quadrature Formulae for N-Dimensional Simplexes," *Proc. 2nd Canadian Congress of Applied Mechanics* (Waterloo, Ont, Canada), (1969).

Stroud, A. H., and D. Secrest: *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1966).

有关有限元方程式的解的问题

Cantin, G.: "An Equation Solver of Very Large Capacity," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, pp. 379-388(1971).

Collins, R. J.: "Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6, pp. 345-356(1973).

Cuthill, E.: "Several Strategies for Reducing the Bandwidth of Matrices," in *Sparse Matrices and Their Applications*, D. J.

Rose and R. A. Willoughby, eds., Plenum Press, New York (1972).

Engleman, M. S., R. L. Sani, and P. M. Gresho: "The Implementation of Normal and/or Tangential Boundary Conditions in Finite Element Codes for Incompressible Fluid Flow," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **2**, pp. 225-238 (1982).

Ergatoudis, J. G., B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, "Curved, Iso-parametric, Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis," *International Journal for Solids and Structures*, **4**, pp. 31-42(1968).

Faddeeva, V.N.: *Computational Methods of Linear Algebra*, Dover Publications, New York(1959).

Forsythe, G. E., and C. B. Moler: *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N. J. (1967), pp. 114-119.

Fried. :"A Gradient Computational Procedure for the Solution of Large Problems Arising from the Finite Element Discretization Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **2**, pp. 477-494(1970).

Hellen, T. K. :"A Frontal Solution for Finite Element Techniques, "Central Electricity Generating Board, Report RD/B/N1459, Berkeley Nuclear Laboratories, Berkeley, Gloucestershire (1969).

Irons, B. M. :"A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **2**, pp. 5-32(1970).

Mondkar, D. P. , and G. H. Powell:"Large Capacity Equation Solver for Structural Analysis, "*Computers and Structures*, **4**, pp. 699-728(1974).

Van Norton, R.: "The Solution of Linear Equations by the Gauss-Seidel Method," in *Mathematical Methods for Digital Computers*, vol. 1, A. Ralston and H. S. Wilf, eds., John Wiley,

New York (1960).

Wilkinson, J. H.: "The Solution of Ill-Conditioned Linear Equations," in *Mathematical Methods for Digital Computers*, Vol. 2, A. Ralston and H. S. Wilf, eds., John Wiley, New York (1967).

有关时—空有限元问题

Kohler, W., and J. Pittr: "Calculation of Transient Temperature Fields with Finite Elements in Space and Time Dimensions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **8**, pp. 625-631 (1974).

Oden, J. T.: "A General Theoy of Finite Elements II. Applications," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **1**, pp. 247-259 (1969).

Sobey, R. J.: "Hermitian Space-Time Finite Elements for Estuarine Mass Transport," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **2**, pp. 277-297 (1982).

Zienkiewicz, O. C., and C. J. Parekh: "Transient Field Problems: Two Dimensional and Three Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **2**, pp. 61-71 (1970).

第五章　高等课题的简要介绍

5-1　概述

前面各章介绍的内容足以提供建立有限元模型的基本概念，同时也足以提供与一维和二维问题中大多数线性边值问题和初值问题有关的计算机程序。然而，还有许多其它问题值得讨论。在这一章中，我们将就现行的研究直接推广到变换公式、特征值问题、三维问题以及非线性问题作一些讨论。本讨论只限于介绍有限元法对这些高等问题应用的一些概念，因此，不准备详细讨论。本章讨论的课题是：

1. 变换公式；
2. 特征值问题；
3. 非线性问题；
4. 三维问题。

对于任何这些问题的细节感兴趣的读者，可以参阅本章末尾的参考文献。

5-2　变换公式

第三、四两章中的有限元公式是建立在控制微分方程式的弱公式的基础之上的。有些情况下，控制微分方程式可以改写成其它形式的公式，这种形式使得采用低次插值函数比较容易，同时能使次变量有较好的精度（如同读者所知，这些次变量在单元之间

的边界上是不连续的)。在这一节中，我们将讨论两个这样的公式，并将说明最小二乘公式在有限元公式模型中的使用方法。具体地说，我们将研究下面的公式：

1．方程式(3.1)的最小二乘公式；

2．方程式(3.86) 的混合公式。

应该注意，选择这些特殊方程式来说明这两种公式的基本概念；而这些概念也适用于其它的方程式，还适用于二维和三维问题。例如，最小二乘公式可能适用于方程式(3.86)，混合公式可能适用于方程式(3.1)，这两种公式可以同时适用于方程式(4.1)。其它方法，如罚函数法也可以用于对一个给定问题列出方程式。

5-2-1　最小二乘法

我们来研究采用最小二乘法求方程式(3.1)的变分解的问题。在有限元法中，最小二乘法适用于典型单元。换句话说，由于单元上u的近似性：

$$u=\sum_{j=1}^{n}u_j^{(e)}\psi_j^{(e)} \tag{5.1}$$

式中，$\psi_j^{(e)}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为适当的近似函数，我们将使微分方程式(3.1) 中的残数为最小。有：

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial u_i}\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[-\frac{d}{dx}\left(a\sum_{j=1}^{n}u_j^{(e)}\frac{d\psi_j^{(e)}}{dx}\right)-f\right]^2dx\\&=2\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[-\frac{d}{dx}\left(a\sum_{j=1}^{n}u_j^{(e)}\frac{d\psi_j^{(e)}}{dx}\right)-f\right]\cdot\\&\quad\cdot\left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{d\psi_i^{(e)}}{dx}\right)\right]dx\end{aligned} \tag{5.2}$$

或

$$\sum_{j=1}^{n}K_{ij}^{(e)}u_j^{(e)}=F_i^{(e)} \tag{5.3}$$

式中

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d}{dx}\left(a\frac{d\psi_i^{(e)}}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(a\frac{d\psi_j^{(e)}}{dx}\right)dx$$

$$F_i^{(e)} = -\int_{x_e}^{x_{e+1}} f\frac{d}{dx}\left(a\frac{d\psi_i^{(e)}}{dx}\right)dx \tag{5.4}$$

在着手下一步讨论之前，注意此法几个不理想的特点，第一，最小二乘法不包含单元的自然边界条件($adu/dx=p$)。第二，考查方程式(5.4)中的系数矩阵$[K^{(e)}]$可知，$\psi_i^{(e)}$应该是最小的积（以满足非零系数)。第三，系数矩阵$[K]$和列矢量$\{F\}$已经失去了它们的物理意义。例如，在杆件纵向变形的问题中，方程式（5.4）中的系数矩阵$[K]$与刚度矩阵不对应，列矢量$\{F\}$与力矢量不对应。前面两个特点要求建立满足(基本和自然)边界条件的二次插值函数。后面的特点使物理边界条件的应用发生困难。因此，我们省去这个过程，并考虑将最小二乘法用于等效但形式不同的一对方程式。

引入附加变量(原方程式的二重变量)σ时，方程式(3.1)可以写成一对一次方程式：

$$-\left(\frac{d\sigma}{dx}+f\right)=0 \qquad a\frac{du}{dx}=\sigma \tag{5.5}$$

在杆件轴向变形的情况下，变量σ为杆件任意一点的拉力。现在我们开始建立方程式(5.5) 这是最小二乘有限元的近似公式。因为u和σ现在都是初始变量，物理边界条件的引入变得很简单。设：

$$u=\sum_{j=1}^{n} u_j^{(e)}\phi_j^{(e)} \qquad \sigma=\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^{(e)}\psi_j^{(e)} \tag{5.6}$$

一般而言，插值函数ϕ_i和ψ_i是不同的。为了简单起见，设$\psi_j=\phi_j$。将近似式（5.6)代入方程式（5.5)，并用最小二乘法讨论方程式(5.5) 的残数，得：

$$0=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[\frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{m}\sigma_j\psi_j\right)+f\right]\frac{d\psi_i}{dx}dx$$

$$=\sum_{j=1}^{m}K_{ij}^{(e)}\sigma_j+F_i^{(e)} \tag{5.7}$$

$$0=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[a^{(e)}\frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n}u_j\phi_j\right)-\sum_{j=1}^{m}\sigma_j\psi_j\right]\frac{d\phi_i}{dx}dx$$

$$=a^{(e)}\sum_{j=1}^{n}H_{ij}^{(e)}u_j-\sum_{j=1}^{m}G_{ij}^{(e)}\sigma_j \tag{5.8}$$

式中

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx \quad G_{ij}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{d\phi_i}{dx}\psi_j dx$$

$$H_{ij}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx \quad F_i^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{d\psi_i}{dx}fdx \tag{5.9}$$

因为积分只包含ψ_i和ϕ_i的一次导数，可以采用ψ_i和ϕ_i的线性插值函数，得(当$f=$常数时)

$$[K^{(e)}]=\frac{1}{h_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad [G^{(e)}]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\{F^{(e)}\}=f\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix} \quad [H^{(e)}]=[K^{(e)}] \tag{5.10}$$

考虑三个等单元的有限元网格($h_e=L/3$，$a^{(e)}=a$)。单元节点值与总的节点值之间有下列的对应关系(注意，$\sigma_1^{(e)}=-P_1^{(e)}$和$\sigma_2^{(e)}=P_2^{(e)}$，见图3.2和5.1)：

$$\begin{aligned}&u_1^{(1)}=U_1 \quad u_2^{(1)}=u_1^{(2)}=U_2 \quad u_2^{(2)}=u_1^{(3)}=U_3 \quad u_2^{(3)}=U_4\\ &\sigma_1^{(1)}=R_1 \quad \sigma_2^{(1)}=\sigma_1^{(2)}=R_2 \quad \sigma_2^{(2)}=\sigma_1^{(3)}=R_3 \quad \sigma_2^{(3)}=R_4\end{aligned} \tag{5.11}$$

式中，U_i和R_i分别表示位移和力的总值。与方程式(5.7)和(5.8)有关的集合方程式分别为：

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}R_1\\ R_2\\ R_3\\ R_4\end{Bmatrix}=f\begin{Bmatrix}1\\ -1+1\\ -1+1\\ -1\end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

$$\frac{a}{h}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{Bmatrix}$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \tag{5.13}
$$

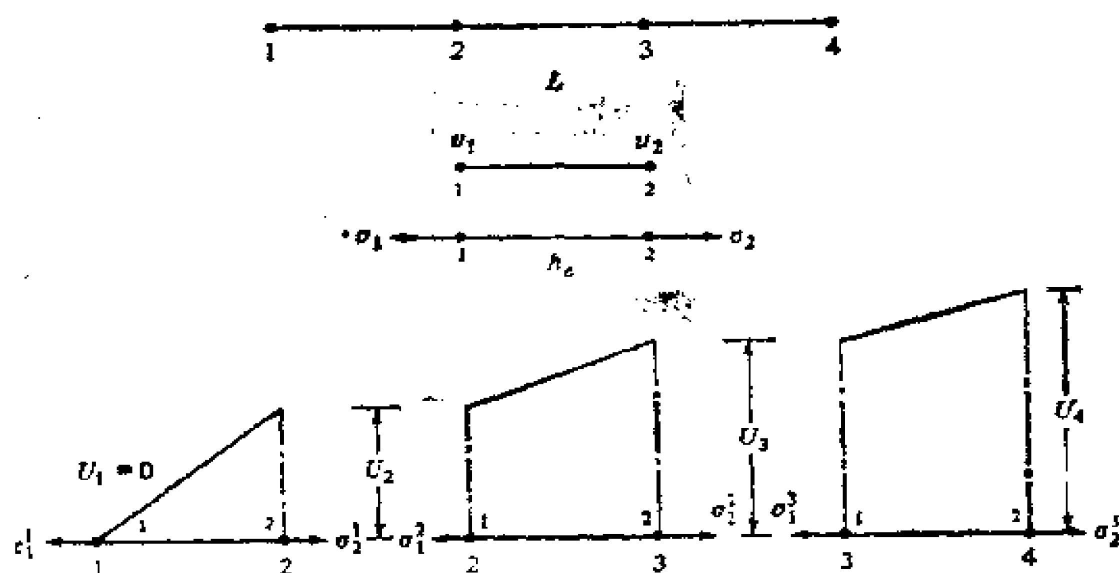


图5.1 方程式(3.1)另一种形式的典型有限单元及其集合

引入边界条件$U_1=0$和$R_4=P$，并对未知数解方程式(5.12)和(5.13)得：

$$
\begin{aligned}
&R_1=P+3fh \qquad R_2=P+2fh \qquad R_3=P+fh \\
&U_2=\frac{5fh^2}{2a}+\frac{Ph}{a} \qquad U_3=\frac{4fh^2}{a}+\frac{2Ph}{a} \\
&U_4=\frac{9fh^2}{2a}+\frac{3Ph}{a}
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

很显然，这个解与方程式(3.396)和(3.40) 的解是一致的。

5-2-2 混合公式

方程式(3.86)可以分解为一对低次方程式：

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2M}{dx^2}+f=0 \\
&\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{M}{b}=0 \quad b\neq 0
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

函数b的假设实际上永远是成立的，因为弹性模量和惯性矩都不为零；事实上，我们总是有$b>0$。方程式(3.87)中的边界条件可以改写成与因变量有关的形式

$$w(0)=\frac{dw}{dx}(0)=0 \quad M(L)=M_0$$

$$\frac{dM}{dx}(L)=F_0 \tag{5.16}$$

变分式 典型单元(两个节点的线性单元)上与方程式(5.15)有关的变分公式为：

$$\begin{aligned}0&=\int_{x_e}^{x_{e+1}}u\left(\frac{d^2M}{dx^2}+f\right)dx\\&=-\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(\frac{du}{dx}\frac{dM}{dx}-uf\right)dx-u(x_e)\left(\frac{dM}{dx}\right)\Big|_{x_e}\\&\quad+u(x_{e+1})\left(\frac{dM}{dx}\right)\Big|_{x_{e+1}}\end{aligned} \tag{5.17a}$$

和

$$\begin{aligned}0&=\int_{x_e}^{x_{e+1}}v\left(\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{M}{b}\right)dx\\&=-\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx}+\frac{vM}{b}\right)dx-v(x_e)\left(\frac{dw}{dx}\right)\Big|_{x_e}\\&\quad+v(x_{e+1})\left(\frac{dw}{dx}\right)\Big|_{x_{e+1}}\end{aligned} \tag{5.17b}$$

式中，u和v为任意函数，可以分别看作w和M的变量，方程式(5.17)中的边界项表示对w和M所作的规定，将构成变分问题的基本边界条件，而对导数dw/dx和dM/dx所作的规定，将构成变分问题的自然边界条件：

基本边界条件

对w和M的规定 (5.18a)

自然边界条件

对dw/dx和dM/dx的规定 (5.18b)

有限元式 方程式(5.17)的有限元模型可以通过将形式为(见节点变量的图5.2)

$$w=\sum_{j=1}^{m} w_j\psi_j \qquad M=\sum_{j=1}^{n} M_j\phi_j \tag{5.19}$$

的有限元近似式代入变分公式(5.17)得到。注意，从技术上说，w和M可以用不同组的插值函数ψ_j和ϕ_j进行插值(或近似表示)。有限元方程式可以方便地表示为：

$$\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}]\\ [K^{12}]^T & [K^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{w\}\\ \{M\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\end{Bmatrix} \tag{5.20a}$$

式中，矩阵$[K^{\alpha\beta}]$ $(\alpha,\ \beta=1,\ 2)$的矩阵系数$K_{ij}^{\alpha\beta}$为：

$$K_{ij}^{11}=0 \quad K_{ij}^{12}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx=K_{ji}^{21}$$

$$K_{ij}^{22}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{1}{b}\phi_i\phi_j dx$$

$$F_i^1=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\psi_i f dx-\psi_i(x_e)V_1-\psi_i(x_{e+1})V_2$$

$$F_i^2=\phi_i(x_e)\theta_1+\phi_i(x_{e+1})\theta_2 \tag{5.20b}$$

$$V_1\equiv\frac{dM}{dx}\bigg|_{x=x_e} \qquad V_2\equiv-\frac{dM}{dx}\bigg|_{x_{e+1}}$$

$$\theta_1\equiv-\frac{dw}{dx}\bigg|_{x_e} \qquad \theta_2\equiv\frac{dw}{dx}\bigg|_{x_{e+1}}$$

量V_i和θ_i是节点上与w和M有关的次变量。应该指出，为了给出方程式(5.20a) 中对称的系数矩阵，采用方程式(5.17)。

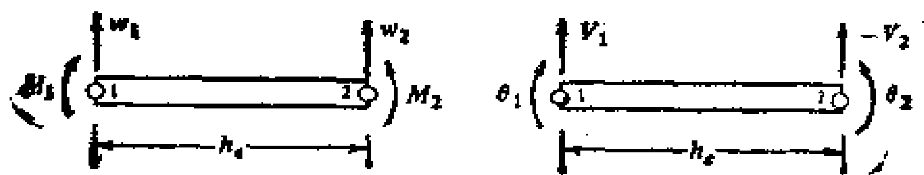


图5.2　四次方程式 (3.86) 混合有限元法的广义位移和内力

为了得出方程式(5.20)的明显形式，必须选择合适的ψ_i和ϕ_i函

数。为了简单起见，取$\psi_i = \phi_i$且ψ_i为方程式(3.12)或(3.17b)中的线性插值函数。对于固定的be和fe有($m = n = 2$)：

$$[K^{12}] = \frac{1}{h_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [K^{22}] = \frac{h_e}{6b_e}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\{F^1\} = \frac{f_e h_e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad \{F^2\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{5.21}$$

将初始变量重新排列，单元方程式(5.20a) 可以表示成

$$\frac{1}{h_e}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2a_e & -1 & a_e \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & a_e & 1 & 2a_e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_1 \\ M_1 \\ w_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{f_e h_e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -V_1 \\ \theta_1 \\ -V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{5.22}$$

式中，$a_e = h_e^2/6b_e$。

注意，通常的集合过程假定单元之间初始变量是连续的，这就导致有一个连续的弯矩场。当问题中包含特定的集中弯矩（即点弯矩）时，这个特点不是希望有的。下面的例子将说明这一点。

例5.1考虑图5.3所示的一端固定一端简支的梁。控制方程式为式(3.86)，其中，$b = EI$，$a =$ 常数，$f = 0$。边界条件为

$$w(0) = 0 \qquad \left(EI\frac{d^2 w}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=h^-}^{x=h^+} = -M_0$$

$$w(2h) = \theta(2h) = 0 \tag{5.23}$$

希望用上面讨论的混合公式求解此问题。

为了简单起见，将采用允许我们引入特定广义位移和广义力的最小单元数。因此，在网格中有两个单元和三个节点。集合刚度矩阵为：

$$
\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & a & 2 & 4a & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a & 1 & 2a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}
$$

$$
= \begin{Bmatrix} -V_1^{(1)} \\ \theta_1^{(1)} \\ -V_2^{(1)} - V_1^{(2)} \\ \theta_2^{(1)} + \theta_1^{(2)} \\ -V_2^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{5.24}
$$

采用边界条件

$$
U_1 = U_2 = U_5 = 0 \qquad -V_2^{(1)} - V_1^{(2)} = 0 \qquad \theta_2^{(1)} + \theta^{(2)} = 0
$$

$$
\theta_2^{(2)} = 0 \tag{5.25}
$$

得到：

$$
\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4a & a \\ -1 & a & 2a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

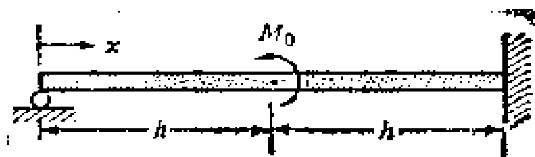


图5-3　例5.1中考虑的一端固定一端简支的梁

如果采用附加边界条件 $U_4 = M_0$，将得到一组不协调的方程式。这是由于在集合时采用了

$$
M_2^{(1)} = M_1^{(2)} = U_4 \tag{5.26}
$$

的假定得出的结果。在现在的问题中，弯矩是不连续的，因此方程式(5.26)不成立。正确的条件是

$$
M_2^{(1)} - M_1^{(2)} = M_0 \tag{2.27}
$$

假设$U_4 = M_1^{(2)} = M_2^{(1)} - M_0$，则单元2的方程式变为

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2a & -1 & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & a & 1 & 2a \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_1^{(2)} \\ M_2^{(1)} - M_0 \\ w_2^{(2)} \\ M_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -V_1^{(2)} \\ \theta_1^{(2)} \\ -V_2^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

采用边界条件(5.27)后，未知数的集合方程式变为

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4a & a \\ -1 & a & 2a \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_3 \\ M_2^{(1)} \\ U_6 \end{Bmatrix} = \frac{M_0}{h}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2a \\ a \end{Bmatrix}$$

式中，当$M_1^{(2)}$用$M_1^{(2)} = M_2^{(1)} - M_0$代替时，等式右边来自第二个单元。解为：

$$U_3 = -\frac{M_0 h^2}{32EI} \qquad M_2^{(1)} = \frac{9M_0}{16} \qquad U_6 = \frac{M_0}{8}$$
$$V_1^{(1)} = \frac{9M_0}{16h} \qquad V_2^{(1)} = -\frac{9M_0}{16h} \tag{5.29}$$

回顾混合单元中弯矩的符号规则，我们将注意到解(5.29)与惯用模型给出的结果是一致的。请读者证明这个论断。

梁弯曲方程式的罚函数公式归结为包括横向挠度和弯曲转动的位移公式。罚有限元模型可以由修正的泛函提供：

$$I_P^e(w,\theta) = \int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + fw\right]dx - Q_1 w(x_e) - Q_2\theta(x_e)$$
$$- Q_3 w(x_{e+1}) - Q_4\theta(x_{e+1})$$
$$+ \int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{\gamma}{2}\left(\frac{dw}{dx} + \theta\right)^2 dx \tag{5.30}$$

这个问题留给读者作为练习(见习题5.3)。

5-3 特征值问题

在弹性杆件、梁、薄膜、平面弹性体、板等的自振(或屈曲)分析中，我们遇到下面这一类型的方程式：

$$Au=\lambda u \qquad (在\Omega内) \tag{5.31}$$

式中，A是线性微分算子，u是问题的因变量，λ是取决于问题几何和材料性质的特征数(与u一道确定)，用λu代替源项f时，本书所考虑的所有平衡问题都可以归结为方程式(5.31)的形式(在弹性平面和板的问题中，A表示微分的矩阵算子，u表示因变量的列矢量)。方程式(5.31)的有限元法解与平衡方程式有限元法解的过程完全相似。主要的区别在于总的聚缩方程式应该采用特征值解的步骤求解。

为了进一步地理解这个问题，我们来讨论与方程式(5.31)有关的单元方程式，有

$$[K^{(e)}]\{u^{(e)}\}=\lambda[M^{(e)}]\{u^{(e)}\}+\{Q^{(e)}\} \tag{5.32}$$

式中，$[K^{(e)}]$和$\{Q^{(e)}\}$分别是通常的系数矩阵和内力的列向量，$[M^{(e)}]$是质量矩阵。

$$M_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega^{(e)}}\psi_i^{(e)}\psi_j^{(e)}\,dxdy \tag{5.33}$$

总的聚缩方程组为：

$$[K]\{U\}=\lambda[M]\{U\} \tag{5.34}$$

注意，矩阵的次数现在是$(N-r)\times(N-r)$，其中，N是有限元网格中初始自由度的总数，r是规定的自由度数。方程式(5.34)现在可以用特征值λ_i和辅助特征向量$\{U^{(i)}\}(i=1,2,\cdots,N-r)$的任何标准特征值分析的计算机程序包求解。手算时，譬如对$N-r\leqslant 3$的情况，这个步骤相当于令行列式$|K-\lambda m|$等于零并求此多项式的根。这些根是特征值。对于一个给定的特征值λ_i，特征矢量$\{U^{(i)}\}$的分量由方程式(5.34)计算，$N-r-1$个分量可以表示为其余任意分量的解。因为，我们通常对矢量的方向比对其大小更感兴趣，

因此，其余的分量值可以被选作任意非零的常数。

例5.2 研究微分方程式

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u \quad 0<x<1 \tag{5.35}$$

$$u(0)=u(1)=0$$

我们希望确定满足微分方程式和边界条件的λ和u值。例如，在两端固定的缆索的横向自振中就将遇到这个问题。

线性单元的有限元模型和矩阵的明显形式为：

$$[K^{(e)}]\{u\}=\lambda[M^{(e)}]\{u\}+\{p^{(e)}\} \tag{5.36a}$$

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx \qquad [K^{(e)}]=\frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{5.36b}$$

$$M_{ij}^{(e)}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\psi_i\psi_j\,dx \qquad [M^{(e)}]=\frac{h}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

对于四个相等单元的网格，总方程式的浓缩形式为$\left(h=\frac{1}{4}\right)$：

$$4\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_2\\ U_3\\ U_4\end{Bmatrix}=\frac{\lambda}{24}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_2\\ U_3\\ U_4\end{Bmatrix} \tag{5.37}$$

只是当下面的行列式等于零时，方程式才有非无效解：

$$0=\begin{vmatrix}8-\frac{1}{6}\lambda & -4-\frac{1}{24}\lambda & 0.0\\ -4-\frac{1}{24}\lambda & 8-\frac{1}{6}\lambda & -4-\frac{1}{24}\lambda\\ 0.0 & -4-\frac{1}{24}\lambda & 8-\frac{1}{6}\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\left(8-\frac{1}{6}\lambda\right)\left[\left(8-\frac{1}{6}\lambda\right)^2-\left(4+\frac{1}{24}\lambda\right)^2\right]$$

$$-\left(4+\frac{1}{24}\lambda\right)\left[\left(4+\frac{1}{24}\lambda\right)\left(8-\frac{1}{6}\lambda\right)-0\right]$$

$$=\left(8-\frac{1}{6}\lambda\right)\frac{1}{288}(7\lambda^2-960\lambda+9216) \tag{5.38}$$

多项式的根为：

$$\lambda_1 = 10.39 \qquad \lambda_2 = 48 \qquad \lambda_3 = 126.76 \tag{5.39a}$$

特征矢量可以由方程式（5.37）得到。求得：

$$\begin{aligned}
(U_2,\ U_3,\ U_4)_1 &= (0.707,\ 1.0,\ 0.707)\\
(U_2,\ U_3,\ U_4)_2 &= (1.0,\ 0.0,\ -1.0)\\
(U_2,\ U_3,\ U_4)_3 &= (-0.707,\ 1.0,\ -0.707)
\end{aligned} \tag{5.39b}$$

精确解为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_k &= (k\pi)^2\\ u_k &= \sin k\pi x\end{aligned}\right\} \qquad k = 1,\ 2,\ \cdots \tag{5.40}$$

方程式（5.37）中采用的质量矩阵$M_{ij}^{(e)}$与变分公式是一致的，称为协调质量矩阵。如果它是用假设得出的，则称为不协调质量矩阵。将单元的总质量均匀地集中在单元各节点上的质量矩阵，称为集中质量矩阵。在将质量集中的情况下，质量矩阵[$\bar{M}$]是一个对角矩阵，它的元素为：

$$\bar{M}_{kk}^{(e)} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i \psi_j dx \quad k = 1, 2, \ \cdots, \ n \tag{5.41}$$

在本例中有

$$\bar{M}_{11}^{(e)} = \bar{M}_{22}^{(e)} = \frac{h}{2}$$

这简化了特征值分析。我们有

$$0 = \begin{vmatrix} 8 - \frac{1}{4}\lambda & -4 & 0.0 \\ -4 & 8 - \frac{1}{4}\lambda & -4 \\ 0.0 & -4 & 8 - \frac{1}{4}\lambda \end{vmatrix}$$

它给出下面的特征值和特征矢量：

$$\bar{\lambda}_1 = 9.37 \quad \bar{\lambda}_2 = 32 \quad \bar{\lambda}_3 = 54.63$$

$$(\bar{U}_2,\ \bar{U}_3,\ \bar{U}_4)_1 = (0.707,\ 1.0,\ 0.707)$$

$$(\bar{U}_2,\ \bar{U}_3,\ \bar{U}_4)_2=(1.0,\ 0.0,\ -1.0) \tag{5.42}$$
$$(\bar{U}_2,\ \bar{U}_3,\ \bar{U}_4)_3=(-0.707,\ 1.0,\ -0.707)$$

注意，用集中质量矩阵得到的特征值λ_2和λ_3（较高的振型），比用协调质量矩阵得到的特征值的精度要低些。

5-4 非线性问题

许多工程问题可用非线性微分方程式描述。在作出某些简化的假设后，这些问题可用线性微分方程式描述。例如，弹性梁的大挠曲方程式为：

$$-\frac{d}{dx}\left\{EA\left[\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]\right\}=f$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left\{EA\frac{dw}{dx}\left[\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]\right\}+q=0 \tag{5.43}$$

式中，u为纵向位移，w为横向挠度，E为弹性模量，A为横截面面积，f为轴向分布荷载，q为横向荷载。假定斜率dw/dx与1相比很小[即 (dw/dx)、(du/dx)、$(dw/dx)^2\approx0$]，方程式(5.43)变成非偶合的，并分别归结为方程式（3.1）和（3.86）。然而，当斜率并不太小时，我们必须求解偶合的非线性方程组（5.43）。

非线性问题的另一个例子，由不可压缩的粘性流体方程式提供。当对流效应比粘结效应大时，方程式（4.188）应该修改，以便包含对流的项次，即应该解Navier—Stokes方程式：

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\mu\left[2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial P}{\partial x}=f_x$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial P}{\partial y}=f_y \tag{5.44}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

式中，ρ为流体的密度，其余符号与4—5—3节中所述的意义相同。

非线性问题的有限元法与线性问题非常相同。主要的区别在于有限元方程式的解。我们在这里说明方法的细节问题，并对采用 Navier–Stokes 方程式(5.44)和压力—速度法求解的步骤作一些评述。

单元上方程式(5.44)的变分公式为

$$\int_{\Omega(e)}\left\{w_1\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+[\cdots]\right\}dxdy-\oint_{\Gamma(e)}w_1t_xds=0$$

$$\int_{\Omega(e)}\left\{w_2\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+[\cdots]\right\}dxdy-\oint_{\Gamma(e)}w_2t_yds=0$$

$$\int_{\Omega(e)}w_3\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0 \tag{5.45}$$

式中，$[\cdots]$表示方程式(4.192)方括号中的表达式。这些方程式的有限元模型为：

$$\begin{bmatrix}[\overline{K}^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}]\\ [K^{12}]^T & [\overline{K}^{22}] & [K^{23}]\\ [K^{13}]^T & [K^{23}]^T & [0]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u\}\\ \{v\}\\ \{P\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{5.46}$$

式中，$[K^{\alpha\beta}]$和$\{F^\alpha\}$(α，$\beta=1$，2，3)与方程式(4.196)中的定义相同且

$$\overline{K}^{11}_{ij}=K^{11}_{ij}+\rho\int_{\Omega(e)}\psi_i\left(\bar{u}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\overline{K}^{22}_{ij}=K^{22}_{ij}+\rho\int_{\Omega(e)}\psi_i\left(\bar{u}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy \tag{5.47}$$

$$\bar{u}=\sum_{i=1}^{r}\bar{u}_i\psi_i\qquad \bar{v}=\sum_{i=1}^{r}\bar{v}_i\psi_i$$

式中，$\bar{u}$和$\bar{v}$是假设为已知的速度分量。

很显然，单元系数矩阵以及因此总的系数矩阵取决于事先未

知的速度场。因此，要求采用迭代法求解。在第一次迭代开始时，假定速度场为零，由总的方程式解出节点的速度和压力（它与方程式(4.195)的解对应）。第二次迭代中，用第一次迭代得出的速度场求系数矩阵，然后再解集合方程式得节点速度。如此反复，直至两次相邻的迭代末尾所得到的速度场之差小于预先给定的一个很小的数为止。收敛性准则可以表示为

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(|U_i^{(r)}-U_i^{(r+1)}|^2+|V_i^{(r)}-V_i^{(r+1)}|^2\right)\right]^{1/2}}{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(|U_i^{(r+1)}|^2+|V_i^{(r+1)}|^2\right)\right]^{1/2}} \leqslant 10\% \tag{5.48}$$

式中，$(U_i^{(r)}$、$V_i^{(r)})$表示第r次迭代末尾节点i的速度。

还有求解非线性方程式的其它方法，如Newton–Raphson法，修正的Newton–Raphson法等。感兴趣的读者可以参阅更高等的有限元教科书。

5-5 三维问题

第三、四章中关于一维和二维问题的大部分基本概念可以推广到三维问题中。三维问题要求大量的贮存单元和很长的上机时间。为了完整性起见，我们在这里讨论三维问题的Poisson方程式和几种三维单元。

考虑Poisson方程式

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_3\frac{\partial u}{\partial z}\right)=f \text{ 在}\Omega\text{中} \tag{5.49}$$

$$u=\hat{u}\text{ 在}\Gamma_1\text{上}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}n_x+k_2\frac{\partial u}{\partial y}n_y+k_3\frac{\partial u}{\partial z}n_z\right)=\hat{q}\text{ 在}\Gamma_2\text{上} \tag{5.50}$$

式中，$k_i=k_i(x, y, z)$ 和$f=f(x, y, z)$ 是三维域Ω中的Poisson函数，$\hat{u}$和$\hat{q}$分别为域表面Γ和Γ_1和Γ_2部分上给定的Poisson

函数（见图5.4）。假设域Ω用一些三维单元$\Omega^{(e)}$如四面体单元和棱柱体单元（它们是三角形单元和矩形单元的三维引伸）划分。

单元$\Omega^{(e)}$上方程式（5.49）的变分公式为：

$$0=\int_{\Omega^{(e)}} v\Big[-\frac{\partial}{\partial x}\Big(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\Big)-\frac{\partial}{\partial z}\Big(k_3\frac{\partial u}{\partial z}\Big)-f\Big]dxdydz$$

$$=\int_{\Omega^{(e)}}\Big[k_1\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+k_2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+k_3\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}-vf\Big]dxdydz-\oint_{\Gamma^e} vqds \tag{5.51}$$

式中

$$q\equiv k_1\frac{\partial u}{\partial x}n_x+k_2\frac{\partial u}{\partial y}n_y+k_3\frac{\partial u}{\partial z}n_z \tag{5.52}$$

初始变量是u，次变量为q。

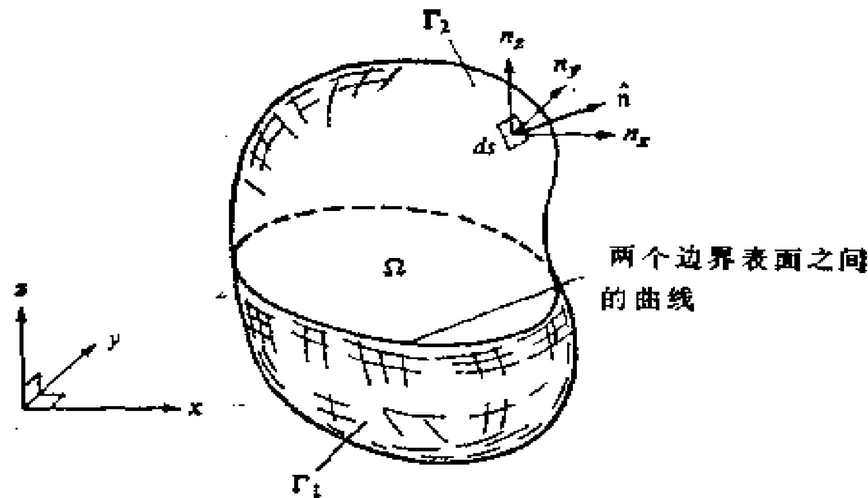


图5.4　表示表面单元ds、单位法线和它的分量$\hat{n}=(n_1,\ n_2)$以及边界Γ两部分的三维域

假定单元$\Omega^{(e)}$上有限元的插值形式为

$$u=\sum_{j=1}^{s}u_j\psi_j^{(e)}(x,\ y,z) \tag{5.53}$$

并以$v=\psi_i$和方程式(5.53)代入方程式(5.51)，得

$$[K^{(e)}]\{u^{(e)}\}=\{f^{(e)}\}+\{Q^{(e)}\} \tag{5.54}$$

式中

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega^{(e)}}\left(k_1\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+k_2\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}+k_3\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)dxdydz \tag{5.55}$$

$$f_i^{(e)}=\int_{\Omega^{(e)}}f\psi_i dxdydz \qquad Q_i^{(e)}=\oint_{\Gamma^{(e)}}q\psi_i ds$$

插值函数$\psi_i^{(e)}$与二维单元的插值函数有相同的一般性质：

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i^{(e)}(x,y,z)=1 \tag{5.56}$$

$$\psi_i^{(e)}(x_j,y_j,z_j)=\delta_{ij}$$

方程式的集合、边界条件的引入以及方程式的求解，与第四章二维问题的有关方法完全相似。我们在这里对两种单元的几何特征及其计算方法进行讨论。

方程式（5.55）中的单元矩阵要求采用x、y和z的最小线性的插值函数。我们在这里考虑两种线性单元：四面体单元和棱柱体(或块)单元。这两种单元可以用下面形式的函数近似表示：

$$u(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z \qquad \text{四节点四面体单元}$$

$$u(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z+a_4yz+a_5xz+a_6xy+a_7xyz \qquad \text{八节点棱柱体单元} \tag{5.57}$$

这些插值函数，可以像第三章和第四章所述的方法确定。

如果用数字计算单元矩阵，可以采用等参数单元的概念。单元的几何特征可以用变换方程式：

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i\hat{\psi}_i(\xi,\eta,\zeta)$$

$$y=\sum_{i=1}^{n}y_i\hat{\psi}_i(\xi,\eta,\zeta) \tag{5.58}$$

$$z=\sum_{i=1}^{n}z_i\hat{\psi}_i(\xi,\eta,\zeta)$$

进行描述。经过这些变换后，主四面体和主棱柱体单元变换成如图5.5所示的任意四面体单元和任意六面体单元。第四章所述的Jacobi矩阵定义和数值积分法则可以很容易地引伸到三维的情况。

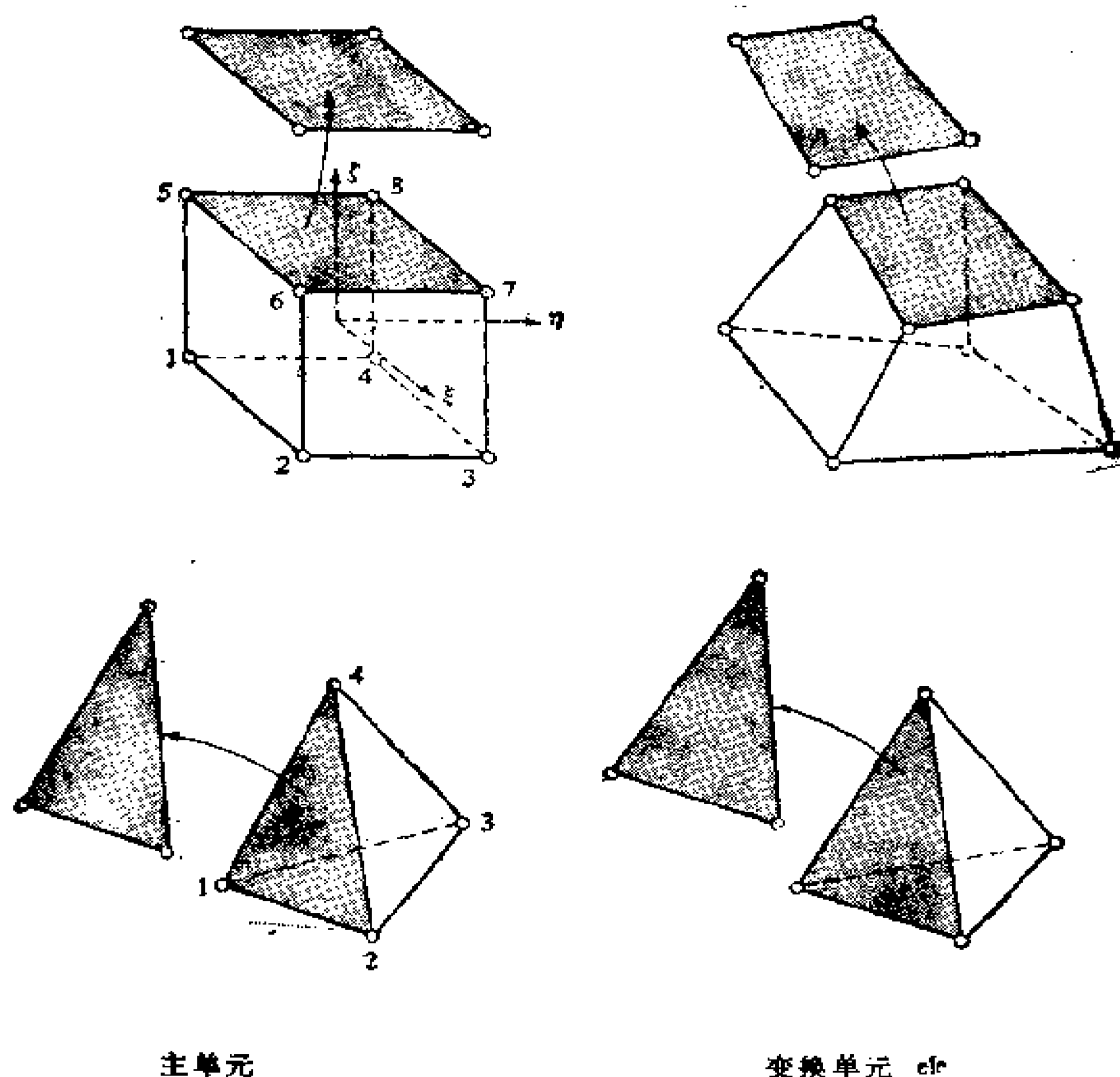


图5.5 线性三维单元：四面体单元和棱柱体单元（它们的表面是二维的三角形或矩形）

习　　题

5.1　采用混合法推导方程式（3.1），并证明线性插值情况下的单元方程式与用普通方法得到的方程式是等效的。

5.2　采用罚函数法推导方程式（3.1），并用线性插值函数将单元方程式写成明显的形式。

5.3　采用方程式（5.30）中的二次泛函发展罚单元，并用横向挠度 ω 和转角θ的线性插值函数推导单元矩阵。

5.4　求长度为L、抗弯刚度为EI和在$x=L/2$处承受集中弯矩M_0的悬臂梁的混合有限元解，并与精确解相比，二者有何差别？

5.5　用四个线性的单元求与下列微分方程式有关的特征值问题（见习题3.25）：

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u \qquad 0<x<1$$

$$u(0)=0 \qquad u(1)+\frac{du}{dx}(1)=0$$

5.6　求长度为L、密度为ρ、抗弯刚度为EI的简支梁的基本频率。在半跨梁中采用两个单元。

5.7　采用图4.8的四个单元的网格求下列问题的特征值：

$$-\nabla^2u=\lambda u \qquad 0<(x,y)<1$$

在所有边界上　　$u=0$

5.8　单元上与偶合非线性微分方程式（5.43）有关的二次泛函为：

$$I(u,w)=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{1}{2}\left[EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2+EA\frac{du}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2\right]\times dx+\int_{x_e}^{x_{e+1}}(fu+qw)dx+\text{边界项}$$

采用u的线性插值和w的三次插值代数形式的有限元系数矩阵。

5.9　假定单元系数中的非线性部分为常数，计算习题5.8中的单元矩阵。

5.10 给出单元 (x_e, x_{e+1}) 上下列非线性方程式的有限元公式：

$$-\frac{d}{dx}\left(u\frac{du}{dx}\right)+1=0 \qquad 0<x<1$$

$$\frac{du}{dx}(0)=0 \qquad u(1)=\sqrt{2}$$

5.11 采用4-4-3节说明的替换步骤推导八个节点的棱柱体单元的插值函数ψ_1、ψ_5和ψ_8。

5.12 给出带有对流边界条件的三维热传导方程式的有限元公式。

5.13 给出三维流方程式的罚有限元模型。

5.14 采用空间一时间单元讨论方程式（4.230）的三维公式。假设有限元的近似式为（见习题4.66）

$$u(x,y,t)=\sum_{j=1}^{n}u_j\psi_j(x,y,t)$$

5.15 方程式（5.55）中，当f为常数f_0和q是常数q_0时，求主棱柱单元上力矢量的分量$f_i^{(e)}$和$Q_i^{(e)}$。

参 考 文 献

Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1982).

Cook, R. D.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2d ed., John Wiley, New York (1981).

Desai, C. S., and J. F. Abel: *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold, New York (1972).

Gallagher, R. H.: *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1975).

Oden, J. T.: *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York (1972)

Zienkiewicz, O. C.: *The Finite Element Method*, 3d ed., McGraw-Hill, New York (1977).

附录I 计算机程序FEM1D

```
C                     P R O G R A M    F E M 1 D                              FEM00010
C      (AN IN-CORE FINITE-ELEMENT ANALYSIS COMPUTER PROGRAM)                  FEM00020
C                                                                             FEM00030
C       ..................................................................... FEM00040
C      .                                                                    . FEM00050
C      . FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF SECOND- AND FOURTH-ORDER EQUATIONS      . FEM00060
C      .                    IN ONE DIMENSION                                . FEM00070
C      .                                                                    . FEM00080
C       ..................................................................... FEM00090
C      .                                                                    . FEM00100
C      . D E S C R I P T I O N   O F   T H E   V A R I A B L E S            . FEM00110
C      .                                                                    . FEM00120
C      .                                                                    . FEM00130
C      .  AL..............LENGTH OF THE DOMAIN                              . FEM00140
C      .                                                                    . FEM00150
```

```
C     • AX0, AX1,                                                            • FEM00160
C     • BX0, BX1,…COEFFICIENTS IN THE DIFFERENTIAL EQUATION (SEE STIFF)      • FEM00170
C     • CX0, CX1                                                             • FEM00180
C     •                                                                      • FEM00190
C     • ALFA, BETA,                                                          • FEM00200
C     • A0, A1, ……PARAMETERS IN THE  TIME  APPROXIMATION  SCHEMES            • FEM00210
C     • A3, A4                                                               • FEM00220
C     •                                                                      • FEM00230
C     • COEF(I, J).ARRAY  FOR  STORING  AX0, AX1 …, FO, F1,                  • FEM00240
C     •          AX0=COEF(1,1), AX1=COEF(1, 2), ETC. FOR 1-TH ELEMENT        • FEM00250
C     •                                                                      • FEM00260
C     • DT………TIME INCREMENT FOR TIME-DEPENDENT PROBLEMS                      • FEM00270
C     • EC(I, J)…ARRAY OF GLOBAL COORDINATES OF NODE J OF ELEMENT 1          • FEM00280
C     • ELX……SAME AS EC(I, J)  BUT USED TO TRANSFER TO  'STIF'               • FEM00290
C     • ELSTIF…ELEMENT  COEFFICIENT (STIFFNESS) MATRIX                       • FEM00300
C     • ELF………ELEMENT  FORCE VECTOR                                          • FEM00310
C     • GF, GFO…COLUMN VECTORS FOR DISPLACEMENTS AND THEIR TIME              • FEM00320
C     • GF1, GF2   DERIVATIVES (GF1=D (GF)/DT, GF2=D(GF1)/DT)                • FEM00330
C     • ICONT……INDICATOR FOR CONTINUITY OF THE DATA (0, NO; 1, YES)          • FEM00340
C     •                                                                      • FEM00350
C     • IELEM……INDICATOR FOR THE TYPE OF FINITE ELEMENT,                     • FEM00360
```

```
C     .          IELEM=0, 2-NODE ELEMENT FOR FOURTH-ORDER  PROBLEMS      .FEM00370
C     .          IELEM=1, 2-NODE ELEMENT FOR SECOND-ORDER  PROBLEMS      .FEM00380
C     .          IELEM=2, 3-NODE ELEMENT FOR SECOND-ORDER  PROBLEMS      .FEM00390
C     .          IELEM=3, 4-NODE ELEMENT FOR SECOND-ORDER  PROBLEMS      .FEM00400
C     .                                                                  .FEM00410
C     .ITEM......INDICATOR FOR TRANSIENT (TIME-DEPENDENT) ANALYSIS       .FEM00420
C     .          ITEM=0, STATIC (NOT TIME-DEPENDENT) ANALYSIS            .FEM00430
C     .          ITEM=1, FIRST-ORDER TIME DERIVATIVES INVOLVED           .FEM00440
C     .          ITEM=2, SECOND-ORDER TIME DERIVATIVES INVOLVED          .FEM00450
C     .                                                                  .FEM00460
C     .GSTIF.....GLOBAL (THAT IS, ASSEMBLED) COEFFICIENT MATRIX          .FEM00470
C     .          IN UPPER-HALF BANDED FORM (OF ORDER NEQ BY NHBW)        .FEM00480
C     .GF........COLUMN VECTOR OF GLOBAL FORCES BEFORE GOING INTO        .FEM00490
C     .          THE SUBROUTINE 'SOLVE', AND CONTAINS THE SOLUTION       .FEM00500
C     .          WHEN COMES OUT OF THE SUBROUTINE 'SOLVE'                .FEM00510
C     .NBDY......NUMBER OF SPECIFIED PRIMARY DEGREES OF FREEDOM          .FEM00520
C     .IBDY......COLUMN OF SPECIFIED PRIMARY DEGREES OF FREEDOM          .FEM00530
C     .VBDY......COLUMN OF SPECIFIED VALUES OF THE ENTRIES IN IBDY       .FEM00540
C     .NBF.......NUMBER OF SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF FREEDOM        .FEM00550
C     .IBF.......COLUMN OF SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF FREEDOM        .FEM00560
C     .VBF.......COLUMN OF SPECIFIED VALUES OF THE ENTRIES IN IBF        .FEM00570
```

```
C     ·NRMAX……ROW-DIMENSION OF 'GSTIF' IN DIMENSION STATEMENT          ·FEM00580
C     ·NCMAX……COLUMN-DIMENSION OF 'GSTIF' IN DIMENSION STATEMENT       ·FEM00590
C     ·NPE………NUMBER OF NODES PER ELEMENT                              ·FEM00600
C     ·NDF………NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM PER NODE                    ·FEM00610
C     ·NEM………NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH                           ·FEM00620
C     ·NEQ………TOTAL DEGREES OF FREEDOM IN THE FINITE ELEMENT MODEL     ·FEM00630
C     ·NHBW……HALF BAND WIDTH OF THE GLOBAL COEFFICIENT MATRIX          ·FEM00640
C     ·NGP………NUMBER OF GAUSS POINTS USED IN THE INTEGRATION           ·FEM00650
C     ·NN………NUMBER OF TOTAL DEGREES OF FREEDOM IN THE ELEMENT         ·FEM00660
C     ·NNM………NUMBER OF NODES IN THE FINITE ELEMENT MESH               ·FEM00670
C     ·NOD (I, J) …GLOBAL NODE NUMBER CORRESPONDING TO THE J-TH NODE   ·FEM00680
C     ·          OF THE I-TH ELEMENT (CONNECTIVITY MATRIX)             ·FEM00690
C     ·NPRNT……INDICATOR FOR PRINT (NPRNT=1) OR NOPRINT (NPRNT=0)       ·FEM00700
C     ·          OF ELEMENT MATRICES AND GLOBAL MATRICES               ·FEM00710
C     ·NTIME……NUMBER OF TIME STEPS (IN THE TRANSIENT ANALYSIS)         ·FEM00720
C     ·X………VECTOR OF THE GLOBAL COORDINATES OF GLOBAL NODES           ·FEM00730
C     ·                                                                ·FEM00740
C     ·NOTE:DIMENSION STATENENTS IN THE MAIN PROGRAM SHOULD BE         ·FEM00750
C     ·       MODIFIED TO MEET THE REQUIREMENTS OF THE PROBLEM         ·FEM00760
C     …………………………………………………………………………………………………………………………… ·FEM00770
```

```
C                                                                    FEM00780
C                                                                    FEM00790
      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)                                      FEM00800
      DIMENSION GSTIF(55, 4), GF(55), GFO(55), GF1(55), GF2(55), IBDY(9),  FEM00810
     *          VBDY(9), X(55), IBF(10), VBF(10), TITLE(20), NOD(55, 4),  FEM00820
     *          EC(55, 4), COEF(55, 8)                               FEM00830
      COMMON/STF/ELSTIF(4, 4), ELF(4), ELX(4), W0(4), W1(4), W2(4)   FEM00840
      COMMON/STF1/A0, A1, A2,A3, A4, AX0,AX1,BX0,BX1,CX0,CX1, C0,F0,F1,  FEM00850
      DATA NRMAX, NCMAX/55, 4/                                       FEM00860
C                                                                    FEM00870
C     ..............................................................  FEM00880
C     *                                                          *   FEM00890
C     *     P R E P R O C E S S O R   U N I T                    *   FEM00900
C     *                                                          *   FEM00910
C     *.............................................................  FEM00920
C                                                                    FEM00930
C     R E A D I N G   T H E   P R O B L E M   D A T A   H E R E      FEM00940
C                                                                    FEM00950
      READ 300, TITLE                                                FEM00960
      READ 310, NPRNT, IELEM, NPE, NDF,NEM,NBDY,NBF,ICONT,ITEM,NTIME FEM00970
      READ 320, AL, XO                                               FEM00980
```

```
      IF (ICONT.EQ. 1) READ  320, AX0, AX1, BX0, BX1, CX0, CX1, F0, F1      FEM00990
      IF (ITEM.GT.0) REA, 320, ALFA, BETA, DT, C0                           FEM01000
      READ  310, (IBDY(I), I=1, NBDY)                                       FEM01010
      READ  320, (VBDY(I), I=1, NBDY)                                       FEM01020
      IF(NBF. EQ. 0)GOTO 5                                                  FEM01030
      READ  310, (IBF(I), I=1, NBF)                                         FEM01040
      READ  320, (VBF(I), I=1, NBF)                                         FEM01050
C                                                                           FEM01060
    5 NT=0                                                                  FEM01070
      T=0.0                                                                 FEM01080
      NHBW=NPE*NDF                                                          FEM01090
      PRINT  330                                                            FEM01100
      IF(IELEM. EQ. 0) PRINT  340                                           FEM01110
      IF(IELEM. NE. 0)PRINT  350                                            FEM01120
      PRINT  300, TITLE                                                     FEM01130
      IF (ITEM. NE. 0) PRINT  370                                           FEM01140
      IF (ITEM. GT. 0) PRINT  480, ALFA, BETA, DT, CO                       FEM01150
      NNM=NEM*(NPE-1)+1                                                     FEM01160
      NEQ=NNM*NDF                                                           FEM01170
      NN=NPE*NDF                                                            FEM01180
      DO  10  I=1, NPE                                                      FEM01190
```

```
   10 NOD(1, I) = I                                          FEM01200
      DO 20 N=2, NEM                                         FEM01210
      DO 20 I=1, NPE                                         FEM01220
   20 NOD(N, I)=NOD(N-1, I)+NPE-1                            FEM01230
      PRINT 390, NEM, NNM, NDF                               FEM01240
      IF(ICONT. EQ. 0) GOTO 40                               FEM01250
C                                                            FEM01260
C     GLOBAL COORDINATES FOR A UNIFORM MESH ONLY             FEM01270
C                                                            FEM01280
      DX=AL/(NNM-1)                                          FEM01290
      DO 30 I= , NNM                                         FEM01300
   30 X(I)=DX*(I-1)+X0                                       FEM01310
      PRINT380, (X(I), I=1, NNM)                             FEM01320
      PRINT 380, AX0, AX1, BX0, BX1, CX0, CX1, F0, F1        FEM01330
   40 IF (ITFM. EQ. 0) GOTO 60                               FEM01340
C                                                            FEM01350
C     INPUT THE INITIAL CONDITIONS HERE                      FEM01360
C                                                            FEM01370
      READ 320, (GFO(I), I=1, NEQ)                           FEM01380
      READ 320, (GF1(I), I=1, NEQ)                           FEM01390
      READ 320, (GF(I), I=1, NEQ)                            FEM01400
C                                                            FEM01410
```

```
C     COMPUTE PARAMETERS FOR THE TIME-APPROXIMATION SCHEMES              FEM01420
C                                                                        FEM01430
      A0=1.0/BETA/(DT*DT)                                                FEM01440
      A1=A0*DT                                                           FEM01450
      A2=0.5/BETA-1.0                                                    FEM01460
      A3=(1.0-ALFA)*DT                                                   FEM01470
      A4=ALFA*DT                                                         FEM01480
C                                                                        FEM01490
C     *..................................................*               FEM01500
C     *                                                  *               FEM01510
C     *      P R O C E S S O R   U N I T                 *               FEM01520
C     *                                                  *               FEM01530
C     *..................................................*               FEM01540
C                                                                        FEM01550
C     DO-LOOP ON TIME BEGINS HERE. FOR ITEM=2,THE INITIAL CONDITIONS     FEM01560
C     ON SECOND DERIVATIVE (GF2(I)) ARE COMPUTED IN THE PROGRAM          FEM01570
C                                                                        FEM01580
      IF (ITEM.EQ.2) GOTO 60                                             FEM01590
   50 T=T+DT                                                             FEM01600
      PRINT 420, T                                                       FEM01610
C                                                                        FEM01620
C     INITIALIZE GLOBAL MATRICES                                         FEM01630
```

```
C                                                                          FEM01640
   60 DO 70 I=1, NEQ                                                       FEM01650
      IF (NT. EQ. 1) GF2(I)=GF(I)                                          FEM01660
      GF(I)=0.0                                                            FEM01670
      DO 70 J=1, NHBW                                                      FEM01680
   70 GSTIF(I, J)=0.0                                                      FEM01690
C                                                                          FEM01700
C     DO-LOOP ON NUMBER OF ELEMENTS(FOR ELEMENT CALCULATIONS)BEGINS        FEM01710
C                                                                          FEM01720
      DO 150 N=1, NEM                                                      FEM01730
      IF (ICONT. EQ. 1) GOTO 90                                            FEM01740
      IF (NT. GT. O) GOTO 80                                               FEM01750
C                                                                          FEM01760
C     R E A D   I N   E L E M E N T   D A T A   H E R E                    FEM01770
C                                                                          FEM01780
      READ 320, (EC (N, I), I=1, NPE)                                      FEM01790
      READ 320, (COEF (N, I), I=1, 8)                                      FEM01800
      PRINT 430, N, (EC(N, I), I=1, NPE)                                   FEM01810
      PRINT 380, (COEF (N, I), I=1, 8)                                     FEM01820
   80 AX0=COEF(N, 1)                                                       FEM01830
      AX1=COEF(N, 2)                                                       FEM01840
      BX0=COEF(N, 3)                                                       FEM01850
```

```
      BX1=COEF(N, 4)                                            FEM01860
      CX0=COEF(N, 5)                                            FEM01870
      CX1=COEF(N, 6)                                            FEM01880
      F0=COEF(N, 7)                                             FEM01890
      F1=COEF(N, 8)                                             FEM01900
   90 L=0                                                       FEM01910
C                                                               FEM01920
C     TRANSFER THE GLOBAL DATA TO THE ELEMENT                   FEM01930
C                                                               FEM01940
      DO 100 I=1, NPE                                           FEM01950
      NI=NOD(N, I)                                              FEM01960
      IF (ICONT.EQ.1) ELX(I)=X (NI)                             FEM01970
      IF (ICONT.EQ.0) ELX (I) =EC (N, I)                        FEM01980
      IF (ITEM.EQ.0) GOTO 100                                   FEM01990
      LI=(NI-1)*NDF                                             FEM02000
      DO 95 J=1, NDF                                            FEM02010
      LI=LI+1                                                   FEM02020
      L=L+1                                                     FEM02030
      W0 (L) =GF0 (LI)                                          FEM02040
      W1 (L) =GF1 (LI)                                          FEM02050
   95 W2 (L) =GF2 (LI)                                          FEM02060
  100 CONTINUE                                                  FEM02070
```

```
C                                                            FEM02080
      CALL  STIFF (IELEM, NN, NPE, T, ITEM)                  FEM02090
      IF (T.GT.0.0) GOTO  120                                FEM02100
      IF (NPRNT.EQ.0) GOTO  120                              FEM02110
      IF (N.GT.1.OR.NT.GT.1) GOTO  120                       FEM02120
      PRINT  440                                             FEM02130
      DO  110  I=1, NN                                       FEM02140
  110 PRINT  380, (ELSTIF (I, J) J=1, NN)                    FEM02150
      PRINT  380, (ELF (I), I=1, NN)                         FEM02160
  120 CONTINUE                                               FEM02170
C                                                            FEM02180
C     ASSEMBLE ELEMENT MATRICES INTO BANDED GLOBAL MATRIX    FEM02190
C                                                            FEM02200
      DO  140  I=1, NPE                                      FEM02210
      NR= (NOD (N, I) -1)*NDF                                FEM02220
      DO  140  II=1, NDF                                     FEM02230
      NR=NR+1                                                FEM02240
      L=(I-1)*NDF+II                                         FEM02250
      GF (NR) =GF (NR) +ELF (L)                              FEM02260
      DO  140  J=1, NPE                                      FEM02270
      NCL= (NOD (N, J) -1)*NDF                               FEM02280
```

```
      DO 140 JJ=1, NDF                                               FEM02290
      M= (J-1)*NDF+JJ                                                FEM02300
      NC=NCL-NR+JJ+1                                                 FEM02310
      IF(NC) 140, 140, 130                                           FEM02320
  130 GSTIF (NR, NC) =GSTIF (NR, NC) +ELSTIF (L, M)                  FEM02330
  140 CONTINUE                                                       FEM02340
  150 CONTINUE                                                       FEM02350
      IF (NT.GT.1) GOTO 160                                          FEM02360
      PRINT 400, (IBDY (I), I=1, NBDY)                               FEM02370
      PRINT 410, (VBDY(I), I=1, NBDY)                                FEM02380
      PRINT 500, (IBF(I), I=1, NBF)                                  FEM02390
      PRINT 510, (VBF(I), I=1, NBF)                                  FEM02400
C                                                                    FEM02410
C     IMPOSE SPECIFIED NONZERO VALUES OF THE SECONDARY VARIABLES     FEM02420
C                                                                    FEM02430
  160 IF (NBF. EQ. O) GOTO 180                                       FEM02440
      DO 170 NF=1, NBF                                               FEM02450
      NB=IBF (NF)                                                    FEM02460
  170 GF (NB) =GF (NB) +VBF (NF)                                     FEM02470
  180 IF (T. EQ. O. O ) GOTO 200                                     FEM02480
      IF (NPRNT. LE. 1. OR. NT. GT.1) GOTO 200                       FEM02490
      PRINT 490                                                      FEM02500
```

```
      DO 190 I=1, NEQ                                                   FEM02510
  190 PRINT 380, (GSTIF (I, J), J=1, NHBW)                              FEM02520
      PRINT 380, (GF(I), I=1, NEQ)                                      FEM02530
C                                                                       FEM02540
C       IMPOSE  SPECIFIED VALUES OF THE PRIMARY VARIABLES               FEM02550
C                                                                       FEM02560
  200 CALL BNDY (NRMAX, NCMAX, NEQ, NHBW, GSTIF, GF,NBDY,JBDY,VBDY)FEM02570
      IRES=0                                                            FEM02580
C                                                                       FEM02590
C     SOLVE THE BANDED, SYMMETRIC EQUATIONS                             FEM02600
C                                                                       FEM02610
      CALL SOLVE (NRMAX, NCMAX, NEQ, NHBW, GSTIF, GF, IRES)             FEM02620
C                                                                       FEM02630
C     SOLUTION IS RETURNED IN GF                                        FEM02640
C                                                                       FEM02650
      IF (ITEM, NE.O) GOTO 210                                          FEM02660
      PRINT 450                                                         FEM02670
      PRINT 380, (GF(NI), NI=1, NEQ)                                    FEM02680
      GOTO 230                                                          FEM02690
  210 NT=NT+1                                                           FEM02700
      IF (T.EQ. O. O) GOTO 50                                           FEM02710
C                                                                       FEM02720
```

```
C     COMPUTE AND PRINT CURRENT VALUES OF GF0, GF1, AND GF2             FEM02730
C                                                                       FEM02740
      DO 220 I=1, NEQ                                                   FEM02750
      GF0(I)=A0*(GF(I)-GF0(I))-A1*GF1(I)-A2*GF2(I)                      FEM02760
      GF1(I)-GF1(I)+A3*GF2(I)+A4*GF0(I)                                 FEM02770
      GF2(I)=GF0(I)                                                     FEM02780
  220 GF0(I)=GF(I)                                                      FEM02790
      PRINT 450                                                         FEM02800
      PRINT 380, (GF0(I), I=1, NEQ)                                     FEM02810
      PRINT 380, (GF1(I), I=1, NEQ)                                     FEM02820
      IF (IELEM.EQ.0)PRINT 380, (GF2(I), I=1, NEQ)                      FEM02830
  230 CONTINUE                                                          FEM02840
C     ..............................................................    FEM02850
C     .                                                            .    FEM02860
C     .        P O S T P R O C E S S O R   UNIT                    .    FEM02870
C     .                                                            .    FEM02880
C     ..............................................................    FEM02890
C                                                                       FEM02900
C     COMPUTE  THE  DERIVATIVES OF THE SOLUTION                         FEM02910
C     PRINT 460                                                         FEM02920
      DO 250 N=1, NEM                                                   FEM02930
      L=0                                                               FEM02940
```

```
      DO 240 I=1, NPE                                           FEM02950
      NI=NOD (N, I)                                             FEM02960
      IF (ICONT. EQ. 1) ELX(I)=X(NI)                            FEM02970
      IF (ICONT. EQ. 0)  ELX(I)=EC(N, I)                        FEM02980
      LI=(NI-1)*NDF                                             FEM02990
      DO 240 J=1, NDF                                           FEM03000
      LI=LI+1                                                   FEM03010
      L=L+1                                                     FEM03020
  240 W0(L)=GF(LI)                                              FEM03030
  250 CALL  STRESS(NPE, NDF, IELEM, W0, ELX)                    FEM03040
      PRINT 470                                                 FEM03050
      IF (ITEM. EQ. 0) GOTO 270                                 FEM03060
      IF (NT. GT. NTIME) GOTO 270                               FEM03070
  260 GOTO 50                                                   FEM03080
  270 CONTINUE                                                  FEM03090
C                                                               FEM03100
C                                                               FEM03110
C                 F O R M A T S                                 FEM03120
                                                                FEM03130
  300 FORMAT (20A4)                                             FEM03140
  310 FORMAT (16I5)                                             FEM03150
  320 FORMAT (8F10.4)                                           FEM03160
```

```
330  FORMAT (1H1)                                                                  FEM03170
340  FORMAT (5X, '*** F O U R T H - O R D E R  P R O B L E M S ***', /)            FEM03180
350  FORMAT (5X,'*** S E C O N D-O R D E R  P R O B L E M S ***', /)               FEM03190
370  FORMAT (/, 10X,'TIME-DEPENDENT (TRANSIENT) ANALYSIS', /)                      FEM03200
380  FORMAT (10X, 6E15.5)                                                          FEM03210
390  FORMAT (10X,'NO. OF ELEMENTS  IN  THE  MESH..................=', I4, /        FEM03220
    *10X,'NO. OF NODES IN THE MESH.........................=', I4, /,              FEM03230
    *10X,'NO. OF DEG. OF FREEDOM PER NODE......=', I4,/, 10X,' FEM MESH            FEM03240
    *AND COEFFCIENTS (AX0, AX1, ETC.) FOLLOW:', /)                                 FEM03250
400  FORMAT (10X, 'SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:', //, 10X, 10I5, /)               FEM03260
410  FORMAT (/, 10X,'VALUES OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM:', //, 10X,            FEM03270
    *6E10.3, /, 10X, 6E10.3)                                                       FEM03280
420  FORMAT (/, 10X,'TIME=', E13.5, /)                                             FEM03290
430  FORMAT (/, 10X,I5,8E13.4)                                                     FEM03300
440  FORMAT (/, 10X,'ELEMENT MATRICES:', /)                                        FEM03310
450  FORMAT (/,8X,' S O L U T I O N:',/)                                           FEM03320
460  FORMAT (/,15X,' X ', 7X,' DISPL.', 4X,' 1ST DERIV.', 4X,' 2ND DERIV.          FEM03330
    *',/)                                                                          FEM03340
470  FORMAT (120('.'))                                                             FEM03350
480  FORMAT(/,10X,'ALFA =',E13.4, 2X,'BETA =',E13.4, 2X,'TIME INCREMENT =          FEM03360
    *',E13.4,2X,'CO =', E11.4, /)                                                  FEM03370
490  FORMAT (/,10X,' GLOBAL MATRICES:',/)                                          FEM03380
```

```
  500 FORMAT(/,10X,'SPECIFIED NONZERO SECONDARY DEGREES OF FREEDOM:',   FEM03390
     *//,10X, 10I5)                                                     FEM03400
  510 FORMAT(/,10X,'VALUES OF THE SPECIFIED SECONDARY DEGREES OF        FEM03410
      FREEDOM ,',//,10X,6E10.3)                                         FEM03420
      STOP                                                              FEM03430
      END                                                               FEM03440
      SUBROUTINE STIFF (IELEM, NN, NPE,T,ITEM)                          STF00010
C                                                                       STF00020
C     ..................................................................STF00030
C     MODEL EQUATION USED IN THE PROGRAM:                               STF00040
C                                                                       STF00050
C         -(AX. U')' + (BX. U'')'' + CX. U = F + CO(U* + U**)           STF00060
C                                                                       STF00070
C     HERE SYMBOLS ' AND * DENOTE DIFFERENTIATIONS WITH RESPECT TO X    STF00080
C     AND T (TIME), RESPECTIVELY, AND AX, BX, CX, CO, AND F ARE GIVEN   STF00090
C     FUNCTIONS (DATA) OF THE INDEPENDENT VARIABLES, X AND/OR T.        STF00100
C                                                                       STF00110
C      X.............GLOBAL COORD INATE                                 STF00120
C      XI ...........LOCAL COORD NATE                                   STF00130
C      H.............ELEMENT LENGTH                                     STF00140
C      SF ...........ELEMENT INTERPOLATION FUNCTIONS                    STF00150
C      GDSF..........SECOND DERIVATIVE OF SF W. R. T. LOCAL COORDINATE  STF00160
```

```
C       GDDSF..........SECOND DERIVATIVE OF SF W. R. T. GLOBAL COORDINATE     STF00170
C       GJ.............JACOBIAN OF THE TRANSFORMATION                         STF00180
C       GAUSS..........4 BY 4 MATRIX OF GAUSS POINTS,COLUMNS CORRESPOND       STF00190
C                      TO GAUSS POINTS FOR NGP=COLUMN NUMBER                  STF00200
C       WT.............GAUSS WEIGHTS CORRESPONDING TO THE GAUSS POINTS        STF00210
C       A, B, C, G.....ELEMENT MATRICES NEEDED TO COMPUTE ELSTIF              STF00220
C                                                                             STF00230
C     ..................................................................      STF00240
C                                                                             STF00250
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)                                               STF00260
      COMMON/STF/ELSTIF (4,4),ELF(4),ELX (4),W0(4),W1 (4),W2(4)               STF00270
      COMMON/STF1/A0,A1,A2,A3,A4,AX0,AX1,BX0,BX1,CX0,CX1,C0,F0,F1             STF00280
      COMMON/SHP/SF(4),GDSF(4),GDDSF(4),GJ                                    STF00290
      DIMENSION GAUSS(4,4),WT(4,4),A(4,4),B(4,4),C(4,4),G(4,4)                STF00300
      DATA GAUSS/4*0.0D0,-.57735027D0,.57735027D0,2*0.0D0,-.77459667D0,       STF00310
     *0.0D0,.77459667D0,0.0D0,-.86113631D0,                                   STF00320
     *-.33998104D0,.33998104D0,.86113631D0/                                   STF00330
      DATA WT/2.0D0,3*0.0D0,2*1.0D0,2*0.0D0,.55555555D0,.88888888D0,          STF00340
     *.55555555D0,0.0D0,.34785485D0,2*.65214515D0,.34785485D0/                STF00350
C                                                                             STF00360
      NGP=NPE                                                                 STF00370
      IF (IELEM.EQ.0) NGP=4                                                   STF00380
```

```
      H = ELX (NPE)  - ELX (1)                                          STF00390
      DO 10 I = 1, NN                                                   STF00400
   10 ELF(I) = 0.0                                                      STF00410
      NET = NPE                                                         STF00420
      IF (IELEM . EQ. 0) NET = 4                                        STF00430
      DO  20  I = 1, NET                                                STF00440
      DO  20  J = 1, NET                                                STF00450
      A (I, J) = 0.0                                                    STF00460
      B (I, J) = 0.0                                                    STF00470
      C (I, J) = 0.0                                                    STF00480
   20 G (I, J) = 0.0                                                    STF00490
C                                                                       STF00500
C     DO-LOOP  ON  NUMBER  OF  GAUSS  POINTS  BEGINS  HERE              STF00510
C                                                                       STF00520
      DO 70  NI = 1, NGP                                                STF00530
      XI = GAUSS (NI, NGP)                                              STF00540
C                                                                       STF00550
C     CALL SUBROUTINE SHAPE TO EVALUATE THE INTERPOLATION FUNCTIONS AND STF00560
C              THEIR GLOBAL DERIVATIVES AT THE GAUSS POINT XI           STF00570
C                                                                       STF00580
      CALL SHAPE (XI, H, NPE, NET, IELEM)                               STF00590
      CONST = CJ*WT (NI, NGP)                                           STF00600
```

```
      X=0.5*H*(1.0+XI)+ELX(1)                                          STF00610
C                                                                       STF00620
C...........DEFINE THE COEFFICIENTS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS...........STF00630
C           (ONLY UPTO LINEAR VARIATION IS ACCOUNTED HERE)              STF00640
                                                                        STF00650
      AX=AX0+AX1*X                                                      STF00660
      BX=BX0+BX1*X                                                      STF00670
      CX-CX0+CX1*X                                                      STF00680
      F=F0+F1*X                                                         STF00690
C                                                                       STF00700
C     COMPUTE BASIC COEFFICIENT MATRICES THAT ARE NEEDED TO GENERATE    STF00710
C              ELEMENT MATRICES FOR VARIOUS PROBLEMS                    STF00720
C                                                                       STF00730
      DO 60 I=1,NET                                                     STF00740
      ELF(I)=ELF(I)+CONST*SF(I)*F                                       STF00750
      DO 60 J=1,NET                                                     STF00760
      IF(ITEM.EQ.O) GOTO 50                                             STF00770
      G(I,J)=G(I,J)+CONST*SF(I)*SF(J)*C0                                STF00780
   50 C(I,J)=C(I,J)+CONST*SF(I)*SF(J)*CX                                STF00790
      A(I,J)=A(I,J)+CONST*GDSF(I)*GDSF(J)*AX                            STF00800
   60 B(I,J)=B(I,J)+CONST*GDDSF(I)*GDDSF(J)*BX                          STF00810
   70 CONTINUE                                                          STF00820
```

```
      IF (ITEM .NE. 0) GOTO 120                                           STF00830
C                                                                         STF00840
C     ELEMENT MATRICES FOR STATIC ANALYSIS                                STF00850
C                                                                         STF00860
      IF (IELEM .NE. 0) GOTO 90                                           STF00870
      DO 80 I=1, 4                                                        STF00880
      DO 80 J=1, 4                                                        STF00890
   80 ELSTIF (I, J) =B (I, J) +C (I, J)                                   STF00900
      RETURN                                                              STF00910
C                                                                         STF00920
   90 CONTINUE                                                            STF00930
      DO 100 I=1, NPE                                                     STF00940
      DO 100 J=1, NPE                                                     STF00950
  100 ELSTIF (I, J) =A (I, J) +B (I, J) +C (I, J)                         STF00960
      RETURN                                                              STF00970
C                                                                         STF00980
C     ELEMENT MATRICES FOR DYNAMIC ANALYSIS                               STF00990
C     ONLY CONSTANT SOURCE TERM IS ASSUMED HERE                           STF01000
C                                                                         STF01010
  120 IF (IELEM. EQ. 0) GOTO 190                                          STF01020
C                                                                         STF01030
C     TIME APPROXIMATION SCHEME FOR FIRST-ORDER EQUATIONS (IN TIME)       STF01040
```

```
C                                                                        STF01050
      IF (ITEM .EQ. 2) GOTO 150                                          STF01060
      DO 140 I=1, NPE                                                    STF01070
      SUM=0.0                                                            STF01080
      DO 130 J=1, NPE                                                    STF01090
      SUM=SUM+ (G (I, J) -A3*A (I, J))*W0 (J)                            STF01100
  130 ELSTIF (I, J) =G (I, J)+A4*A (I, J)                                STF01110
  140 ELF (I) =(A3+A4)*ELF (I) +SUM                                      STF01120
      RETURN                                                             STF01130
C                                                                        STF01140
C     TIME APPROXIMATION SCHEME FOR SECOND-ORDER EQUATIONS (IN TIME)     STF01150
C                                                                        STF01160
  150 IF (T.GT0.0.) GOTO 170                                             STF01170
      DO 160 I=1, NPE                                                    STF01180
      ELF (I) =0.0                                                       STF01190
      DO 160 J=1, NPE                                                    STF01200
      ELF (I) =ELF (I) -A (I, J)*W0(J)                                   STF01210
  160 ELSTIF (I, J) =G (I, J)                                            STF01220
      RETURN                                                             STF01230
  170 DO 180 I=1, NPE                                                    STF01240
      DO 180 J=1, NPE                                                    STF01250
      ELF (I) =ELF (I) +G (I, J)* (A0*W0 (J) +A1*W1 (J) +A2*W2 (J))      STF01260
```

```
  180 ELSTIF (I, J) =A(I, J)+A0*G(I, J)                              STF01270
      RETURN                                                         STF01280
C                                                                    STF01290
C     COMPUTE GF2 AT TIME T=0                                        STF01300
C                                                                    STF01310
  190 IF (T .GT. 0.0) GOTO 210                                       STF01320
      DO 200 I=1, 4                                                  STF01330
      ELF (I) =0.0                                                   STF01340
      DO 200 J=1, 4                                                  STF01350
      ELF (I) =ELF (I) -B (I, J)*W0 (J)                              STF01360
  200 ELSTIF (I, J) =G (I, J)                                        STF01370
      RETURN                                                         STF01380
C                                                                    STF01390
  210 DO 230 I=1, 4                                                  STF01400
      DO 220 J=1, 4                                                  STF01410
      ELF (I) =ELF (I) +G (I, J)* (A0*W0 (J) +A1*W1 (J) +A2*W2 (J))  STF01420
  220 ELSTIF (I, J) =B (I, J) +A0*G(I, J)                            STF01430
  230 CONTINUE                                                       STF01440
      RETURN                                                         STF01450
      END                                                            STF01460
      SUBROUTINE SHAPE (XI, II, NPE, NET, IELEM)                     SHP00010
C                                                                    SHP00020
```

```
C     ................................................................... SHP00030
C     EVALUATION OF THE INTERPOLATION FUNCTIONS AND THEIR GLOBAL           SHP00040
C                 DERIVATIVES AT THE GAUSS POINTS                          SHP00050
C                                                                          SHP00060
C     X..............GLOBAL COORDINATE                                     SHP00070
C     XI.............LOCAL COORDINATE                                      SHP00080
C     H..............ELEMENT LENGTH                                        SHP00090
C     SF.............ELEMENT INTERPOLATION FUNCTIONS                       SHP00100
C     DSF............FIRST DERIVATIVE OF SF W. R. T. LOCAL COORDINATE, XI  SHP00110
C     GDSF...........FIRST DERIVATIVE OF SF W. R. T. GLOBAL COORDINATE, X  SHP00120
C     DDSF...........SECOND DERIVATIVE OF SF W. R. T. LOCAL COORDINATE, XI SHP00130
C     GDDSF..........SECOND DERIVATIVE OF SF W. R. T. GLOBAL COORDINATE, XI SHP00140
C     GJ.............JACOBIAN OF THE TRANSFORMATION                        SHP00150
C......................................................................... SHP00160
C                                                                          SHP00170
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)                                            SHP00180
      COMMON/SHP/SF(4),GDSF(4),GDDSF(4),GJ                                 SHP00190
      DIMENSION DSF(4),DDSF(4)                                             SHP00200
      IF (IELEM.NE.0) GOTO 20                                              SHP00210
C                                                                          SHP00220
C     HERMITE INTERPOLATION FUNCTIONS FOR THE TWO-NODE ELEMENT FOR THE     SHP00230
C        FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION (SEE SUBROUTINE STIFF)         SHP00240
```

```
C                                                                               SHP00250
      SF (1) =0.25* (2.0-3.0*XI+XI**3)                                          SHP00260
      SF (2) =-H* (1.0-XI)* (1.0-XI*XI) /8.0                                    SHP00270
      SF (3) =0.25*(2.0+3.0*XI-XI**3)                                           SHP00280
      SF (4) =H* (1.0+XI)*(1.0-XI*XI)/8.0                                       SHP00290
      DSF (1) =-0.75*(1.0-XI*XI)                                                SHP00300
      DSF (2) =H*(1.0+2.0*XI-3.0*XI*XI)/8.0                                     SHP00310
      DSF (3) =0.75* (1.0-XI*XI)                                                SHP00320
      DSF (4) =H* (1.0-2.0*XI-3.0*XI*XI)/8.0                                    SHP00330
      DDSF (1) =1.5*XI                                                          SHP00340
      DDSF (2) =0.25*H* (1.0-3.0*XI)                                            SHP00350
      DDSF (3) =-1.5*XI                                                         SHP00360
      DDSF (4) =-0.25* (1.0+3.0*XI)*H                                           SHP00370
      GOTO 80                                                                   SHP00380
C                                                                               SHP00390
   20 IF (IELEM-2) 30, 40, 60                                                   SHP00400
C                                                                               SHP00410
C     INTERPOLATION FUNCTIONS FOR TWO, THREE, AND FOUR NODE ELEMENTS            SHP00420
C       FOR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION (SEE COMMENTS ABOVE)             SHP00430
C                                                                               SHP00440
C     LINEAR (LAGRANGE) INTERPOLATION FUNCTIONS                                 SHP00450
C                                                                               SHP00460
```

```
   30 SF (1) =0.5* (1.0-XI)                                    SHP00470
      SF (2) =0.5* (1.0+XI)                                    SHP00480
      DSF (1) =-0.5                                            SHP00490
      DSF (2) =0.5                                             SHP00500
      GOTO 60                                                  SHP00510
C                                                              SHP00520
C     QUADRATIC (LAGRANGE) INTERPOLATION FUNCTIONS             SHP00530
C                                                              SHP00540
   40 SF (1) =-0.5*XI* (1.0-XI)                                SHP00550
      SF (2) =1.0-XI*XI                                        SHP00560
      SF (3) =0.5*XI* (1.0+XI)                                 SHP00570
      DSF (1) =-0.5* (1.0-2.0*XI)                              SHP00580
      DSF (2) =-2.0*XI                                         SHP00590
      DSF (3) =0.5* (1.0+2.0*XI)                               SHP00600
      GOTO 60                                                  SHP00610
C                                                              SHP00620
C     CUBIC (LAGRANGE) INTERPOLATION FUNCTIONS                 SHP00630
C                                                              SHP00640
   50 SF (1) =0.0625* (1.0-XI)* (9.0*XI*XI-1.)                 SHP00650
      SF (2) =0.5625* (1.0-XI*XI)*(1.0-3.0*XI)                 SHP00660
      SF (3) =0.5625*(1.0-XI*XI)* (1.0+3.0*XI)                 SHP00670
      SF (4) =0.0625*(9.0*XI*XI-1.0)*(1.0+XI)                  SHP00680
```

```
      DSF (1) =0.0625*(1.0+18.0*XI-27.0*XI*XI)                SHP00690
      DSF (2) =0.5625*(-3.0-2.0*XI+9.0*XI*XI)                 SHP00700
      DSF (3) =0.5625* (3.0-2.0*XI-9.0*XI*XI)                 SHP00710
      DSF (4) =0.0625*(18.0*XI+27.0*XI*XI  1.0)               SHP00720
   60 DO 70 I=1, NPE                                          SHP00730
   70 DDSF (I)=0.0                                            SHP00740
C                                                             SHP00750
C     COMPUTE THE DERIVATIVES OF SF (I) WITH RESPECT TO X     SHP00760
C                                                             SHP00770
   80 GJ=H*0.5                                                SHP00780
      DO 90 I=1, NET                                          SHP00790
      GDSF (I) =DSF (I) /GJ                                   SHP00800
   90 GDDSF (I) =DDSF (I) /GJ/GJ                              SHP00810
      RETURN                                                  SHP00820
      END                                                     SHP00830
      SUBROUTINE STRESS (NPE, NDF, IELEM, W0, ELX)            STR00010
C                                                             STR00020
C     ..........................................................STR00030
C     X..............GLOBAL COORDINATE                        STR00040
C     XI.............LOCAL COORDINATE                         STR00050
C     SF.............ELEMENT INTERPOLATION FUNCTIONS          STR00060
C     GDSF...........FIRST DERIVATIVE OF SI W. R. T. GLOBAL COORDINATE   STR00070
```

```
C     GDDSF..........SECOND DERIVATIVE OF SF W. R. T. GLOBAL COORDINATE      STR00080
C     W0 ............COLUMN OF GENERALIZED DISPLACEMENTS                     STR00090
C     W..............INTERPOLATED GENERALIZED DISPLACEMENT                   STR00100
C     DW............ FIRST DERIVATIVE OF W, DW/DX                            STR00110
C     DDW........... SECOND DERIVATIVE OF W; D(DW)/DX                        STR00120
C                                                                            STR00130
C     NOTE, W, DW, AND DDW ARE COMPUTED AT NINE POINTS OF EACH               STR00140
C           ELEMENT (DW AND DDW ARE NOT EXPECTED TO BE ACCURATE              STR00150
C           AT THE NODAL POINTS OF THE ELEMENT)                              STR00160
C     ....................................................................   STR00170
C                                                                            STR00180
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)                                             STR00190
      COMMON/SHP/SF (4), GDSF (4), GDDSF(4), GJ                              STR00200
      DIMENSION GAUSS (9), W0 (4), ELX (4)                                   STR00210
      DATA GAUSS/-1.0D0, -0.75D0, -0.50D0, -0.25D0, 0.0D0, 0.25D0, 0.50D0,   STR00220
     *           0.75D0, 1.0D0/                                              STR00230
C                                                                            STR00240
      NET=NPE                                                                STR00250
      IF (IELEM . EQ. 0) NET=4                                               STR00260
      H=ELX (NPE) -ELX (1)                                                   STR00270
      DO 70  NI=1, 9                                                         STR00280
      XI=GAUSS (NI)                                                          STR00290
```

```
      CALL SHAPE (XI, H, NPE, NET, IELEM)                              STR00300
      X=0.5*H*(1.0+XI)+ELX(1)                                          STR00310
      W=0.0                                                            STR00320
      DW=0.0                                                           STR00330
      DDW=0.0                                                          STR00340
      DO 65 I=1,NET                                                    STR00350
      W=W+SF(I)*W0(I)                                                  STR00360
      DW=DW+GDSF(I)*W0(I)                                              STR00370
      IF (IELEM.NE.0) GOTO 65                                          STR00380
      DDW=DDW+GDDSF(I)*W0(I)                                           STR00390
   65 CONTINUE                                                         STR00400
      IF (IELEM.EQ.0) PRINT 10, X, W, DW, DDW                          STR00410
      IF (IELEM.GT.0) PRINT 10, X, W, DW                               STR00420
   70 CONTINUE                                                         STR00430
   10 FORMAT (10X, 8E13.5)                                             STR00440
      RETURN                                                           STR00450
      END                                                              STR00460
      SUBROUTINE BNDY (NRMAX, NCMAX, NEQ, NHBW, S, SL, NBDY, IBDY, VBDY) BND00010
C                                                                      BND00020
C     ..................................................................BND00030
C     SUBROUTINE USED TO IMPOSE BOUNDARY CONDITIONS ON BANDED EQUATIONS BND00040
C     ..................................................................BND00050
```

```
C                                                            BND00060
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)                             BND00070
      DIMENSION S (NRMAX, NCMAX), SL(NRMAX)                  BND00080
      DIMENSION IBDY (NBDY), VBDY(NBDY)                      BND00090
      DO 300 NB=1, NBDY                                      BND00100
      IE=IBDY (NB)                                           BND00110
      SVAL=VBDY (NB)                                         BND00120
      IT=NHBW-1                                              BND00130
      I=IE-NHBW                                              BND00140
      DO 100 II=1, IT                                        BND00150
      I=I+1                                                  BND00160
      IF (I .LT. 1) GO TO 100                                BND00170
      J=IE-I+1                                               BND00180
      SL (I) =SL (I) -S (I, J)*SVAL                          BND00190
      S (I, J) =0.0                                          BND00200
  100 CONTINUE                                               BND00210
      S (IE, 1)=1.0                                          BND00220
      SL (IE)=SVAL                                           BND00230
      I=IE                                                   BND00240
      DO 200 II=2, NHBW                                      BND00250
      I=I+1                                                  BND00260
      IF (I.GT.NEQ) GO TO 200                                BND00270
```

```
      SL (I) =SL (I)-S(IE, II)*SVAL                                   BND00280
      S (IE, II)=0.0                                                  BND00290
  200 CONTINUE                                                        BND00300
  300 CONTINUE                                                        BND00310
      RETURN                                                          BND00320
      END                                                             BND00330
      SUBROUTINE SOLVE (NRM, NCM, NEQNS, NBW, BAND, RHS, IRES)        SLV00010
C     ..............................................................  SLV00020
C     SOLVING A BANDED SYMMETRIC SYSTEM OF EQUATIONS                  SLV00030
C     IN RESOLVING, IRES .GT. 0, LHS ELIMINATION IS SKIPPED           SLV00040
C     ..............................................................  SLV00050
C                                                                     SLV00060
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)                                      SLV00070
      DIMENSION BAND (NRM, NCM), RHS (NRM)                            SLV00080
      MEQNS=NEQNS-1                                                   SLV00090
      IF (IRES .GT. 0) GO TO 90                                       SLV00100
      DO 500 NPIV=1, MEQNS                                            SLV00110
      NPIVOT=NPIV+1                                                   SLV00120
      LSTSUB=NPIV+NBW-1                                               SLV00130
      IF (LSTSUB. GT. NEQNS) LSTSUB=NEQNS                             SLV00140
      DO 400 NROW=NPIVOT, LSTSUB                                      SLV00150
C     INVERT ROWS AND COLUMNS FOR ROW FACTOR                          SLV00160
```

```
      NCOL=NROW-NPIV+1                                              SLV00170
      FACTOR=BAND (NPIV, NCOL)/BAND (NPIV, 1)                       SLV00180
      DO 200 NCOL=NROW, LSTSUB                                      SLV00190
      ICOL=NCOL-NROW+1                                              SLV00200
      JCOL=NCOL-NPIV+1                                              SLV00210
  200 BAND (NROW, ICOL) =BAND (NROW, ICOL) -FACTOR*BAND (NPIV, JCOL) SLV00220
  400 RHS (NROW)=RHS (NROW)-FACTOR*RHS (NPIV)                       SLV00230
  500 CONTINUE                                                      SLV00240
      CO TO 101                                                     SLV00250
   90 DO 100 NPIV=1, MEQNS                                          SLV00260
      NPIVOT=NPIV+1                                                 SLV00270
      LSTSUB=NPIV+NBW-1                                             SLV00280
      IF (LSTSUB. GT. NEQNS) LSTSUB=NEONS                           SLV00290
      DO 110 NROW=NPIVOT, LSTSUB                                    SLV00300
      NCOL=NROW-NPIV+1                                              SLV00310
      FACTOR=BAND (NPIV, NCOL)/BAND (NPIV, 1)                       SLV00320
  110 RHS (NROW)=RHS(NROW)-FACTOR*RHS (NPIV)                        SLV00330
  100 CONTINUE                                                      SLV00340
C     BACK SUBSTITUTION                                             SLV00350
  101 DO 800 IJK=2, NEQNS                                           SLV00360
      NPIV=NEQNS-IJK+2                                              SLV00370
      RHS (NPIV)=RHS (NPIV)/BAND(NPIV, 1)                           SLV00380
```

```
      LSTSUB = NPIV - NBW + 1                                 SLV00390
      IF (LSTSUB. LT. 1) LSTSUB = 1                           SLV00400
      NPIVOT = NPIV - 1                                       SLV00410
      DO 700 JKI = LSTSUB, NPIVOT                             SLV00420
      NROW = NPIVOT - JKI + LSTSUB                            SLV00430
      NCOL = NPIV - NROW + 1                                  SLV00440
      FACTOR = BAND (NROW, NCOL)                              SLV00450
700   RHS (NROW) = RHS(NROW) - FACTOR*RHS (NPIV)              SLV00460
800   CONTINUE                                                SLV00470
      RHS (1)  = RHS (1) /BAND (1, 1)                         SLV00480
      RETURN                                                  SLV00490
      END                                                     SLV00500
```

附录II 计算机程序FEM2D

```
C                        P R O G R A M   F E M 2 D                        FEM00010
C          (AN IN-CORE FINITE-ELEMENT ANALYSIS COMPUTER PROGRAM)          FEM00020
C                                                                         FEM00030
C  :..................................................................... : FEM00040
C  :                                                                     : FEM00050
C  :  FINITE ELEMENT ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS, INCLUDING     : FEM00060
C  :        HEAT TRANSFER,FLUID FLOW,AND PLANE ELASTICITY                : FEM00070
C  :                                                                     : FEM00080
C  :                                                                     : FEM00090
C  :  THE PROGRAM ILLUSTRATES THE USE OF THE THREE-NODE (LINEAR)         : FEM00100
C  : TRIANGULAR ELEMENT AND THE LINEAR AND QUADRATIC ISOPARAMETRIC       : FEM00110
C  : QUADRILATERAL ELEMENTS FOR THE SOLUTION OF HEAT CONDUCTION/         : FEM00120
C  : CONVECTION TYPE PROBLEMS, PLANE ELASTICITY PROBLEMS,AND VISCOUS     : FEM00130
C  : INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW PROBLEMS BY THE PENALTY FUNCTION          : FEM00140
C  : FORMULATION, OTHER SECOND-ORDER PROBLEMS CAN BE SOLVED BY           : FEM00150
```

```
C  : MODIFYING APPROPRIATE STATEMENTS IN SUBROUTINE STIFF              : FEM00160
C  :                                                                   : FEM00170
C  :...................................................................: FEM00180
C                                                                        FEM00190
C         D E S C R I P T I O N   O F   T H E   V A R I A B L E S        FEM00200
C                                                                        FEM00210
C     AMU.......VISCOSITY IN THE PENALTY FORMULATION OF STOKES FLOW      FEM00220
C     ANU12.....POISSON'S RATIO FOR ELASTICITY PROBLEMS (ANU12 = C3)     FEM00230
C     ANU21.....POISSON'S RATIO FOR ORTHOTROPIC MEDIUM - ANU12*(E2/E1)   FEM00240
C     B(I,J).....MASS MATRIX FOR TRANSIENT ANALYSIS                      FEM00250
C     C(I,J).....MATERIAL STIFFNESS COEFFICIENTS OF THE ORTHOTROPIC      FEM00260
C                ELASTICITY (COMPUTED IN THE PROGRAM).                   FEM00270
C                                                                        FEM00280
C     C1,C2,.....MATERIAL CONSTANTS AND SOURCE TERM AS DEFINED BELOW     FEM00290
C                HEAT TRANSFER TYPE PROBLEMS:                            FEM00300
C                    C1 = K1, C2 = K2, C3 = H, C4 = TINF, C5 = Q         FEM00310
C                ELASTICITY PROBLEMS:                                    FEM00320
C                    C1 = E1, C2 = E2, C3 = ANU12, C4 = G12, C5 = T      FEM00330
C                INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW PROBLEMS:                     FEM00340
C                    C1 = AMU, C2 = PENALTY PARAMETER                    FEM00350
C                                                                        FEM00360
C     DT.........TIME STEP FOR TRANSIENT ANALYSIS                        FEM00370
```

```
C     E1, E2......ORTHOTROPIC MODULI (E1 = C1,E2 = C2)                    FEM00380
C     ELSTIF ...ELEMENT COEFFICIENT (OR 'STIFFNESS') MATRIX               FEM00390
C     ELXY ......GLOBAL COORDINATES OF ELEMENT NODES:                     FEM00400
C               ELXY(I,1) = XE(I); ELXY(I,2) = YE(I), I = 1,NPE.          FEM00410
C     F(I) ........ELEMENT FORCE VECTOR (SHOULD BE MODIFIED FOR NON-      FEM00420
C               CONSTANT SOURCE TERM(S) IN THE PROBLEM).                  FEM00430
C     G12 ........SHEAR MODULUS FOR ELASTICITY PROBLEMS (G12 = C4)        FEM00440
C     GF(I) ......ASSEMBLED 'FORCE' VECTOR. ALSO USED TO RETURN THE       FEM00450
C               SOLUTION FROM SUBROUTINE 'SOLVE'.                         FEM00460
C     GP(I) ......ARRAY OF INITIAL VALUES (ALSO ARRAY FOR THE PREVIOUS    FEM00470
C               TIME-STEP SOLUTION) USED IN TRANSIENT ANALYSIS.           FEM00480
C     GSTIF ...GLOBAL COEFFICIENT (OR 'STIFFNESS') MATRIX. NOTE THAT      FEM00490
C               IT IS ASSEMBLED AND STORED IN A BANDED FORM.              FEM00500
C     H ..........FILM COEFFICIENT IN HEAT TRANSFER PROBLEMS (H = C3)     FEM00510
C     IBDF(I) ...ARRAY OF SPECIFIED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM           FEM00520
C     IBN (I) ...ARRAY OF BOUNDARY ELEMENTS FOR CONVECTIVE B.C.           FEM00530
C     IBSF(I) ...ARRAY OF SPECIFIED NONZERO FORCES                        FEM00540
C                                                                         FEM00550
C     ICONV ...INDICATOR FOR CONVECTION BOUNDARY CONDITION:               FEM00560
C                  ICONV = 1, CONVECTION BOUNDARY IS PRESENT              FEM00570
C                  ICONV = 0, NO CONVECTION.                              FEM00580
C                                                                         FEM00590
```

```
C     IEL ........INDICATOR FOR THE TYPE OF ELEMENT:                    FEM00600
C                 IEL=0, THREE-NODE TRIANGULAR ELEMENT                  FEM00610
C                 IEL=1, FOUR-NODE QUADRILATERAL ELEMENT                FEM00620
C                 IEL=2, EIGHT/NINE-NODE QUADRILATERAL ELEMENT.         FEM00630
C                                                                       FEM00640
C     IMESH ...INDICATOR FOR MESH GENERATION:                           FEM00650
C                 IMESH=0, MESH INFORMATION IS TO BE READIN             FEM00660
C                 IMESH=1, MESH IS GENERATED IN THE PROGRAM             FEM00670
C                                                                       FEM00680
C     INOD(I,J).THE J-TH NODE OF THE I-TH ELEMENT FOR THE ELEMENTS      FEM00690
C                 (ON THE CONVECTIVE BOUNDARY) IN ARRAY IBN(N).         FEM00700
C                                                                       FEM00710
C     ITEM ......INDICATOR FOR TRANSIENT ANALYSIS                       FEM00720
C                                                                       FEM00730
C     ITYPE......INDICATOR FOR THE TYPE PROBLEM BEING SOLVED:           FEM00740
C                 ITYPE=2, VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW (IEL=1)          FEM00750
C                 ITYPE=1, PLANE STRAIN ELASTICITY                      FEM00760
C                 ITYPE=0, PLANE STRESS ELASTICITY                      FEM00770
C                 ITYPE=-1, STEADY HEAT TRANSFER                        FEM00780
C                                                                       FEM00790
C     K1,K2......THERMAL CONDUCTIVITIES FOR HEAT TRANSFER PROBLEMS      FEM00800
C              (K1=C1, K2=C2).                                          FEM00810
```

```
C     NBE........NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS FOR CONVECTION B.C.            FEM00820
C     NCMAX...COLUMN DIMENSION OF GSTIF IN THE DIMENSION STATEMENT          FEM00830
C     NDF........NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM PER NODE:                     FEM00840
C              NDF=1, FOR HEAT TRANSFER TYPE PROBLEMS                       FEM00850
C              NDF=2, FOR ELASTICITY AND INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW.         FEM00860
C     NEQ........TOTAL NUMBER OF EQUATIONS IN THE PROBLEM (=NNM*NDF)        FEM00870
C     NEM........NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH                             FEM00880
C     NHBW......HALF BAND WIDTH OF THE COEFFICIENT MATRIX, GSTIF            FEM00890
C     NN..........TOTAL DEGREES OF FREEDOM PER ELEMENT (=NPE*NDF)           FEM00900
C     NNM........NUMBER OF NODES IN THE FINITE-ELEMENT MESH                 FEM00910
C     NOD(I,J)...GLOBAL NODE NUMBER CORRESPONDING TO THE J-TH NODE OF       FEM00920
C              ELEMENT I (BOOLEAN CONNECTIVITY MATRIX).                     FEM00930
C     NPE........NUMBER OF NODES PER ELEMENT                                FEM00940
C     NRMAX...ROW DIMENSION OF GSTIF IN THE DIMENSION STATEMENT             FEM00950
C     NSBF......NUMBER OF SPECIFIED NONZERO BOUNDARY 'FORCES'               FEM00960
C     NSDF......NUMBER OF SPECIFIED PRIMARY DEGREES OF FREEDOM              FEM00970
C     NX,NY ...NUMBER OF ELEMENTS IN X AND Y DIRECTIONS, RESPEC.            FEM00980
C     Q ..........VALUE OF THE CONSTANT SOURCE TERM (Q=C5)                  FEM00990
C     T ..........THICKNESS OF THE PLATE IN ELASTICITY PROBLEMS (T=C5)      FEM01000
C     TO..........MAXIMUM LIMIT ON TIME IN THE TRANSIENT ANALYSIS           FEM01010
C     TINF ......AMBIENT TEMPERATURE IN HEAT TRANSFER PROB. (TINF=C4)       FEM01020
C                                                                           FEM01030
```

```
C     THETA ...PARAMETER IN TIME APPROXIMATION:                           FEM01040
C                THETA=0, FORWARD-DIFFERENCE SCHEME                       FEM01050
C                THETA=0.5, THE CRANK-NICOLSON SCHEME                     FEM01060
C                THETA=2/3, THE GALERKIN SCHEME                           FEM01070
C                THETA=1, BACKWARD-DIFFERENCE SCHEME                      FEM01080
C                                                                         FEM01090
C     VBDF(I)...ARRAY OF THE VALUES CORRESPONDING TO THE SPECIFIED        FEM01100
C             DEGREES OF FREEDOM IN ARRAY IBDF(I).                        FEM01110
C     VBSF(I)...ARRAY OF THE VALUES CORRESPONDING TO THE SPECIFIED        FEM01120
C             NONZERO FORCES IN ARRAY IBSF(I).                            FEM01130
C     W(I,J) ...VALUE OF THE I-TH DEGREE OF FREEDOM AT THE J-TH NODE      FEM01140
C             OF THE ELEMENT.                                             FEM01150
C     X(I).........X-COORDINATE OF GLOBAL NODE I (I=1, NNM)               FEM01160
C     Y(I).........Y-COORDINATE OF GLOBAL NODE I (I=1, NNM)               FEM01170
C                                                                         FEM01180
C     ................................................................... FEM01190
C                                                                         FEM01200
C       D I M E N S I O N S   F O R   V A R I O U S   A R R A Y S         FEM01210
C                                                                         FEM01220
C     ARRAYS ELSTIF, X,Y,F,B,C,BETA,AND GAMA ARE OF FIXED DIMENSION.      FEM01230
C     DIMENSIONS FOR THE OTHER ARRAYR SHOULD BE AS INDICATED BELOW:       FEM01240
C                                                                         FEM01250
```

```
C         GSTIF(NRMAX,NCMAX); NRMAX.GE.NEQ AND NCMAX.GE.NHBW              FEM01260
C              GF(NEQ), GP(NEQ), X(NNM), Y(NNM)                          FEM01270
C        NOD(NEM,9), INODE(NBE,2),IBDF(NSDF),VBDF(NSDF),IBN(NBE)          FEM01280
C                                                                         FEM01290
C     NOTE:THE VALUES OF NCMAX AND NRMAX IN THE DATA STATEMENT MUST       FEM01300
C              MATCH THOSE IN THE DIMENSION STATEMENT FOR GSTIF           FEM01310
C     ................................................................... FEM01320
C                                                                         FEM01330
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)                                            FEM01340
      DIMENSION GSTIF(450,50),GF(450),GP(450),W(2,9),TITLE(20),           FEM01350
     1              IBDF(100),VBDF(100),IBSF(50),VBSF(50),IBN(20),INOD(20,2) FEM01360
      COMMON/MSH/NOD(200,9),X(225),Y(225),DX(15),DY(15)                   FEM01370
      COMMON/STF/ELSTIF(18,18),ELXY(9,2),C(3,3),F(18),W0(18),A0,A1       FEM01380
      DATA NRMAX,NCMAX/450,50/                                            FEM01390
C                                                                         FEM01400
C     :...............................................................:   FEM01410
C     :                                                               :   FEM01420
C     :                  P R E P R O C E S S O R   U N I T            :   FEM01430
C     :                                                               :   FEM01440
C     :...............................................................:   FEM01450
C                                                                         FEM01460
C     R E A D   I N   T H E   I N P U T   D A T A   H E R E               FEM01470
```

```
C
      READ 400,TITLE                                                   FEM01480
      READ 520, IEL,NPE, ITYPE,ICONV,IMESH,ITEM,NPRNT                  FEM01490
      IF(ITYPE.EQ.2.AND.IEL.EQ.0)STOP                                  FEM01500
      IF(ITYPE.GE.0)PRINT 550                                          FEM01510
      IF(ITYPE.LT.0)PRINT 570                                          FEM01520
      PRINT 400, TITLE                                                 FEM01530
      IF(IMESH.EQ.1)GOTO 30                                            FEM01540
      READ 520, NEM,NNM                                                FEM01550
      DO 20 N=1,NEM                                                    FEM01560
   20 READ 520, (NOD(N,I), I=1, NPE)                                   FEM01570
      READ 580, (X(I), Y(I),I=1,NNM)                                   FEM01580
      GOTO 40                                                          FEM01590
   30 READ 520, NX,NY                                                  FEM01600
      NXX1=IEL*NX+1                                                    FEM01610
      NYY1=IEL*NY+1                                                    FEM01620
      IF(IEL.EQ.0)NXX1=NX+1                                            FEM01630
      IF(IEL.EQ.0)NYY1=NY+1                                            FEM01640
      READ 580, (DX(I), I=1, NXX1)                                     FEM01650
      READ 580, (DY(I), I=1, NYY1)                                     FEM01660
      CALL MESH(IEL,NX,NY,NPE,NNM,NEM)                                 FEM01670
   40 READ 580, C1,C2,C3,C4,C5                                         FEM01680
                                                                       FEM01690
```

```
      IF(ITYPE.GE.0.OR.ICONV.EQ.0)GOTO 50                              FEM01700
      READ 520,NBE,(IBN(I),I=1,NBE)                                    FEM01710
      READ 520,((INOD(I,J),J=1,2),I=1,NBE)                             FEM01720
   50 READ 520, NSDF                                                   FEM01730
      IF(NSDF.EQ.0)GOTO 60                                             FEM01740
      READ 520, (IBDF(I),I=1,NSDF)                                     FEM01750
      READ 580, (VBDF(I),I=1,NSDF)                                     FEM01760
   60 READ 520, NSBF                                                   FEM01770
      IF(NSBF.EQ.0)GOTO 70                                             FEM01780
      READ 520, (IBSF(I),I=1,NSBF)                                     FEM01790
      READ 580, (VBSF(I),I=1,NSBF)                                     FEM01800
   70 IF(ITEM.EQ.1)READ 580, DT,THETA,T0                               FEM01810
      IF(ITEM.EQ.1)READ 580, (GP(I), I=1,NEQ)                          FEM01820
C                                                                      FEM01830
C     E N D   O F   T H E   D A T A   I N P U T                        FEM01840
C                                                                      FEM01850
      IF (ITYPE.LT.0) NDF=1                                            FEM01860
      IF (ITYPE.GE.0) NDF=2                                            FEM01870
      NEQ=NNM*NDF                                                      FEM01880
      NN=NPE*NDF                                                       FEM01890
      PRINT 600, IEL,ITYPE,ICONV                                       FEM01900
      IF(ITYPE.EQ.2)C2=C2*1.0D8                                        FEM01910
```

```
      IF(ITYPE.EQ.2)PRINT 650, C1,C2                                    FEM01920
      IF(ITYPE.EQ.0. OR. ITYPE.EQ.1)PRINT 530, C1,C2,C3,C4,C5           FEM01930
      IF(ITYPE.LT.0)PRINT 510, C1,C2,C3,C4,C5                           FEM01940
      PRINT 450, NEM,NNM,NEQ                                            FEM01950
      IF(ICONV.EQ.1)PRINT 470, NBE, (IBN(I),I=1,NBE)                    FEM01960
      PRINT 560                                                         FEM01970
      PPINT 480, (X(I),Y(I),I=1,NNM)                                    FEM01980
      PRINT 500                                                         FEM01990
      DO 75 I=1,NEM                                                     FEM02000
   75 PRINT 440, I,(NOD(I,J),J=1,NPE)                                   FEM02010
      IF(NSDF.GT.0)PRINT 460, NSDF,(IBDF(I),I=1,NSDF)                   FEM02020
      IF(NSBF.EQ.0)GOTO 80                                              FEM02030
      PRINT 640, NSBF,(IBSF(I),I=1,NSBF)                                FEM02040
      PRINT 600                                                         FEM02050
      PRINT 480, (VBSF(I),I=1,NSBF)                                     FEM02060
   80 IF(ITYPE.LT.0. OR. ITYPE.EQ.2)GOTO 100                            FEM02070
C                                                                       FEM02080
C     :.........................................................:       FEM02090
C     :                                                         :       FEM02100
C     :              P R O C E S S O .   U N I T                :       FEM02110
C     :                                                         :       FEM02120
C     :.........................................................:       FEM02130
```

```
C                                                                      FEM02140
C     COMPUTE THE MATERIAL-CONSTANTS FOR PLANE ELASTICITY PROBLEMS     FEM02150
C                                                                      FEM02160
      ANU21 = C3*C2/C1                                                 FEM02170
      DENOM = 1.0 - C3*ANU21                                           FEM02180
C     PLANE STRESS CASE                                                FEM02190
      C(1,1) = C1*C5/DENOM                                             FEM02200
      C(1,2) = ANU21*C(1,1)                                            FEM02210
      C(2,2) = C2*C(1,1)/C1                                            FEM02220
      IF(ITYPE.EQ.0)GOTO 90                                            FEM02230
C     PLANE STRAIN CASE                                                FEM02240
      SO = (1.0 - 3.0*C3*ANU21 - C3*ANU21*(C3 + ANU21))                FEM02250
      C(1,1) = C1*C5*DENOM/SO                                          FEM02260
      C(1,2) = C1*C5*ANU21*(1.0 + C3)/SO                               FEM02270
      C(2,2) = C2*C(1,1)/C1                                            FEM02280
   90 C(3,3) = C4*C5                                                   FEM02290
      C(1,3) = 0.0                                                     FEM02300
      C(2,3) = 0.0                                                     FEM02310
      C(2,1) = C(1,2)                                                  FEM02320
      C(3,1) = C(1,3)                                                  FEM02330
      C(3,2) = C(2,3)                                                  FEM02340
C                                                                      FEM02350
```

```
C     COMPUTE THE HALF BAND WIDTH                                       FEM02360
C                                                                       FEM02370
  100 NHBW=0                                                            FEM02380
      DO 110 N=1,NEM                                                    FEM02390
      DO 110 I=1,NPE                                                    FEM02400
      DO 110 J=1,NPE                                                    FEM02410
      NW=(IABS(NOD(N,I)-NOD(N,J))+1)*NDF                                FEM02420
  110 IF (NHBW.LT.NW) NHBW=NW                                           FEM02430
      PRINT 590, NHBW                                                   FEM02440
      IF(ITEM.NE.1)GOTO 125                                             FEM02450
      TIME=0.0                                                          FEM02460
      PRINT 420, DT,THETA,T0                                            FEM02470
      A0=(1.0-THETA)*DT                                                 FEM02480
      A1=THETA*DT                                                       FEM02490
  120 TIME=TIME+DT                                                      FEM02500
      IF(TIME.GT.T0)STOP                                                FEM02510
C                                                                       FEM02520
C     INITIALIZE THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX AND FORCE VECTOR           FEM02530
C                                                                       FEM02540
  125 DO 130 I=1,NEQ                                                    FEM02550
      GF(I)=0.0                                                         FEM02560
      DO 130 J=1,NHBW                                                   FEM02570
```

```
  130 GSTIF(I,J)=0.0                                                    FEM02580
C                                                                       FEM02590
C     DO-LOOP ON THE NUMBER OF ELEMENTS TO CALCULATE THE ELEMENT        FEM02600
C     MATPICES, AND ASSEMBLY OF THE ELEMENT MATRICES BEGINS HERE        FEM02610
C                                                                       FEM02620
  140 DO 300 N=1,NEM                                                    FEM02630
      DO 150 I=1,NPE                                                    FEM02640
      NI=NOD(N,I)                                                       FEM02650
      ELXY(I,1)=X(NI)                                                   FEM02660
      ELXY(I,2)=Y(NI)                                                   FEM02670
      IF(ITEM.EQ.0)GOTO 150                                             FEM02680
      L=NI*NDF-1                                                        FEM02690
      K=I*NDF-1                                                         FEM02700
      IF(NDF.EQ.1)K=I                                                   FEM02710
      IF(NDF.EQ.1)L=NI                                                  FEM02720
      W0(K)=GP(L)                                                       FEM02730
      W0(K+1)=GP(L+1)                                                   FEM02740
  150 CONTINUE                                                          FEM02750
      IF(IEL.GT.0)CALL STIFFQ(NPE,NN,IEL,ITYPE,ITEM,C1,C2,C5)           FEM02760
      IF(IEL.EQ.0)CALL STIFFT(NPE,NN,IEL,ITYPE,ITEM,C1,C2,C5)           FEM02770
      IF(N.NE.NPRNT)GOTO 170                                            FEM02780
      PRINT 680                                                         FEM02790
```

```
      DO 160 I=1, NN                                                          FEM02800
  160 PRINT 670, (ELSTIF(I,J),J=1,NN)                                         FEM02810
  170 IF (ICONV.EQ.0) GO TO 200                                               FEM02820
C                                                                             FEM02830
C     ADDITION OF THE CONVECTIVE TERMS TO THE ELEMENT MATRIX                  FEM02840
C                                                                             FEM02850
      DO 180 M=1,NBE                                                          FEM02860
      IF (IBN(M).NE. N)GO TO 180                                              FEM02870
      M  = INOD(M,1)                                                          FEM02880
      M2 = INOD(M,2)                                                          FEM02890
      NM1 = NOD(N,M1)                                                         FEM02900
      NM2 = NOD(N,M2)                                                         FEM02910
      DL = DSQRT((X(NM2) - X(NM1))**2 + (Y(NM2) - Y(NM1))**2)                 FEM02920
      BL = C3*DL                                                              FEM02930
      ELSTIF(M1,M1) = ELSTIF(M1,M1) + BL/3.0                                  FEM02940
      ELTTIF(M2,M2) = ELSTIF(M2,M2) + BL/3.0                                  FEM02950
      ELSTIF(M1,M2) = ELSTIF(M1,M2) + BL/6.0                                  FEM02960
      ELSTIF(M2,M1) = ELSTIF(M1,M2)                                           FEM02970
      F(M1) = F(M1) + 0.5*BL*C4                                               FEM02980
      F(M2) = F(M2) + 0.5*BL*C4                                               FEM02990
  180 CONTINUE                                                                FEM03000
C                                                                             FEM03010
```

```
C     ASSEMBLE ELEMENT MATRICES TO OBTAIN GLOBAL MATRIX                     FEM03020
C                                                                           FEM03030
  2?0 DO 280 I=1,NPE                                                        FEM03040
      NR=(NOD(N,I)-1)*NDF                                                   FEM03050
      DO 280 II=1,NDF                                                       FEM03060
      NR=NR+1                                                               FEM03070
      L=(I-1)*NDF+II                                                        FEM03080
      GF(NR)=GF(NR)+F(L)                                                    FEM03090
      DO 260 J=1,NPE                                                        FEM03100
      NCL=(NOD(N,J)-1)*NDF                                                  FEM03110
      DO 260 JJ=1,NDF                                                       FEM03120
      M=(J-1)*NDF+JJ                                                        FEM03130
      NC=NCL+JJ+1-NR                                                        FEM03140
      IF (NC) 260,260,250                                                   FEM03150
  250 GSTIF(NR,NC)=GSTIF(NR,NC)+ELSTIF(L,M)                                 FEM03160
  260 CONTINUE                                                              FEM03170
  280 CONTINUE                                                              FEM03180
  300 CONTINUE                                                              FEM03190
C                                                                           FEM03200
C     ASSEMBLED MATRIX EQUATIONS ARE NOW READY FOR IMPLEMENTATION           FEM03210
C     OF THE BOUNDARY CONDITIONS ON PRIMARY AND SECONDARY VARIABLES         FEM03220
C                                                                           FEM03230
```

```
      IRES=0                                                              FEM03240
      IF (NSBF.EQ.0) GO TO 320                                            FEM03250
      DO 310 I=1,NSBF                                                     FEM03260
      II=IBSF(I)                                                          FEM03270
  310 GF(II)=VBSF(I)+GF(II)                                               FEM03280
  320 IF(NPRNT.LE.1)GOTO 340                                              FEM03290
      PRINT 700                                                           FEM03300
      DO 330 I=1,NEQ                                                      FEM03310
  330 PRINT 480, (GSTIF(I,J),J=1,NHBW)                                    FEM03320
      PRINT 710                                                           FEM03330
      PRINT 480, (GF(I),I=1,NEQ)                                          FEM03340
  340 IF (NSDF.EQ.0) GO TO 350                                            FEM03350
      CALL BNDY(NRMAX,NCMAX,NEQ:NHBW,GSTIF,GF,NSDF,IBDF,VBDF)             FEM03360
C                                                                         FEM03370
C     CALL SUBROUTINE 'SOLVE' TO SOLVE THE SYSTEM OF EQUATIONS FOR THE    FEM03380
C     PRIMARY DEGREES OF FREEDOM(THE SOLUTION IS RETURNED IN ARRAY GF)    FEM03390
C                                                                         FEM03400
  350 CALL SOLVE (NRMAX,NCMAX,NEQ,NHBW,GSTIF,GF,IRES)                     FEM03410
C                                                                         FEM03420
C     :..............................................................:   FEM03430
C     :                                                              :   FEM03440
C     :              P O S T P R O C E S S O R   U N I T            :   FEM03450
```

```
C     :                                                              : FEM03460
C     :..............................................................: FEM03470
C                                                                      FEM03480
      IF(ITEM.EQ.0)GOTO 370                                            FEM03490
      DO 360 I=1,NEQ                                                   FEM03500
  360 GP(I)=GF(I)                                                      FEM03510
      PRINT 430, TIME                                                  FEM03520
  370 PRINT 540                                                        FEM03530
      IF(ITYPE.GE.0)PRINT 485,(I,GF(I+I-1),GF(I+I),I=1,NNM)            FEM03540
      IF(ITYPE.LT.0)PRINT 480,(GF(I),I=1,NNM)                          FEM03550
      PRINT 690                                                        FEM03560
      IF(ITYPE.GE.0)PRINT 620                                          FEM03570
      IF(ITYPE.LT.0)PRINT 410                                          FEM03580
      DO 390 N=1,NEM                                                   FEM03590
      DO 380 I=1,NPE                                                   FEM03600
      NI=NOD(N,I)                                                      FEM03610
      L=NI*NDF-1                                                       FEM03620
      IF(NDF.EQ.1)L=NI                                                 FEM03630
      W(1,I)=GF(L)                                                     FEM03640
      IF(NDF.EQ.2)W(2,I)=GF(L+1)                                       FEM03650
      ELXY(I,1)=X(NI)                                                  FEM03660
  380 ELXY(I,2)=Y(NI)                                                  FEM03670
```

```
390 CALL STRESS(N,NPE,FLXY,C,W,C1,C2,ITYPE,IEL)                         FEM03680
    IF (ITEM.EQ.1)GOTO 120                                              FEM03690
    STOP                                                                FEM03700
C                                                                       FEM03710
C                          F O R M A T S                                FEM03720
C                                                                       FEM03730
400 FORMAT(20A4)                                                        FEM03740
410 FORMAT (7X,'ELE.NO.',2X,'X-COMPONENT',6X,'Y-COMPONENT',7X,'MAGNIT   FEM03750
   1UDE',9X,'ANGLE',/)                                                  FEM03760
420 FORMAT (10X, 'THETA =',E10.3,2X,'TIME STEP =',E10.3,2X,'MAX. TIME ='FEM03770
   1,E10.3)                                                             FEM03780
430 FORMAT (/,3X,'TIME =',F10.3,/)                                      FEM03790
440 FORMAT (10X,20I5)                                                   FEM03800
450 FORMAT (10X,'ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH......=',I3,/,    FEM03810
   *10X,'NUMBER OF NODES IN THE MESH.........................=',I3,/,10X,'TOTAL FEM03820
   2NUMBER OF EQUATIONS IN THE MODEL......=',I3,/)                      FEM03830
460 FORMAT (/,5X,'NO.OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM...........=',I3,/, FEM03840
   *5X,'ARRAY OF THE SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM=',10I5,/,10X,         FEM03850
   *20I5,/,10X,20I5,/,10X,20I5,/,10X,20I5,/)                            FEM03860
470 FORMAT (/,10X,'CONVECTIVE BOUNDARY DATA: NBE..............=',I3,/,10X, FEM03870
   *'ARRAY IBN:',10I5)                                                  FEM03880
480 FORMAT (6(2X,E12.5))                                                FEM03890
```

```
485 FORMAT (2(I6,2E15.5,10X))                                                    FEM03900
500 FORMAT (/,5X,'BOOLEAN (CONNECTIVITY) MATRIX  NOD (I, J)',/)                  FEM03910
510 FORMAT (10X, 'PARAMETERS, C1, C2, C3, C4, AND C5:',/,15X,C1=',               FEM03920
   *E10.3,/,15X,'C2=',E10.3,/,15X,C3=',E10.3,/,15X,'C4=',E10.3,/,                FEM03930
   *15X,'C5=',E10.3)                                                             FEM03940
510 FORMAT (16I5)                                                                FEM03950
530 FORMAT (10X, MODULUS OF ELASTICITY, E1....................=',E10.3,/,        FEM03960
   *10X,'MODULUS OF ELASTICITY, E2....................=',E10.3,/,10X,            FEM03970
   *'POISSONS RATIO, ANU12..........................=',E10.3,/,10X,              FEM03980
   *'SHEAR MODULUS, G12.............................=',E10.3,/,10X,              FEM03990
   *'PLATE THICKNESS, T ............................=',E10.3)                    FEM04000
540 FORMAT (/,3X,'SOLUTION VECTOR:',/)                                           FEM04010
550 FORMAT (5X,'A   P L A N E   E L A S T I C I T Y   O R   P L U I D            FEM04020
   1 F L O W   P R O B L E M',/)                                                 FEM04030
560 FORMAT (3X,'COORDINATES OF THE GLOBAL NODES: ',/)                            FEM04040
570 FORMAT (3X,'H E A T   T R A N S F E R   T Y P E   P R O B L E M',/)          FEM04050
580 FORMAT (8F10.4)                                                              FEM04060
590 FORMAT (5X,'HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MATRIX=',I3)                 FEM04070
600 FORMAT(/,5X,'VALUES OF THE SPECIFIED FORCES:',/)                             FEM04080
620 FORMAT (/,6X,'ELE.NO.',3X,'STRESS,SXX',6X,'STRESS,SYY',6X,'STRES             FEM04090
   *S,SXY',8X,'PRESSURE',/)                                                      FEM04100
640 FORMAT(/,5X,'NO.OF SPECIFIED FORCES=',I5,/,5X,'SPECIFIED FORCE               FEM04110
```

```
      1DEGREES OF FREEDOM :',15I5,/)                                    FEM04120
  650 FORMAT(10X,'VISCOSITY.................................=',E10.3,/,  FEM04130
     *10X,'PENALTY PARAMETER.........................=',E10.3)           FEM04140
  660 FORMAT(10X,'ELEMENT TYPE..............................=',I2,/,     FEM04150
     *10X,'PROBLEM TYPE..................................=',I2,/,10X,    FEM04160
     *' CONVECTION (0:NO, 1:YES).....................=', I2)            FEM04170
  670 FORMAT(5E15.5)                                                     FEM04180
  680 FORMAT(3X,' ELEMENT MATRICES:', /)                                 FEM04190
  690 FORMAT(/, 5X, 'THE ANGLE IS DEFINED TO BE THE ARC TANGENT OF       FEM04200
     Y-COMPO NENT DIVIDED BY THE X-COMPONENT', /)                        FEM04210
  700 FORMAT(3X, 'GLOBAL STIFFNESS MATRIX:', /)                          FEM04220
  710 FORMAT(/, 3X, 'GLOBAL FORCE VECTOR:', /)                           FEM04230
      END                                                                FEM04240
      SUBROUTINE STIFFT(NPE, NN, IEL, ITYPE, ITEM, AK1, AK2, Q)          STF00010
C                                                                        STF00020
C   .................................................................... STF00030
C                                                                        STF00040
C     THE SUBROUTINE COMPUTES THE ELEMENT COEFFICIENT MATRICES FOR       STF00050
C   HEAT TRANSFER TYPE AND PLANE ELASTICITY PROBLEMS WHEN THE LINEAR     STF00060
C     TRIANGULAR ELEMENT IS USED. CONSTANT SOURCE TERM IS USED FOR       STF00070
C   THE HEAT TRANSFER TYPE PROBLEMS AND ZERO FORCE TERMS ARE ASSUMED     STF00080
C     FOR PLANE ELASICITY PROBLEMS IN COMPUTING THE 'FORCE' VECTOR.      STF00090
```

```
C     .............................................................................  STF00100
C                                                                                    STF00110
      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)                                                      STF00120
      COMMON/STF/ELSTIF(18, 18), ELXY(9, 2), C(3, 3), F(18), W0(18), A0, A1         STF00130
      DIMENSIOH B(3, 6), BT(6, 3), STR(3, 6), ALPHA(3), BETA(3), GAMA(3)            STF00140
     1            , X(3), Y(3)                                                       STF00150
C                                                                                    STF00160
C     DEFINE THE COEFFICIENTS OF THE INTERPOLATION FUNCTIONS                         STF00170
C                                                                                    STF00180
      DO 10 I=1, NPE                                                                 STF00190
      X(I)=ELXY(I, 1)                                                                STF00200
      Y(I)=ELXY(I, 2)                                                                STF00210
      DO 10 J=1, NN                                                                  STF00220
   10 B(I, J)=0.0                                                                    STF00230
      DO 20 I=1, NPE                                                                 STF00240
      J=I+1                                                                          STF00250
      IF (J.GT.NPE) J=J-NPE                                                          STF00260
      K=J+1                                                                          STF00270
      IF (K.GT.NPE) K=K-NPE                                                          STF00280
      ALPHA(I)=X(J)*Y(K)-X(K)*Y(J)                                                   STF00290
      BETA(I)=Y(J)-Y(K)                                                              STF00300
   20 GAMA(I)=X(K)-X(J)                                                              STF00310
```

```
      DET = X(1)*(Y(2) - Y(3)) + X(2)*(Y(3) - Y(1)) + X(3)*(Y(1) - Y(2))   STF00320
      IF(ITYPE)100, 40, 40                                                  STF00330
C                                                                           STF00340
C  COMPUTE THE ELEMENT STIFFNESS MATRIX FOR PLANE ELASTICITY PROBLEM       STF00350
C                     K = CONST* BT  C  B                                   STF00360
C            ZERO BODY FORCES ARE ASSUMED: F(I) = 0.0                       STF00370
C                                                                           STF00380
   40 DO 60 I = 1, NPE                                                      STF00390
      J = 2*I - 1                                                           STF00400
      B(1,J) = BETA(I)/DET                                                  STF00410
      B(3, J) = GAMA(I)/DET                                                 STF00420
      B(2, J + 1) = GAMA(I)/DET                                             STF00430
   60 B(3, J + 1) = BETA(I)/DET                                             STF00440
      DO 70 I = 1, 3                                                        STF00450
      DO 70 J = 1, NN                                                       STF00460
      BT(J, I) = 0.5*DET*B(I, J)                                            STF00470
      STR(I, J) = 0.0                                                       STF00480
      DO 70 K = 1, 3                                                        STF00490
   70 STR(I, J) = STR(I, J) + C(I, K)*B(K, J)                               STF00500
      DO 80 I = 1, NN                                                       STF00510
      F(I) = 0.0                                                            STF00520
```

```
      DO  80  J=1, NN                                                    STF00530
      ELSTIF(I, J)=0.0                                                   STF00540
      DO  80  K=1, 3                                                     STF00550
   80 ELSTIF(I, J)=ELSTIF(I, J)+BT(I, K)*STR(K, J)                       STF00560
      RETURN                                                             STF00570
C                                                                        STF00580
C     COMPUTE THE COEFFICIENT MATRIX FOR HEAT TRANSFER TYPE PROBLEMSSTF00590
C                                                                        STF00600
  100 XBAR=(X(1)+X(2)+X(3))/3.0                                          STF00610
      YBAR=(Y(1)+Y(2)+Y(3))/3.0                                          STF00620
      A00=0.5*DET                                                        STF00630
      A01=A00*YBAR                                                       STF00640
      A10=A00*XBAR                                                       STF00650
      A11=A00*(X(1)*Y(1)+X(2)*Y(2)+X(3)*Y(3)+9.0*XBAR*YBAR)/12.0         STF00660
      A22=A00*(X(1)*X(1)+X(2)*X(2)+X(3)*X(3)+9.0*XBAR*XBAR)/12.0         STF00670
      A02=A00*(Y(1)*Y(1)+Y(2)*Y(2)+Y(3)*Y(3)+9.0*YBAR*YBAR)/12.0         STF00680
      ONLY CONSTANT SOURCE TERM IS ASSUMED                               STF00690
      DO  120  I=1, NPE                                                  STF00700
      F(I)=0.5*Q*(ALPHA(I)+BETA(I)*XBAR+GAMA(I)*YBAR)                    STF00710
      DO  120  J=1, NPE                                                  STF00720
  120 ELSTIF(I, J)=(AK1*BETA(I)*BETA(J)+AK2*GAMA(I)*GAMA(J))/DET/2.0     STF00730
```

```
      IF(ITEM.EQ.0)RETURN                                            STF00740
C                                                                    STF00750
C     DEFINE THE MASS MATRIX FOR TRANSIENT PROBLEMS                  STF00760
C                                                                    STF00770
      DO 140 I=1, NPE                                                STF00780
      DO 140 J=1, NPE                                                STF00790
  140 B(I, J)=(ALPHA(I)*ALPHA(J)*A00+(ALPHA(I)*BETA(J)+ALPHA(J)*BETA(I))*  STF00800
     1A10+(BETA(I)*GAMA(J)+GAMA(I)*BETA(J))*A11+(ALPHA(I)*GAMA(J)+GAMAI  STF00810
     2)*ALPHA(J))*A01+BETA(I)*BETA(J)*A20+GAMA(I)*GAMA(J)*A02)/(DET*DET)  STF00820
      DO 160 I=1, NPE                                                STF00830
      SUM=0.0                                                        STF00840
      DO 150 J=1, NPE                                                STF00850
      SUM=SUM+(B(I, J)-A0*ELSTIF(I, J))*W0(J)                        STF00860
  150 ELSTIF(I, J)=B(I, J)+A1*ELSTIF(I, J)                           STF00870
  160 F(I)=(A0+A1)*F(I)+SUM                                          STF00880
      RETURN                                                         STF00890
      END                                                            STF00900
      SUBROUTINE STIFFQ(NPE, NN, IEL, ITYPE, ITEM, AK1, AK2, Q)      STQ00010
C                                                                    STQ00020
C     ..............................................................  STQ00030
C     STIFFNESS MATRIX FOR ISOPARAMETRIC QUADRILATERAL ELEMENTS      STQ00040
```

```
C     ..........................................................................  STQ00050
C                                                                                 STQ00060
      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)                                                   STQ00070
      COMMON/STF/ELSTIF(18, 18), ELXY(9, 2), C(3, 3), F(18), W0(18), A0, A1       STQ00080
      DIMENSION SF(9), GDSF(2, 9), GAUSS(4, 4), WT(4, 4), SS(18, 18), S(9, 9)     STQ00090
     *          , SXY(9, 9), SX(9, 9), SY(9, 9)                                   STQ00100
C                                                                                 STQ00110
      DATA GAUSS/4*0.0D0, -.57735027D0, .57735027D0, 2*0.0D0, -.77459667D0,       STQ00120
     20.0D0, .77459667D0, 0.0D0, -.86113631D0,                                    STQ00130
     3-.33998104D0, .33998104D0, .86113631D0/                                     STQ00140
C                                                                                 STQ00150
      DATA WT/2.0D0, 3*0.0D0, 2*1.0D0, 2*0.0D0,.55555555D0, .88888888D0,         STQ00160
     2.55555555D0, 0.0D0, .34785485D0, 2*.65214515D0, .34785485D0/               STQ00170
C                                                                                 STQ00180
      NDF=NN/NPE                                                                  STQ00190
      NGP=IEL+1                                                                   STQ00200
                                                                                  STQ00210
C     INITIALIZE THE ARRAYS                                                       STQ00220
C                                                                                 STQ00230
C     DO 20 I=1, NPE                                                              STQ00240
      DO 20 J=1, NPE                                                              STQ00250
```

```
      S(I, J)=0.0                                                      STQ00260
      SX(I, J)=0.0                                                     STQ00270
      SY(I, J)=0.0                                                     STQ00280
   20 SXY(I, J)=0.0                                                    STQ00290
      DO 30 I=1, NN                                                    STQ00300
      F(I)=0.0                                                         STQ00310
      DO 30 J=1, NN                                                    STQ00320
   30 SS(I, J)=0.0                                                     STQ00330
C                                                                      STQ00340
C     DO-LOOPS ON NUMERICAL (GAUSS) QUADRATURE BEGIN HERE              STQ00350
C                                                                      STQ00360
      DO 100 NI=1, NGP                                                 STQ00370
      DO 100 NJ=1, NGP                                                 STQ00380
      XI=GAUSS(NI, NGP)                                                STQ00390
      ETA=GAUSS(NJ, NGP)                                               STQ00400
      CALL SHAPE(NPE, XI, ETA, SF, GDSF, DET, ELXY)                    STQ00410
      CONST=DET*WT(NI, NGP)*WT(NJ, NGP)                                STQ00420
      DO 80 I=1, NPE                                                   STQ00430
      IF(ITYPE.GE.0)GOTO 60                                            STQ00440
C     CONSTANT SOURCE TERM IS ASSUMED ONLY FOR HEAT TRANSFER TYPE PROB.STQ00450
      F(I)=F(I)+Q*SF(I)*CONST                                          STQ00460
```

```
60  DO  80  J=1, NPE                                                   STQ00470
    S(I, J)=S(I, J)+CONST*SF(I)*SF(J)                                  STQ00480
    SX(I, J)=SX(I, J)+CONST*GDSF(1, I)*GDSF(1, J)                      STQ00490
    SY(I, J)=SY(I, J)+CONST*GDSF(2, I)*GDSF(2, J)                      STQ00500
    SXY(I, J)=SXY(I, J)+CONST* GDSF(1, I)*GDSF(2, J)                   STQ00510
80  CONTINUE                                                           STQ00520
100 CONTINUE                                                           STQ00530
C                                                                      STQ00540
C   ELEMENT CACULATIONSFOR HEAT TRANSFER TYPE PROBLEMS                 STQ00550
C                                                                      STQ00560
    IF(ITYPE .GE. 0)GOTO 140                                           STQ00570
    DO  110  I=1, NPE                                                  STQ00580
    DO  110  J=1  NPE                                                  STQ00590
110 ELSTIF(I, J)=AK1*SX(I, J)+AK2*SY(I, J)
    IF(ITEM.EQ.0)RETURN                                                STQ00600
    DO  130  I=1, NPE                                                  STQ00610
    SUM=0.0                                                            STQ00620
    DO  120  J=1, NPE                                                  STQ00630
    SUM=SUM+(S(I, J)-A0*ELSTIF(I, J))*W0(J)                            STQ00640
120 ELSTIF(I, J)=S(I, J)+A1*ELSTIF(I, J)                               STQ00650
                                                                       STQ00660
```

```
  130 F(I)=(A0+A1)*F(I)+SUM                                      STQ00670
      RETURN                                                     STQ00680
  140 IF(ITYPE.EQ.2)GOTO 230                                     STQ00690
C                                                                STQ00700
C     ELEMENT CALCULATIONS FOR PLANE ELASTICITY PROBLEMS         STQ00710
C               NO BODY FORCES ARE ACCOUNTED FOR                 STQ00720
C                                                                STQ00730
      II=1                                                       STQ00740
      DO 200 I=1, NPE                                            STQ00750
      JJ=1                                                       STQ00760
      DO 150 J=1, NPE                                            STQ00770
      ELSTIF(II, JJ)=C(1, 1)*SX(I, J)+C(3, 3)*SY(I, J)           STQ00780
      ELSTIF(II+1, JJ+1)=C(3, 3)*SX(I, J)+C(2, 2)*SY(I, J)       STQ00790
      ELSTIF(II, JJ+1)=C(1, 2)*SXY(I, J)+C(3, 3)*SXY(J, I)       STQ00800
      ELSTIF(II+1, JJ)=C(1, 2)*SXY(J, I)+C(3, 3)*SXY(I, J)       STQ00810
  150 JJ=NDF*J+1                                                 STQ00820
  200 II=NDF*I+1                                                 STQ00830
      RETURN                                                     STQ00840
C                                                                STQ00850
C     ELEMENT CALCULATIONS FOR INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW         STQ00860
C              USE FULL INTEGRATION ON VISCOUS TERMS             STQ00870
```

```
C               NO BODY FORCES ARE ACCOUNTED FOR HERE                 STQ00880
C                                                                     STQ00890
  230  II=1                                                           STQ00900
       DO 250 I=1, NPE                                                STQ00910
       JJ=1                                                           STQ00920
       DO 240 J=1, NPE                                                STQ00930
       ELSTIF(II, JJ)=AK1*(2.0*SX(I, J)+SY(I, J))                     STQ00940
       ELSTIF(II+1, JJ)=AK1*SXY(I, J)                                 STQ00950
       ELSTIF(II, JJ+1)=AK1*SXY(J, I)                                 STQ00960
       ELSTIF(II+1, JJ+1)=AK1*(SX(I, J)+2.0*SY(I, J))                 STQ00970
       IF(ITEM.EQ.0)GOTO 240                                          STQ00980
       SS(II, JJ)=S(I, J)                                             STQ00990
       SS(II+1, JJ+1)=S(I, J)                                         STQ01000
  240  JJ=NDF*J+1                                                     STQ01010
  250  II=NDF*I+1                                                     STQ01020
C                                                                     STQ01030
C      USE REDUCED INTEGRATION ON PENALTY TERMS                       STQ01040
C                                                                     STQ01050
       DO 300 NI=1, IEL                                               STQ01060
       DO 300 NJ=1, IEL                                               STQ01070
       XI=GAUSS(NI, IEL)                                              STQ01080
```

```
      ETA=GAUSS(NJ, IEL)                                              STQ01090
      CALL SHAPE(NPE, XI, ETA, SF, GDSF, DET, ELXY)                   STQ01100
      CONST=DET*WT(NI, IEL)*WT(NJ, IEL)                               STQ01110
      II=1                                                            STQ01120
      DO 280 I=1, NPE                                                 STQ01130
      JJ=1                                                            STQ01140
      DO 260 J=1, NPE                                                 STQ01150
      ELSTIF(II, JJ)=ELSTIF(II, JJ)+AK2*GDSF(1, I)*GDSF(1, J)*CONST   STQ01160
      ELSTIF(II+1, JJ)=ELSTIF(II+1, JJ)+AK2*GDSF(2, I)*GDSF(1, J)*CONST   STQ01170
      ELSTIF(II, JJ+1)=ELSTIF(II, JJ+1)+AK2*GDSF(1, I)*GDSF(2, J)*CONST   STQ01180
      ELSTIF(II+1, JJ+1)=ELSTIF(II+1, JJ+1)+AK2*GDSF(2, I)*GDSF(2, J)*CONST STQ01190
  260 JJ=NDF*J+1                                                      STQ01200
  280 II=NDF*I+1                                                      STQ01210
  300 CONTINUE                                                        STQ01220
      IF(ITEM. EQ.0)RETURN                                            STQ01230
      DO 320 I=1, NN                                                  STQ01240
      DO 320 J=1, NN                                                  STQ01250
      F(I)=F(I)+(SS(I, J)-A0*ELSTIF(I, J))*W0(J)                      STQ01260
  320 ELSTIF(I, J)=SS(I, J)+A1*ELSTIF(I, J)                           STQ01270
      RETURN                                                          STQ01280
      END                                                             STQ01290
```

```
      SUBROUTINE SHAPE(NPE, XI, ETA, SF, GDSF, DET, ELXT)                 SHP00010
C                                                                         SHP00020
C.......................................................................  SHP00030
C     THE SUBROUTINE EVALUATES THE INTERPOLATION FUNCTIONS (SF(I)) AND    SHP00040
C     ITS DERIVATIVES WITH RESPECT TO NATURAL COORDINATES (DSF(I,J)),     SHP00050
C     AND THE DERIVATIVES OF SF(I) WITH RESPECT TO GLOBAL COORDINATES     SHP00060
C     FOR FOUR,EIGHT,AND NINE NODE RECTANGULAR ISOPARAMETRIC              SHP00070
      ELEMENTS.
C                                                                         SHP00080
C     SF(I)...........INTERPOLATION FUNCTION FOR NODE I OF THE ELEMENT    SHP00090
C     DSF(I,J).......DERIVATIVE OF SF(J) WITH RESPECT TO XI IF I=1 AND    SHP00100
C                     WITH RESPECT TO ETA IF I=2.                         SHP00110
C     GDSF(I,J)......DERIVATIVE OF SF(J) WITH RESPECT TO X IF I=1 AND     SHP00120
C                     WITH RESPECT TO Y IF I=2.                           SHP00130
C     XNODE(I,J).....J-TH (J=1,2) COORDINATE OF NODE I OF THE ELEMENT     SHP00140
C     NP(I)..........ARRAY OF ELEMENT NODES(USED FOR DEFINING SF AND DSF) SHP00150
C     GJ(I,J)........JACOBIAN MATRIX                                      SHP00160
C     GJINV(I,J).....INVERSE OF THE JACOBIAN MATRIX                       SHP00170
C     ..................................................................  SHP00180
C                                                                         SHP00190
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)                                          SHP00200
```

```
      DIMENSION ELXY (9, 2), XNODE(9, 2), NP(9), DSF(2, 9), GJ(2,2),GJINV(2,2),  SHP00210
     1            SF(9), GDSF(2, 9)                                             SHP00220
      DATA XNODE/-1.0D0, 2*1.0D0, -1.0D0, 0.0D0, 1.0D0, 0.0D0, -1.0D0, 0.0D0,    SHP00230
     2            2*-1.0D0, 2*1.0D0, -1.0D0, 0.0D0, 1.0D0, 2*0.0D0/             SHP00240
      DATA NP/1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9/                                         SHP00250
C                                                                               SHP00260
      FNC (A, B) =A*B                                                           SHP00270
      IF (NPE-8) 60, 10, 80                                                     SHP00280
C                                                                               SHP00290
C     QUADRATIC INTERPOLATION FUNCTIONS (FOR THE EIGHT-NODE ELEMENT)             SHP00300
C                                                                               SHP00310
   10 DO 40 I=1, NPE                                                            SHP00320
      NI=NP (I)                                                                 SHP00330
      XP=XNODE (NI, 1)                                                          SHP00340
      YP=XNODE (NI, 2)                                                          SHP00350
      XI0=1.0+XI*XP                                                             SHP00360
      ETA0=1.0+ETA*YP                                                           SHP00370
      XI1=1.0-XI*XI                                                             SHP00380
      ETA1=1.0-ETA*ETA                                                          SHP00390
      IF (I.GT.4) GO TO 20                                                      SHP00400
      SF(NI)=0.25*FNC(XI0, ETA0)*(XI*XP+ETA*YP-1.0)                             SHP00410
```

```
      DSF(1, NI)=0.25*FNC (ETA0, XP)*(2.0*XI*XP+ETA*YP)                SHP00420
      DSF (2, NI) =0.25*FNC(XI0, YP)*(2.0*ETA*YP+XI*XP)                SHP00430
      GO TO 40                                                          SHP00440
   20 IF (I.GT.6) GO TO 30                                              SHP00450
      SF (NI) =0.5*FNC (XI1, ETA0)                                      SHP00460
      DSF(1, NI) =-FNC (XI, ETA0)                                       SHP00470
      DSF(2, NI)=0.5*FNC (YP, XI1)                                      SHP00480
      GO TO 40                                                          SHP00490
   30 SF(NI)=0.5*FNC (ETA1, XI0)                                        SHP00500
      DSF (1, NI) =0.5*FNC (XP, ETA1)                                   SHP00510
      DSF (2, NI) =-FNC (ETA, XI0)                                      SHP00520
   40 CONTINUE                                                          SHP00530
      GO TO 130                                                         SHP00540
C                                                                       SHP00550
C     LINEAR  INTERPOLATION FUNCTIONS (FOR FOUR-NODE ELEMENT)           SHP00560
C                                                                       SHP00570
   60 DO 70 I=1, NPE                                                    SHP00580
      XP=XNODE (I, 1)                                                   SHP00590
      YP=XNODE (I, 2)                                                   SHP00600
      XI0=1.0+XI*XP                                                     SHP00610
      ETA0=1.0+ETA*YP                                                   SHP00620
```

```
      SF (I) =0.25*FNC (XI0, ETA0)                                    SHP00630
      DSF (1, I) =0.25*FNC(XP, ETA0)                                  SHP00640
   70 DSF (2, I)=0.25*FNC (YP, XI0)                                   SHP00650
      GO TO 130                                                       SHP00660
C                                                                     SHP00670
C     QUDRATIC INTERPOLATION FUNCTIONS (FOR THE NINE-NODE ELEMENT)    SHP00680
C                                                                     SHP00690
   80 DO 120 I=1, NPE                                                 SHP00700
      NI=NP (I)                                                       SHP00710
      XP=XNODE (NI, 1)                                                SHP00720
      YP=XNODE (NI, 2)                                                SHP00730
      XI0=1.0+XI*XP                                                   SHP00740
      ETA0=1.0+ETA*YP                                                 SHP00750
      XI1=1.0-XI*XI                                                   SHP00760
      ETA1=1.0-ETA*ETA                                                SHP00770
      XI2=XP*XI                                                       SHP00780
      ETA2=YP*ETA                                                     SHP00790
      IF (I.GT.4) GOTO 90                                             SHP00800
```

```
      SF(NI)=0.25*FNC (XI0, ETA0)*XI2*ETA2                              SHP00810
      DSF (1, NI)  =0.25*XP*FNC (ETA2, ETA0)*(1.0+2.0*XI2)              SHP00820
      DSF(2, NI)=0.25*YP*FNC(XI2, XIO)*(1.0+2.0*ETA2)                   SHP00830
      GO TO 120                                                         SHP00840
 90   IF(I.GT.6)GO TO 100                                               SHP00850
      SF(NI)=0.5*FNC(XI1, ETA0)*ETA2                                    SHP00860
      DSF(1, NI)=-XI*FNC (ETA2, ETA0)                                   SHP00870
      DSF(2, NI)=0.5*FNC(XI1, YP)*(1.0+2.0*ETA2)                        SHP00880
      GO TO 120                                                         SHP00890
 100  IF(I .GT. 8)GO TO 110                                             SHP00900
      SF(NI)=0.5*FNC(ETA1, XI0)*XI2                                     SHP00910
      DSF(2, NI)=-ETA*FNC(XI2, XI0)                                     SHP00920
      DSF(1, NI)=0.5*FNC(ETA1, XP)*(1.0+2.0*XI2)                        SHP00930
      GO TO 120                                                         SHP00940
 110  SF(NI)=FNC(XI1, ETA1)                                             SHP00950
      DSF(1, NI)=-2.0*XI*ETA1                                           SHP00960
      DSF(2,NI)=-2.0*ETA*XI1                                            SHP00970
 120  CONTINUE                                                          SHP00980
 130  DO 140 I=1, 2                                                     SHP00990
      DO 140 J=1, 2                                                     SHP01000
      GJ(I, J)=0.0                                                      SHP01010
```

```
      DO 140 K=1, NPE                                              SHP01020
  140 GJ(I, J)=GJ(I, J)+DSF(I, K)*ELXY(K, J)                       SHP01030
      DET=GJ(1, 1)*GJ(2, 2)-GJ(1, 2)*GJ(2, 1)                      SHP01040
      GJINV(1, 1)=GJ(2, 2)/DET                                     SHP01050
      GJINV(2, 2)=GJ(1, 1)/DET                                     SHP01060
      GJINV(1, 2)=-GJ(1, 2)/DET                                    SHP01070
      GJINV(2, 1) =-GJ(2, 1)/DET                                   SHP01080
      DO 150 I=1, 2                                                SHP01090
      DO 150 J=1, NPE                                              SHP01100
      GDSF(I, J)=0.0                                               SHP01110
      DO 150 K=1, 2                                                SHP01120
  150 GDSF(I, J)=GDSF(I, J)+GJINV(I, K)*DSF(K, J)                  SHP01130
      RETURN                                                       SHP01140
      END                                                          SHP01150
      SUBROUTINE STRESS(N, NPE, ELXY, C, W, AK1, AK2, ITYPE, IEL)  STR00010
C                                                                  STR00020
C     ..........................................................   STR00030
C     SUBROUTINE TO COMPUTE THE GRADIENT OF SOLUTION AND           STR00040
C     STRESSES FOR TRIANGULAR AND Q ADRILATERAL ELEMENTS           STR00050
C     ..........................................................   STR00060
C                                                                  STR00070
```

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)                                        STR00080
      DIMENSION SF(9), GDSF(2, 9), C(3, 3), X(3), Y(3), GAMA(3), BETA(3)STR00090
     1          , ELXY(9, 2), W(2, 9)                                   STR00100
      CONST=180.0/3.14159265                                            STR00110
      UX=0.0                                                            STR00120
      UY=0.0                                                            STR00130
      VX=0.0                                                            STR00140
      VY=0.0                                                            STR00150
      IF(IEL.GT.0)GOTO 100                                              STR00160
C     ..................................................................STR00170
C     STRESS/GRADIENT COMPUTATION FOR TRIANGULAR ELEMETS                STR00180
C     ..................................................................STR00190
      DO 10 I=1, NPE                                                    STR00200
      X(I)=ELXY(I, 1)                                                   STR00210
   10 Y(I)=ELXY(1, 2)                                                   STR00220
      DO 20 I=1, NPE                                                    STR00230
      J=I+1                                                             STR00240
      IF(J.GT.NPE)J=J-NPE                                               STR00250
      K=J+1                                                             STR00260
      IF(K.GT.NPE)K=K-NPE                                               STR00270
      BETA(I)=Y(J)-Y(K)                                                 STR00280
```

```
20  GAMA(I)=X(K)-X(J)                                                    STR00290
    DET=X(1)*(Y(2)-Y(3))+X(2)*(Y(3)-Y(1))+X(3)*(Y(1)-Y(2))               STR00300
    IF(ITYPE)30, 70, 70                                                   STR00310
C                                                                         STR00320
30  DO 40 I=1, NPE                                                        STR00330
    UX=UX+W(1, I)*BETA (I) *AK1/DET                                       STR00340
40  UY=UY+W (1, I) *GAMA (I) *AK2/DET                                     STR00350
    VALU=DSQRT (UX**2+UY**2)                                              STR00360
    IF (UX.EQ.0.0) GOTO 50                                                STR00370
    ANGLE=DATAN2 (UY, UX)*CONST                                           STR00380
    GOTO 60                                                               STR00390
50  IF (UY.LT.0.0) ANGLE=-90.0                                            STR00400
    IF (UY.GT.0.0) ANGLE=90.0                                             STR00410
60  PRINT 4, N, UX, UY, VALU, ANGLE                                       STR00420
    RETURN                                                                STR00430
C                                                                         STR00440
C   CALCULATION OF STRESSES FOR PLANE ELASTICITY PROBLEMS                 STR00450
C                                                                         STR00460
70  DO 80 I=1, NPE                                                        STR00470
    UX=UX+BETA(I)*W (1, I)/DET                                            STR00480
    VY=VY+GAMA (I) *W(2, I)/DET                                           STR00490
    UY=UY+GAMA (I) *W (1, I)/DET                                          STR00500
```

```
80 VX=VX+BETA(I)*W(2, I)/DET                                  STR00510
   SX=C (1, 1)*UX+C (1, 2)*UY                                 STR00520
   SY=C (1, 2)*UX+C (2, 2)*UY                                 STR00530
   SXY=C(3, 3)*(UY+VX)                                        STR00540
   PRINT 4, N, SX, SY, SXY                                    STR00550
   RETURN                                                     STR00560
C     ......................................................  STR00570
C     CACULATION OF STRESSES/GRADIENT OF SOLUTION AT THE      STR00580
C           CENTER OF THE QUADRILATERAL ELEMENTS              STR00590
C     ......................................................  STR00600
C                                                             STR00610
 100 XI=0.0                                                   STR00620
     ETA=0.0                                                  STR00630
     CALL SHAPE (NPE, XI, ETA, SF, GDSF, DET, ELXY)           STR00640
     DO 110 I=1, NPE                                          STR00650
     UX=UX+W (1, I)*GDSF(1, I)                                STR00660
     UY=UY+W (1, I)*GDSF (2, I)                               STR00670
     VX=VX+W (2, I)*GDSF(1, I)                                STR00680
 110 VY=VY+W(2, I)*GDSF(2, I)                                 STR00690
     IF (ITYPE.LT.0) GOTO 120                                 STR00700
     IF (ITYPE.EQ.2) GOTO 150                                 STR00710
```

```
C                                                                      STR00720
C     STRESS COMPUTATION FOR PLANE ELASTICITY PROBLEMS                 STR00730
C                                                                      STR00740
      SX=C(1,1)*UX+C(1,2)*VY                                           STR00750
      SY=C(1,2)*UX+C(2,2)*VY                                           STR00760
      SXY=C(3,3)*(UY+VX)                                               STR00770
      PRINT 4, N, SX, SY, SXY                                          STR00780
      RETURN                                                           STR00790
C                                                                      STR00800
C     COMPUTATION OF THE GRADIENT OF THE SOLUTION IN HEAT-CONDUTIONSTR00810
C             TYPE PROBLEMS (ONE DEGREE-OF-FREEDOM PROBLEMS)           STR00820
C                                                                      STR00830
  120 SX=AK1*UX                                                        STR00840
      SY=AK2*UY                                                        STR00850
      VALU=DSQRT(SX**2+SY**2)                                          STR00860
      IF(SX.EQ.0.0)GOTO 130                                            STR00870
      ANGLE=DATAN2(SY,SX)*CONST                                        STR00880
      GOTO 140                                                         STR00890
  130 IF(SY.GT.0.0)ANGLE-90.0                                          STR00900
      IF(SY.LT.0.0)ANGLE=-90.0                                         STR00910
  140 PRINT 4, N, SX, SY, VALU, ANGLE                                  STR00920
```

```
      RETURN                                                        STR00930
C                                                                   STR00940
C     STRESS COMPUTATION FOR THE STOKES FLOW (PENALTY METHOD)       STR00950
C                                                                   STR00960
  150 P = -AK2*(UX+VY)                                              STR00970
      SX = 2.0*AK1*UX-P                                             STR00980
      SY = 2.0*AK1*VY-P                                             STR00990
      SXY = AK1*(UY+VX)                                             STR01000
      P = -AK2*(UX+VY)                                              STR01010
      PRINT 4, N, SX, SY, SXY, P                                    STR01020
    4 FORMAT (5X,I5,4(4X,E13.6))                                    STR01030
      RETURN                                                        STR01040
      END                                                           STR01050
      SUBROUTINE MESH(IEL, NX, NY, NPE, NNM, NEM)                   MSH00010
C                                                                   MSH00020
C     ..............................................................MSH00030
C     THE SUBROUTINE GENERATES ARRAY NOD(I, J), COORDINATES X(I), Y(I), MSH00040
C     AND MESH INFORMATION(NNM,NEM,NPE) FOR RECTANGULAR DOMAINS.THEMSH00050
C     DOMAIN IS DIVIDED INTO LINEAR TRIANGULAR ELEMENTS OR QUADRILA-MSH00060
C     TERAL ELEMENTS (NX BY NY NONUNIFORM MESH IN GENERAL).         MSH00070
C     ..............................................................MSH00080
C                                                                   MSH00090
```

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)                                        MSH00100
      COMMON/MSH/NOD(200, 9), X(225), Y(225), DX(15), DY(15)            MSH00110
      IF(IEL.GT.0)GOTO 100                                              MSH00120
C                                                                       MSH00130
C     MESH OF TRIANGULAR ELEMENTS                                       MSH00140
C                                                                       MSH00150
      NEM=2*NX*NY                                                       MSH00160
      NX1=NX+1                                                          MSH00170
      NY1=NY+1                                                          MSH00180
      NXX1=2*NX                                                         MSH00190
      NYY1=2*NY                                                         MSH00200
      NNM=NX1*NY1                                                       MSH00210
      NOD(1, 1)=1                                                       MSH00220
      NOD(1, 2)=2                                                       MSH00230
      NOD(1, 3)=NX1+2                                                   MSH00240
      NOD(2, 1)=1                                                       MSH00250
      NOD(2, 2)=NX1+2                                                   MSH00260
      NOD(2, 3)=NX1+1                                                   MSH00270
      K=3                                                               MSH00280
      DO 60 IY=1, NY                                                    MSH00290
      L=IY*NXX1                                                         MSH00300
      M=(IY-1)*NXX1                                                     MSH00310
```

```
      IF(NX.EQ.1)GOTO 40                                        MSH00320
      DO 30 N=K, L, 2                                           MSH00330
      DO 20 I=1, NPE                                            MSH00340
      NOD(N, I)=NOD(N-2, I)+1                                   MSH00350
20    NOD(N+1, I)=NOD(N-1, I)+1                                 MSH00360
30    CONTINUE                                                  MSH00370
40    IF(NY. EQ. 1)GOTO 60                                      MSH00380
      DO 50 I=1, NPE                                            MSH00390
      NOD(L+1, I)=NOD(M+1, I)+NX1                               MSH00400
50    NOD(L+2, I)=NOD(M+2, I)+NX1                               MSH00410
60    K=L+3                                                     MSH00420
70    L=0                                                       MSH00430
      YC=0.0                                                    MSH00440
      DO 90 J=1, NY1                                            MSH00450
      XC=0.0                                                    MSH00460
      DO 80 I=1, NX1                                            MSH00470
      L=L+1                                                     MSH00480
      X(L)=XC                                                   MSH00490
      Y(L)=YC                                                   MSH00500
80    XC=XC+DX(I)                                               MSH00510
90    YC=YC+DY(J)                                               MSH00520
```

```
      RETURN                                                     MSH00530
C                                                                MSH00540
C     MESH OF QUADRILATERAL ELEMENTS WITH FOUR, EIGHT, OR NINE NODESMSH00550
C                                                                MSH00560
  300 NEX1=NX+1                                                  MSH00570
      NEY1=NY+1                                                  MSH00580
      NXX=IEL*NX                                                 MSH00590
      NYY=IEL*NY                                                 MSH00600
      NXX1=NXX+1                                                 MSH00610
      NYY1=NYY+1                                                 MSH00620
      NEM=NX*NY                                                  MSH00630
      NNM=NXX1*NYY1-(IEL-1)*NX*NY                                MSH00640
      IF (NPE.EQ.8)NNM=NXX1*NYY1                                 MSH00650
      K0=0                                                       MSH00660
      IF (NPE.EQ.9)K0=1                                          MSH00670
C                                                                MSH00680
C     GENERATE THE ARRAY NOD(I, J)                               MSH00690
C                                                                MSH00700
      NOD(1, 1)=1                                                MSH00710
      NOD(1,2)=IEL+1                                             MSH00720
      NOD(1, 3)=NXX1+(IEL-1)*NEX1+IEL+1                          MSH00730
```

```
      IF (NPE.EQ.9)NOD(1, 3) = 4*NX+5                                MSH00740
      NOD(1, 4) = NOD(1, 3) - IEL                                     MSH00750
      IF(NPE.EQ.4)GO TO 200                                           MSH00760
      NOD(1, 5) = 2                                                   MSH00770
      NOD(1, 6) = NXX1 + (NPE-6)                                      MSH00780
      NOD(1, 7) = NOD(1, 3) - 1                                       MSH00790
      NOD(1, 8) = NXX1+1                                              MSH00800
      IF(NPE.EQ.9)NOD(1, 9) = NXX1+2                                  MSH00810
200   IF(NY.EQ.1)GOTO 230                                             MSH00820
      M=1                                                             MSH00830
      DO 220 N=2, NY                                                  MSH00840
      L=(N-1)*NX+1                                                    MSH00850
      DO 210 I=1, NPE                                                 MSH00860
210   NOD(L, I) = NOD(M, I) + NXX1 + (IEL-1)*NEX1 + K0*NX             MSH00870
220   M=L                                                             MSH00880
230   IF(NX.EQ.1)GO TO 270                                            MSH00890
      DO 260 NI=2, NX                                                 MSH00900
      DO 240 I=1, NPE                                                 MSH00910
      K1=IEL                                                          MSH00920
      IF(I.EQ.6.OR.I.EQ.8)K1=1+K0                                     MSH00930
240   NOD(NI, I) = NOD(NI-1, I) + K1                                  MSH00940
```

```
      M=NI                                                  MSH00950
      DO 260 NJ=2, NY                                       MSH00960
      L=(NJ-1)*NX+NI                                        MSH00970
      DO 250 J=1, NPE                                       MSH00980
  250 NOD(L, J)=NOD(M, J)+NXX1+(IEL-1)*NEX1+K0*NX           MSH00990
  260 M=L                                                   MSH01000
C                                                           MSH01010
C     GENERATE THE COORDINATES X(I) AND Y(I)                MSH01020
C                                                           MSH01030
  270 YC=0.0                                                MSH01040
      IF(NPE.EQ.9)GOTO 310                                  MSH01050
      DO 300 NI=1, NEY1                                     MSH01060
      I=(NXX1+(IEL-1)*NEX1)*(NI-1)+1                        MSH01070
      J=(NI-1)*IEL+1                                        MSH01080
      X(I)=0.0                                              MSH01090
      Y(I)=YC                                               MSH01100
      DO 280 NJ=1, NXX                                      MSH01110
      I=I+1                                                 MSH01120
      X(I)=X(I-1)+DX(NJ)                                    MSH01130
  280 Y(I)=YC                                               MSH01140
      IF(NI.GT.NY.OR.IEL.EQ.1)GO TO 300                     MSH01150
```

```
      J=J+1                                                        MSH01160
      YC=YC+DY(J-1)                                                MSH01170
      I=I+1                                                        MSH01180
      X(I)=0.0                                                     MSH01190
      Y(I)=YC                                                      MSH01200
      DO 290 II=1, NX                                              MSH01210
      K=2*II-1                                                     MSH01220
      I=I+1                                                        MSH01230
      X(I)=X(I-1)+DX(K)+DX(K+1)                                    MSH01240
  290 Y(I)=YC                                                      MSH01250
  300 YC=YC+DY(J)                                                  MSH01260
      RETURN                                                       MSH01270
C                                                                  MSH01280
  310 DO 330 NI=1, NYY1                                            MSH01290
      I=NXX1*(NI-1)                                                MSH01300
      XC=0.0                                                       MSH01310
      DO 320 NJ=1, NXX1                                            MSH01320
      I=I+1                                                        MSH01330
      X(I)=XC                                                      MSH01340
      Y(I)=YC                                                      MSH01350
  320 XC=XC+DX(NJ)                                                 MSH01360
```

```
330  YC=YC+DY(NI)                                              MSH01370
     RETURN                                                    MSH01380
     END                                                       MSH01390
```

附录III　计算机程序PLATE

```
C              C O M P U T E R   P R O G R A M   P L A T E                 PLT00010
C     (STATIC AND TRANSIENT ANALYSIS OF BENDING OF ORTHOTROPIC PLATES)PLT00020
C                                                                          PLT00030
C     ..................................................................PLT00040
C .                                                                      . PLT00050
C .         D E S C R I P T I O   O F   T H E   V A R I A B L E S       . PLT00060
C     .                                                                   .PLT00070
C     .A1, ..., A4, PARAMETERS IN THE TIME-APPROXIMATION SCHEME           .PLT00080
C     .AK..........SHEAR CORRECTION COEFFICIENT                            .PLT00090
C     .ALFA....... PARAMETER IN THE NEWMARK SCHEME                         .PLT00100
C     .BETA....... PARAMETER IN THE NEWMARK SCHEME                         .PLT00110
C     .C.......... COEFFICIENT OF THE TIME DERIVATIVE TERM                 .PLT00120
C     .D(I, J)..... MATRIX OF MATERIAL COEFFICIENTS                        .PLT00130
C     .D44, D55.....MATERIAL COEFFICIENTS (SHEAR)                          .PLT00140
```

```
C     •DT..............TIME INCREMENT IN THE TRANSIENT ANALYSIS                    •PLT00150
C     •E1, E2.........MODULI ALONG X AND Y DIRECTIONS OF THE PLATE                  •PLT00160
C     •ELP(I).........ELEMENT FORCE VECTOR                                          •PLT00170
C     •ELXY(I, J) J-TH COORDINATE OF ELEMENT NODE I (J=1, 2)                        •PLT00180
C     •GF(I)......... GLOBAL FORCE VECTOR; SOLUTION VECTOR FROM 'SOLVE'             •PLT00190
C     •GF0(I) ...... SOLUTION VECTOR AT CURRENT TIME                                •PLT00200
C     •GF1(I).........FIRST TIME DERIVATIVE OF THE SOLUTION                         •PLT00210
C     •GF2(I).........SECOND TIME DERIVATIVE OF THE SOLUTION                        •PLT00220
C     •GSTIF.........GLOBAL STIFNESS MATRIX (IN BANDED FORM)                        •PLT00230
C     •H.................THICKNESS OF THE PLATE                                     •PLT00240
C     •IBDY(I)......ARRAY OF SPECIFIED GLOBAL DISPLACEMENTS                         •PLT00250
C     •IBSF(I)......ARRAY OF SPECIFIED NONZERO GLOBAL FORCES                        •PLT00260
C     •                                                                             •PLT00270
C     •IEL..............INDICATOR FOR THE ELEMENT TYPE,                             •PLT00280
C     •                   IEL=1, 4-NODE ELEMENT                                     •PLT00290
C     •                   IEL=2, 8-OR 9-NDE ELEMENT                                 •PLT00300
C     •                                                                             •PLT00310
C     •ITEM...........INDICATOR FOR TRANSIENT ANALYSIS (1, YES; 0, NO)              •PLT00320
C     •NCMAX.........VALUE OF THE COLUMN-DIMENSION OF GSTIF                         •PLT00330
C     •NRMAX.........VALUE OF THE ROW-DIMENSION OF GSTIF                            •PLT00340
C     •NOZERO.........INDICATOR FOR ZERO(NOZERO=0) OR NONZERO(NOZERO=1)             •PLT00350
```

```
C    .              INITIAL CONDITIONS FOR TRANSIENT ANALYSIS                  .PLT00360
C    .NSTP..........TIME STEP AT WHICH THE LOAD IS REMOVED FROM THE            .PLT00370
C    .              PLATE (IN THE TRANSIENT ANALYSIS)                          .PLT00380
C    .NTIME.........NUMBER OF TIME STEPS IN THE TRANSIENT ANALYSIS             .PLT00390
C    .NOD(I, J)... CONNECTIVITY MATRIX                                         .PLT00400
C    .NBDY .........TOTAL NUMBER OF SPECIFIED DEGREES OF FREEDOM               .PLT00410
C    .NBSF .........TOTAL NUMBER OF SPECIFIED NONZERO FORCES                   .PLT00420
C    .P0 ...........INTENSITY OF THE DISTRIBUTED OR POINT LOAD                 .PLT00430
C    .STIF......... ELEMENT STIFFNESS MATRIX                                   .PLT00440
C    .T............ TIME VARIABLE IN THE TRANSIENT ANALYSIS                    .PLT00450
C    .VBDY.........VALUES OF THE DISPLACEMENTS IN THE ARRAY IBDY               .PLT00460
C    .VBSF......... VALUES OF THE SPECIFIED FORCES IN THE ARRAY IBSF           .PLT00470
C    .W0,W1*W2 ARRAYS CORRESPONDING TO GF0, GF1, GF2 IN AN ELEMENT             .PLT00480
C    .X, Y......... ARRAYS OF X AND Y-COORDINATES OF GLOBAL NODES              .PLT00490
C    .                                                                         .PLT00500
C    ..........................................................................PLT00510
C                                                                              PLT00520
      IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)                                                PLT00530
      DIMENSION GSTIF(243, 63), GF(243), GF0(243), GF1(243), GF2(243),         PLT00540
     1          VBDY(85), IBDY(85), VBSF(20), IBSF(25), TITLE(20)              PLT00550
      COMMON/STF/ELXY(9, 2), STIF(45, 45), ELP(45), W0(45), W1(45), W2(45),    PLT00560
```

```
     1              D(3, 3), A0, A1, A2, A3, A4, D44, D55, C1, C2                PLT00570
      COMMON/MSH/NOD(200, 9), X(225), Y(225), DX(15), DY(15)                     PLT00580
C                                                                                PLT00590
      DATA NDF, NRMAX, NCMAX/3,243, 63/                                          PLT00600
C                                                                                PLT00610
C     ........................................................................... PLT00620
C     *              P R E P R O C E S S O R   U N I T                          *PLT00630
C     ........................................................................... PLT00640
C                                                                                PLT00650
      READ 260, TITLE                                                            PLT00660
      READ 270, IEL, NPE, IMESH, NPRNT, ITEM, NTIME, NSTP, NOZERO                PLT00670
      IF(IMESH.EQ.1)GOTO 20                                                      PLT00680
      READ 270, NEM, NNM                                                         PLT00690
      DO 10 I=1, NEM                                                             PLT00700
   10 READ 270, (NOD(I, J), J=1, NPE)                                            PLT00710
      READ 280, (X(I), Y(I), I=1, NNM)                                           PLT00720
      GOTO 30                                                                    PLT00730
   20 READ 270, NX, NY                                                           PLT00740
      NX1=IEL*NX+1                                                               PLT00750
      NY1=IEL*NY+1                                                               PLT00760
      READ 280, (DX(I), I=1, NX1)                                                PLT00770
```

```
      READ 280, (DY(I), I=1, NY1)                                      PLT00780
      CALL MESH(IEL, NX, NY, NPE, NNM, NEM)                            PLT00790
   30 READ 290, E1, E2, G12, G13, G23, ANU12, RHO, H                   PLT00800
      READ 280, P0                                                     PLT00810
      READ 270, NBDY                                                   PLT00820
      READ 270, (IBDY(I), I=1, NBDY)                                   PLT00830
      READ 280, (VBDY(I), I=1, NBDY)                                   PLT00840
      READ 270, NBSF                                                   PLT00850
      IF(NBSF.EQ.0)GOTO 35                                             PLT00860
      READ 270, (IBSF(I), I=1, NBSF)                                   PLT00870
      READ 280, (VBSF(I), I=1, NBSF)                                   PLT00880
   35 IF(ITEM.EQ.0)GOTO 40                                             PLT00890
      READ 280, DT, ALFA                                               PLT00900
      IF(NOZERO.EQ.0)GOTO 36                                           PLT00910
      READ 280, (GF0(I), I=1, NEQ)                                     PLT00920
      READ 280, (GF1(I), I=1, NEQ)                                     PLT00930
   36 BETA=0.25*(0.5+ALFA)**2                                          PLT00940
      DT2=DT*DT                                                        PLT00950
      A0=1.0/BETA/DT2                                                  PLT00960
      A2=1.0/BETA/DT                                                   PLT00970
      A1=ALFA*A2                                                       PLT00980
```

```
      A3 = 0.5/BETA - 1.0                                          PLT00990
      A4 - ALFA/BETA - 1.0                                         PLT01000
      IF(NOZERO.EQ.1)GOTO 40                                       PLT01010
      DO 38 I = 1, NEQ                                             PLT01020
      GF0(I) = 0.0                                                 PLT01030
      GF1(I) = 0.0                                                 PLT01040
   38 GF2(I) = 0.0                                                 PLT01050
C                                                                  PLT01060
C     E N D   O F   D A T A I N P U T   T O   T H E   P R O G R A M PLT01070
C                                                                  PLT01080
C     ............................................................PLT01090
C     *                 P R O C E S S O R   U N I T               *PLT01100
C     ............................................................PLT01110
C                                                                  PLT01120
   40 NEQ = NNM*NDF                                                PLT01130
      NN = NPE*NDF                                                 PLT01140
      AK = 5.0/6.0                                                 PLT01150
      ANU21 = ANU12*E2/E1                                          PLT01160
      DENOM = (1.0 - ANU12*ANU21)                                  PLT01170
      TOP = (H**3)/12.0                                            PLT01180
      C1 = RHO*H                                                   PLT01190
```

```
      C2 = RHO*TOP                                                   PLT01200
      D(1, 1) = E1*TOP/DENOM                                         PLT01210
      D(1, 2) = ANU12*E2*TOP/DENOM                                   PLT01220
      D(1, 3) = 0.0                                                  PLT01230
      D(2, 2) = D(1, 1)*E2/E1                                        PLT01240
      D(2, 3) = 0.0                                                  PLT01250
      D(3, 3) = G12*TOP                                              PLT01260
      D44 = G13*H*AK                                                 PLT01270
      D55 = G23*H*AK                                                 PLT01280
      DO 50 I = 1, 3                                                 PLT01290
      DO 50 J = 1, 3                                                 PLT01300
   50 D(J, I) = D(I, J)                                              PLT01310
C                                                                    PLT01320
C     PRINT THE DATA INPUT AND THE MESH INFORMATION                  PLT01330
C                                                                    PLT01340
      PRINT 260, TITLE                                               PLT01350
      PRINT  310, LEL, NPE                                           PLT01360
      PRINT  320, NEM, NNM, NDF                                      PLT01370
      PRINT  330, E1, E2, G12, G13, G23, ANU12, AK, RHO, H, P0       PLT01380
      PRINT  340, NBDY                                               PLT01390
      PRINT  270, (IBDY (I) , I = 1, NBDY)                           PLT01400
```

```
      PRINT  300, (VBDY (I), I=1, NBDY)                                PLT01410
      PRINT  350, NBSF                                                 PLT01420
      PRINT  270, (IBSF (I), I=1, NBSF)                                PLT01430
      PRINT  300, (VBSF (I), I=1, NBSF)                                PLT01440
      PRINT  360                                                       PLT01450
      DO 60 I=1, NEM                                                   PLT01460
   60 PRINT 270, I, (NOD (I, J), J=1, NPE)                             PLT01470
      PRINT 370                                                        PLT01480
      PRINT 300, (X(I), Y(I), I=1, NNM)                                PLT01490
C                                                                      PLT01500
C     COMPUTE THE HALF BAND WIDTH                                      PLT01510
C                                                                      PLT01520
      NHBW=0                                                           PLT01530
      DO  70  N=1, NEM                                                 PLT01540
      DO  70  I=1, NPE                                                 PLT01550
      DO  70  J=1, NPE                                                 PLT01560
      NW=(IABS(NOD(N, I) -NOD(N, J))+1)*NDF                            PLT01570
   70 IF (NHBW. LT. NW) NHBW=NW                                        PLT01580
      PRINT 400, NHBW                                                  PLT01590
C                                                                      PLT01600
C     DO-LOOP ON NUMBER OF TIME STEPS BEGINS HERE                      PLT01610
```

```
C                                                                  PLT01620
      T = 0.0                                                      PLT01630
      IF(ITEM. EQ. 1) PRINT 460, DT, ALFA, BETA, A0, A1, A2, A3, A4 PLT01640
      DO 220 NT = 1, NTIME                                         PLT01650
      IF(ITEM. EQ. 1. AND. NT. GE. NSTP)P0 = 0.0                   PLT01660
C                                                                  PLT01670
C     INITIALIZE THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX AND FORCE VECTOR      PLT01680
C                                                                  PLT01690
      DO 80 I = 1, NEQ                                             PLT01700
      GF (I) = 0.0                                                 PLT01710
      DO 80 J = 1, NHBW                                            PLT01720
   80 GSTIF (I, J) = 0.0                                           PLT01730
      DO 130 N = 1, NEM                                            PLT01740
      L = 0                                                        PLT01750
      DO 90 I = 1, NPE                                             PLT01760
      NI = NOD(N, I)                                               PLT01770
      ELXY (I, 1) = X (NI)                                         PLT01780
      ELXY (I, 2) = Y (NI)                                         PLT01790
      LI = (NI  1)*NDF                                             PLT01800
      DO 90 J = 1, NDF                                             PLT01810
      LI = LI + 1                                                  PLT01820
```

```
      L = L + 1                                                      PLT01830
      W0(L) = GF0 (LI)                                               PLT01840
      W1(L) = GF1(LI)                                                PLT01850
   90 W2(L) = GF2(LI)                                                PLT01860
      CALL STIFF(IEL, NPE, NN, P0, ITEM, NT, NOZERO)                 PLT01870
      IF (NPRNT. EQ. 0) GO TO 110                                    PLT01880
      IF (N. GT. 1) GO TO 110                                        PLT01890
      PRINT 380                                                      PLT01900
      DO 100 I = 1, NN                                               PLT01910
  100 PRINT 300, (STIF(I, J), J = 1, NN)                             PLT01920
      PRINT 410                                                      PLT01930
      PRINT 300, (ELP(I), I = 1, NN)                                 PLT01940
      PRINT 410                                                      PLT01950
  110 CONTINUE                                                       PLT01960
C                                                                    PLT01970
C     ASSEMBLE ELEMENT STIFFNESS MATRICES TO GET GLOBAL STIFFNESS MATRIXPLT01980
C                                                                    PLT01990
      DO 130 I = 1, NPE                                              PLT02000
      NR = (NOD(N, I) - 1)*NDF                                       PLT02010
      DO 130 II = 1, NDF                                             PLT02020
      NR = NR + 1                                                    PLT02030
```

```
      L=  (I-1)*NDF+II                                                  PLT02040
      GF(NR)=GF(NR)+ELP(L)                                              PLT02050
      DO 130 J=1,NPE                                                    PLT02060
      NCL=  (NOD(N,J)-1)*NDF                                            PLT02070
      DO 130 JJ=1,NDF                                                   PLT02080
      M=(J-1)*NDF+JJ                                                    PLT02090
      NC=NCL+JJ-NR+1                                                    PLT02100
      IF (NC) 130,130,120                                               PLT02110
  120 GSTIF(NR,NC)  =GSTIF(NR,NC)+STIF(L,M)                             PLT02120
  130 CONTINUE                                                          PLT02130
C                                                                       PLT02140
C     THE GLOBAL SYSTEM EQUATIONS ARE NOW READY FOR IMPLEMENTING THEPLT02150
C               THE FORCE AND DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS          PLT02160
C                                                                       PLT02170
      IF (NBSF.EQ.0) GOTO 145                                           PLT02180
      IF(NOZERO.EQ.1.AND.ITEM.EQ.1)GOTO 145                             PLT02190
      DO 140 I=1,NBSF                                                   PLT02200
      NB=IBSF (I)                                                       PLT02210
  140 GF (NB)=GF(NB)+VBSF (I)                                           PLT02220
  145 CALL BNDY (NRMAX,NCMAX,NEQ,NHBW,GSTIF,GF,NBDY,IBDY,VBDY)          PLT02230
C                                                                       PLT02240
```

```
C     CALL SUBROUTINE 'SOLVE' TO SOLVE THE SYSTEM OF EQUATIONS        PLT02250
C             THE SOLUTION IS RETURNED IN GF                          PLT02260
C                                                                     PLT02270
      CALL SOLVE (NRMAX, NCMAX, NEQ, NHBW, GSTIF, GF, O)              PLT02280
      IF (ITEM. EQ. 0) GOTO 180                                       PLT02290
      IF (NOZERO. EQ. 0) GOTO 160                                     PLT02300
      IF (NT. GT. 1) GOTO 160                                         PLT02310
C                                                                     PLT02320
C CALCULATE THE SECOND TIME DERIVATIVE WHEN INITIAL CONDITIONS        PLT02330
C                           ARE NON ZERO                              PLT02340
C                                                                     PLT02350
      DO 150 I=1, NEQ                                                 PLT02360
  150 GF2 (I) =GF (I)                                                 PLT02370
      GOTO 220                                                        PLT02380
C                                                                     PLT02390
C     CALCULATE NEW VELOCITIES AND ACCELERATIONS                      PLT02400
C                                                                     PLT02410
  160 T=T+DT                                                          PLT02420
      DO 170 I=1, NEQ                                                 PLT02430
      GF0 (I) =A0*(GF(I)-GF0(I))-A2*GF1 (I)-A3*GF2(I)                 PLT02440
      GF1 (I)=GF1 (I)+DT*(1.0-ALFA)*GF2 (I)+DT*ALFA*GF0 (I)           PLT02450
```

```
      GF2 (I) = GF0 (I)                                              PLT02460
  170 GF0 (I) = GF (I)                                               PLT02470
      PRINT 470, T                                                   PLT02480
  180 PRINT 420                                                      PLT02490
      PRINT 300, (GF(I), I=1, NEQ, NDF)                              PLT02500
      PRINT 430                                                      PLT02510
      PRINT 300, (GF(I), I=2, NEQ, NDF)                              PLT02520
      PRINT 440                                                      PLT02530
      PRINT 300, (GF(I), I=3, NEQ, NDF)                              PLT02540
C                                                                    PLT02550
C     ............................................................   PLT02560
C     .            P O S T P R O C E S S O R    U N I T          .   PLT02570
C     ............................................................   PLT02580
C                                                                    PLT02590
C     COMPUTE BENDING STRESSES (AT THE GAUSS POINTS)                 PLT02600
C                                                                    PLT02610
      PRINT 450                                                      PLT02620
      DO 200 N=1, NEM                                                PLT02630
      L=0                                                            PLT02640
      DO 190 I=1, NPE                                                PLT02650
      NI=NOD (N, I)                                                  PLT02660
```

```
      ELXY (I, 1)  = X(NI)                                          PLT02670
      ELXY (1, 2) = Y(NI)                                           PLT02680
      LI = (NI-1)*NDF                                               PLT02690
      DO 190 J=1, NDF                                               PLT02700
      LI = LI +1                                                    PLT02710
      L = L + 1                                                     PLT02720
  190 W0(L) = GF(LI)                                                PLT02730
  200 CALL STRESS (NPE, NDF, IEL, ELXY, W0, D, D44, D55, H)         PLT02740
      IF (ITEM. EQ. 0) GOTO 230                                     PLT02750
  220 PRINT 390                                                     PLT02760
  230 STOP                                                          PLT02770
C                                                                   PLT02780
C                 F  O  R  M  A  T  S                               PLT02790
C                                                                   PLT02800
  260 FORMAT (20A4)                                                 PLT02810
  270 FORMAT (16I5)                                                 PLT02820
  280 FORMAT (8F10.4)                                               PLT02830
  290 FORMAT (8E10.3)                                               PLT02840
  300 FORMAT (8 (2X, E12.5))                                        PLT02850
  310 FORMAT (/, 5X, 'ELEMENT TYPE(1=LINEAR, 2=QUADRATIC) =', I2, 5X, 'NODES PLT02860
     1PER ELEMENT =', I2)                                           PLT02870
```

```
320  FORMAT (10X, 'ACTUAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE MESH =', I3, /, 10X, 'NU PLT02880
   1 MBER OF NODES IN THE MESH =', I3, /, 10X, 'DEGREES OF FREEDOM =', I2, /)  PLT02890
330  FORMAT (5X, 'M A T E R I A L P R O P E R T I E S:', /, 10X, 'MODULUS,     PLT02900
   1 E1 =', E12.5, /, 10X, 'MODULUS, E2 =', E12.5, /, 10X, 'SHEAR MODULI, G12, G13  PLT02910
   2 AND G23 =', 3E12.5, /, 10X, 'POISSONS RATIO, NU12 =', E12.5, /, 10X, 'SHEAR  PLT02920
   3 CORRECTION COEFFICIENT, K =', E12.5, /, 10X, 'MATERIAL DENSITY, RHO =',  PLT02930
   4 E12.5, /, 10X, 'PLATE THICKNESS, H =', E12.5, /, 10X, 'LOAD MAGNITUDE, P ='  PLT02940
   5, E12.5, /)                                                            PLT02950
340  FORMAT (/, 5X, 'NUMBER OF SPECIFIED DISPLACEMENTS =', I5, /, 5X, 'SPECIFI PLT02960
   1 ED DISPLACEMENTS AND THEIR VALUES FOLLOW:')                          PLT02970
350  FORMAT (/, 5X, 'NUMBER OF SPECIFIED FORCES =', I4, /, 5X, 'SPECIFIED FORC PLT02980
   1 E DEGREES OF FREEDOM FOLLOW AND THEIR SPECIFIED VALUES FOLLOW:')  PLT02990
360  FORMAT (/, 5X, 'BOOLEAN (CONNECTIVITY)MATRIX-NOD(I, J)', /)          PLT03000
370  FORMAT (/, 5X, 'COORDINATES OF THE GLOBAL NODES:', /)                 PLT03010
380  FORMAT (/, 5X, 'ELEMENT STIFFNESS AND FORCE MATRICES:', /)            PLT03020
390  FORMAT (120('.'), //)                                                 PLT03030
400  FORMAT (/, 5X, 'HALF BAND WIDTH OF GLOBAL STIFFNESS MATRIX =', I5, /) PLT03040
410  FORMAT (//)                                                           PLT03050
420  FORMAT (/, 5X, 'TRANSVERSE DEFLECTION:', /)                           PLT03060
430  FORMAT (/, 5X, 'BENDING SLOPE, SI-X:', /)                             PLT03070
440  FORMAT (/, 5X, 'BENDING SLOPE, SI-Y:', /)                             PLT03080
```

```
450  FORMAT (8X, 'X-COORD', 5X, 'Y-COORD', 5X, 'SIGMAX', 5X, 'SIGMAY',  5X,      PLT03090
   1 'SIGMAXY', 5X, 'SIGMAXZ', 5X, 'SIGMAYZ')                                  PLT03100
460  FORMAT (/, 5X, 'DT=', E10.4, 5X, 'ALFA=', E10.4, 5X, 'BETA=', E10.4, /, 10X,  PLT03110
   1 'TEMPORAL PARAMETERS A0, A1, ETC.:', 5E12.4, /)                            PLT03120
470  FORMAT (/, 5X, 'TIME=', E10.3, /)                                          PLT03130
     END                                                                        PLT03140
     SUBROUTINE STIFF (IEL, NPE, NN, P0, ITEM, NT, NOZERO)                      STF00010
C                                                                               STF00020
C    .......................................................................    STF00030
C    THE PROGRAM IS WRITTEN FOR ORTHOTROPIC PLATES. THE ELEMENT IS              STF00040
C    BASED ON A SHEAR-DEFORMABLE THEORY. HERE THE FOUR-, EIGHT-OR               STF00050
C    NINE-NODE ISOPARAMETRIC ELEMENT WITH THREE DEGREES OF FREEDOM              STF00060
C    (W, SX, SY) PER NODE CAN BE USED BY SPECIFYING THE ELEMENT TYPE.           STF00070
C    .......................................................................    STF00080
C                                                                               STF00090
     IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)                                                 STF00100
     COMMON/STF/ELXY (9, 2), STIF(45, 45), ELP (45), W0 (45), W1(45), W2(45),   STF00110
   1                  D(3, 3), A0, A1, A2, A3, A4, D44, D55, C1, C2              STF00120
     COMMON/SHP/SF (9), GDSF(2, 9)                                              STF00130
     DIMENSION GAUSS (4, 4), WT(4, 4), H(45, 45)                                STF00140
C                                                                               STF00150
```

```
      DATA GAUSS/4*0.0D0, -.57735027D0, .57735027D0, 2*0.0D0, -.77459667D0, 0   STF00160
     1.0D0, .77459667D0, 0.0D0, -.86113631D0, -.33998104D0, .33998104D0, .8611   STF00170
     23631D0/                                                                    STF00180
C                                                                                STF00190
      DATA WT/2.0D0, 3*0.0D0, 2*1.0D0, 2*0.0D0, .55555555D0, .88888888D0, .555   STF00200
     155555D0, 0.0D0, .34785485D0, 2*.65214515D0, .34785485D0/                   STF00210
C                                                                                STF00220
      NGP-IEL+1                                                                  STF00230
      LGP=IEL                                                                    STF00240
      NDF=NN/NPE                                                                 STF00250
C                                                                                STF00260
C     INITIALIZE THE ELEMENT MATRICES AND FORCE VECTOR                           STF00270
C                                                                                STF00280
      DO 10  I=1, NN                                                             STF00290
      ELP (I) = 0.0                                                              STF00300
      DO 10 J=1, NN                                                              STF00310
      H (I, J) = 0.0                                                             STF00320
   10 STIF (I, J) = 0.0                                                          STF00330
C                                                                                STF00340
C     GAUSS QUADRATURE (FULL INTEGRATION) ON BENDING TERMS BEGINS HERESTF00350
C                                                                                STF00360
```

```
      DO 80 NI=1, NGP                                                  STF00370
      DO 80 NJ=1, NGP                                                  STF00380
      XI=GAUSS (NI, NGP)                                               STF00390
      ETA=GAUSS (NJ, NGP)                                              STF00400
      CALL SHAPE (NPE, XI, ETA, ELXY, DET)                             STF00410
      CNST=DET*WT (NI, NGP)*WT(NJ, NGP)                                STF00420
      DO 30 I=1, NPE                                                   STF00430
      L=(I-1)*NDF+1                                                    STF00440
      ELP(L)=ELP(L)+CNST*SF(I)*P0                                      STF00450
   30 CONTINUE                                                         STF00460
C                                                                      STF00470
C     DEFINE STIFFNESS MATRIX 'STIF' AND MASS MATRIX 'H' COEFFICIENTS  STF00480
C                                                                      STF00490
      II=1                                                             STF00500
      DO 70 I=1, NPE                                                   STF00510
      JJ=1                                                             STF00520
      DO 60 J=1, NPE                                                   STF00530
      STIF (II+1, JJ+1)=STIF(II+1, JJ+1)+(D(1, 1)*GDSF(1, I)*GDSF(1, J) STF00540
     1                    +D(3, 3)*GDSF(2, I)*GDSF(2, J))*CNST         STF00550
      STIF(II+1, JJ+2)=STIF(II+1, JJ+2)+(D(1, 2)*GDSF(1, I)*GDSF(2, J)  STF00560
     1                    +D(3, 3)*GDSF(2, I)*GDSF(1, J))*CNST         STF00570
```

```
      STIF(II+2, JJ+1)=STIF(II+2, JJ+1)+(D(1, 2)*GDSF(2, I)*GDSF(1, J)     STF00580
     1                         +D(3, 3)*GDSF(1, I)*GDSF(2, J))*CNST        STF00590
      STIF(II+2, JJ+2)=STIF(II+2, JJ+2)+(D(3, 3)*GDSF(1, I)*GDSF(1, J)     STF00600
     1                         +D(2, 2)*GDSF(2, I)*GDSF(2, J))*CNST        STF00610
      IF(ITEM. EQ. 0)GOTO 60                                                STF00620
      H(II, JJ)=H(II, JJ)         +C1*SF(I)*SF(J)*CNST                      STF00630
      H(II+1, JJ+1)=H(II+1, JJ+1) +C2*SF(I)*SF(J)*CNST                      STF00640
      H(II+2, JJ+2)=H(II+2, JJ+2) +C2*SF(I)*SF(J)*CNST                      STF00650
   60 JJ=NDF*J+1                                                            STF00660
   70 II=NDF*I+1                                                            STF00670
   80 CONTINUE                                                              STF00680
C                                                                           STF00690
C     GAUSS QUADRATURE(REDUCED INTEGRATION) ON SHEAR TERMS BEGINS           STF00700
C       HERE                                                                STF00710
C
      DO 110 NI=1, LGP                                                      STF00720
      DO 110 NJ=1, LGP                                                      STF00730
      XI=GAUSS (NI, LGP)                                                    STF00740
      ETA=GAUSS(NJ, LGP)                                                    STF00750
      CALL SHAPE (NPE, XI, ETA, ELXY, DET)                                  STF00760
      CNST=DET*WT(NI, LGP)*WT(NJ, LGP)                                      STF00770
      II=1                                                                  STF00780
```

```
      DO 100 I=1, NPE                                            STF00790
      JJ=1                                                       STF00800
      DO 90 J=1, NPE                                             STF00810
      STIF (II, JJ) =STIF (II, JJ)+(D44*GDSF(1, I)*GDSF(1, J)+   STF00820
     1                 D55*GDSF (2, I)*GDSF(2, J))*CNST          STF00830
      STIF (II, JJ+1)=STIF(II, JJ+1)+D44*GDSF(1, I)*SF(J)*CNST   STF00840
      STIF(II+1, JJ)=STIF(II+1, JJ)+D44*SF(I)*GDSF(1, J)*CNST    STF00850
      STIF(II, JJ+2)=STIF(II, JJ+2)+D55*GDSF(2, I)*SF(J)*CNST    STF00860
      STIF (II+2, JJ)=STIF (II+2, JJ)+D55*SF(I)*GDSF(2, J)*CNST  STF00870
      STIF (II+1, JJ+1)=STIF (II+1, JJ+1)+D44*SF(I)*SF(J)*CNST   STF00880
      STIF (II+2, JJ+2)=STIF (II+2, JJ+2)+D55*SF(I), SF(J)*CNST  STF00890
   90 JJ=NDF*J+1                                                 STF00900
  100 II=NDF*I+1                                                 STF00910
  110 CONTINUE                                                   STF00920
      IF(ITEM. EQ. 0)RETURN                                      STF00930
C                                                                STF00940
C     ELEMENT CALCULATIONS FOR TRANSIENT ANALYSIS BEGIN HERE     STF00950
C                                                                STF00960
      IF(NOZERO. EQ. 0 . OR. NT . GT. 1)GOTO 130                 STF00970
      DO 120 I=1, NN                                             STF00980
      ELP (I)=0.0                                                STF00990
```

```
      DO 120 J=1, NN                                                     STF01000
      ELP (I)=ELP (I)-STIF (I, J)*W0(J)                                  STF01010
  120 STIF (I, J)=H(I, J)                                                STF01020
      RETURN                                                             STF01030
  130 DO 140 I=1, NN                                                     STF01040
      DO 140 J=1, NN                                                     STF01050
      ELP (I)=ELP(I)+H(I, J)*(A0*W0(J)+A2*W1(J)+A3*W2(J))                STF01060
  140 STIF(I, J)=STIF (I, J)+A0*H(I, J)                                  STF01070
      RETURN                                                             STF01080
      END                                                                STF01090
      SUBROUTINE STRESS (NPE, NDF, IEL, ELXY, W, D, D44, D55, H)         STR00010
C                                                                        STR00020
C     ................................................................   STR00030
C     THE PROGRAM EVALUATES THE BENDING STRESSES AT THE GAUSS POINTS     STR00040
C     USING THE REDUCED INTEGRATION. THE STRESSES ARE AT THE TOP (OR     STR00050
C     NEGATIVE OF THOSE AT THE BOTTOM) OF THE PLATE.                     STR00060
C     ................................................................   STR00070
C                                                                        STR00080
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)                                         STR00090
      COMMON/SHP/SF (9), GDSF (2, 9)                                     STR00100
      DIMENSION GAUSS (4, 4), ELXY(9, 2), W(45), D(3, 3)                 STR00110
```

```
      DATA GAUSS/4*0.0D0, -.57735027D0, .57735027D0, 2*0.0D0, -.77459667D0,       STR00120
     1 .0D0, .77459667D0, 0.0D0, -86113631D0, -.33998104D0, .33998104D0, .8611    STR00130
     2 3631D0/                                                                    STR00140
C                                                                                 STR00150
      NGP=IEL                                                                     STR00160
      DO 40 NI=1, NGP                                                             STR00170
      DO 40 NJ=1, NGP                                                             STR00180
      XI=GAUSS (NI, NGP)                                                          STR00190
      ETA=GAUSS (NJ, NGP)                                                         STR00200
      CALL SHAPE (NPE, XI, ETA, ELXY, DET)                                        STR00210
      SIX=0.0                                                                     STR00220
      SIY=0.0                                                                     STR00230
      DWX=0.0                                                                     STR00240
      DWY=0.0                                                                     STR00250
      DSXY=0.0                                                                    STR00260
      DSYX=0.0                                                                    STR00270
      DSXX=0.0                                                                    STR00280
      DSYY=0.0                                                                    STR00290
      X=0.0                                                                       STR00300
      Y=0.0                                                                       STR00310
       DO 20 I=1, NPE                                                             STR00320
```

```
      L=(I-1)*NDF+1                                                STR00330
      X=X+SF(I)*ELXY (I, 1)                                        STR00340
      Y=Y+SF (I)*ELXY (I, 2)                                       STR00350
10    DWX=DWX+GDSF (1, I)*W(L)                                     STR00360
      DWY=DWY+GDSF (2, I)*W(L)                                     STR00370
      SIX=SIX+SF (I)*W (L+1)                                       STR00380
      SIY=SIY+SF (I)*W (L+2)                                       STR00390
      DSXX=DSXX+GDSF (1, I)*W(L+1)                                 STR00400
      DSXY=DSXY+GDSF (2, I)*W(L+1)                                 STR00410
      DSYX=DSYX+GDSF (1, I)*W(L+2)                                 STR00420
20    DSYY=DSYY+GDSF (2, I)*W(L+2)                                 STR00430
      SGMAX=(D(1, 1)*DSXX+D(1, 2)*DSYY)*6.0/(H**2)                 STR00440
      SGMAY=(D(1, 2)*DSXX+D(2, 2)*DSYY)*6.0/(H**2)                 STR00450
      SGMXY=D (3, 3)*(DSXY+DSYX)*6.0/(H**2)                        STR00460
      SGMXZ=D44*(DWX+SIX)/H                                        STR00470
      SGMYZ=D55*(DWY+SIY)/H                                        STR00480
      PRINT 50, X, Y, SGMAX, SGMAY, SCMXY, SGMXZ, SGMYZ            STR00490
40    CONTINUE                                                     STR00500
      RETURN                                                       STR00510
50    FORMAT (5X, 10E12.4)                                         STR00520
      END                                                          STR00530
```

```
:子程序 'BNDY' 和 'SOLVE' 与程序FEM1D中的 'BNDY' 和 'SOLVE'相同      :
:子程序 'MESH' 和 'SHAPE' 与程序FEM2D中的 'MESH'和 'SHAPE' 相同      :
```

习 题 选 答

第 二 章

题2.1和2.3的弱式为$B(v, u)=l(v)$，其中，v是试函数，u是因变量，不管B是否对称，函数均由式（2.33）给出。

2.1 $$B(v,u)=\int_0^1 a\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}dx+hv(1)u(1)\qquad\text{（对称）}$$

$$l(v)=-\int_0^1 vf dx+v(1)(q+hu_\infty)$$

2.3 $$B(v,u)=\int_0^1 u\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}dx\qquad\text{（不对称）}$$

$$l(v)=-\int_0^1 vf dx$$

2.5 $$0=\int_0^L\left\{a\frac{d\xi}{dx}\left[\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]+\xi P\right\}dx$$

$$0=\int_0^L\left\{b\frac{d^2\xi}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}+a\frac{d\zeta}{dx}\frac{dv}{dx}\left[\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]+\zeta f\right\}dx$$
$$-\frac{d\zeta}{dx}(L)M_0$$

$$I(u,v)=\int_0^L\left\{\frac{1}{2}\left[a\left(\frac{du}{dx}\right)^2+b\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2+a\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{a}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^4\right]\right.$$
$$\left.+uP+vf\right\}dx-\frac{dv}{dx}(L)M_0$$

2.7 $$0=\int_\Omega\left[\xi\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\xi}{\partial x}P+\nu\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$
$$-\int_{\Gamma_2}\xi\hat{t}_x ds$$

$$0=\int_\Omega\left[\zeta\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial y}P+\nu\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dxdy$$
$$-\int_{\Gamma_2}\zeta\hat{t}_y ds$$

$$0=\int_\Omega\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

式中，ξ、ζ和λ是试函数，$\hat{t}_n$和$\hat{t}_s$是次变量的给定值。

2.9 $$0=\int_0^1\left(a\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+bv\frac{\partial u}{\partial t}-vf\right)dx-v(1)T_0$$

条件为：$u(0,t)=0$和$u(x,0)=u_0$

2.11 $$0=\int_\Omega\left(K\nabla v\cdot\nabla u+\rho v\frac{\partial u}{\partial t}-vf\right)dxdy-\int_{\Gamma_2}v\hat{t}\,ds$$

条件为：Γ_1上对于任意t有$u=0$，Ω中$t=0$时，对任一$(x、y)$有$u=u_0$。

2.12 $$b_{ij}=\frac{ij}{i+j-1}-\frac{ij+i+j}{i+j}+\frac{1-ij}{i+j-1}+\frac{(i+1)(j+1)}{i+j+2}$$

$$f_i=\frac{1}{(1+i)(2+i)}\qquad c_1=\frac{55}{131}\qquad c_2=-\frac{20}{131}$$

2.13 $$\phi_0=\sin\frac{\pi x}{2}\qquad \phi_1=\sin\pi x\qquad \phi_2=\sin 2\pi x$$

2.15 (a) $$w=\sum_{i=1}^{N}c_i x^i(L-x)$$

$$b_{ij}=EIijL^{i+j-1}\left[\frac{(i-1)(j-1)}{i+j-3}-\frac{2(ij-1)}{i+j-2}+\frac{(i+1)(j+1)}{i+j-1}\right]$$

为计算f_i，用数学用表计算积分。

$$\int x^m\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}x^m\cos ax+\frac{m}{a}\int x^{m-1}\cos ax\,dx$$

(b) $$w=\sum_{i=1}^{N}c_i\sin\frac{i\pi x}{L}$$

$$b_{ii}=EI(i)^4\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\frac{L}{2}\qquad b_{ij}=0\quad 对于\quad i\neq j$$

$$f_1=-\frac{L}{2}f_0\qquad f_i=0\qquad i\neq 1$$

$$c_1=-\frac{f_0L^4}{EI\pi^4}\qquad c_i=0\quad 若\quad i\neq 1$$

Ritz解与精确解一致：

$$w_0=-\frac{f_0L^4}{EI\pi^4}\sin\frac{\pi x}{L}$$

2.17 对特征值问题，设$u(0)=u(1)=0$。

$$u=\sum_{i=1}^{N}c_i\phi_i\qquad \phi_i=x^i(1-x)$$

$$N=2:\ \frac{1}{[illegible]}\begin{bmatrix}36 & 17\\ 17 & 14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\frac{\lambda}{420}\begin{bmatrix}14 & 7\\ 7 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}$$

$\lambda_1=14.42 \qquad e_1=(1.000,-0.4474)$

$\lambda_2=63.58 \qquad e_2=(-0.4794,1.000)$

2.19 $u=c_1x^2 \qquad v=x+d_1(1-2x+x^2)$

$$\int_0^1\left(-\frac{d^2v}{dx^2}+g\right)(1-2x+x^2)dx=0 \quad d_1=-\frac{g}{2}$$

$$\int_0^1\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{v}{a}-f\right)x^2dx=0 \quad c_1=\frac{3}{8a}-\frac{g}{40a}+\frac{f}{2}$$

精确解为

$$u_0=\left(\frac{f}{2}+\frac{g}{4a}\right)x^2-\left(\frac{1+g}{a}\right)x^3+\frac{gx^4}{24a}$$

$$v_0=-\frac{g}{2}+(1+g)x-\frac{g}{2}x^2$$

2.20 (a) $\phi_0=1-x \quad \phi_1=x(1-x)$

$c_1{}^2+c_1-2=0$ 得 $(c_1)_1=1$和$(c_1)_2=-2$。

根据$\int_0^1 Edx$是最小值的基准，选取$c_1=1$。

2.21 $u_1=c_{11}\sin\pi x\sin\pi y \quad c_{11}=\frac{8}{\pi^4}$

2.23 $$w_N=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{a}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{D\pi^4}{a^4}(i^2+j^2)^2-N_{cr}\pi^2\left(\frac{j}{a}\right)^2\right]c_{ij}=0$$

$$N_{cr}=\frac{4\pi^2D}{a^2}$$

2.25 $u_3=c_1(x-x^2)+c_2(x^2-x^3)+c_3(x^3-x^4)$

用计算器计算特征值问题，得到

$\lambda_1=9.968 \qquad \lambda_2=32.00 \qquad \lambda_3=51.37$

精确解是 $\lambda_n=(n\pi)^2$

2.26 (a) 见Reddy和Rasmussen的课本（1982年版），第406～412页。

2.27 (a,b) $\phi_0=0$，$\phi_1=2(1+x)-x^2$，所以满足边界条件。

$$c_1=\frac{35}{108}e^{-(20/101)t}\ [2(1+x)-x^2]$$

2.29 $\phi_0=0 \qquad \phi_1=x(1-x) \qquad \phi_2=x^2(1-x)$

这个方案得出与习题2.28同样的结果。

$c_1 = \cos 10.95145t \qquad c_2 = 0$

$u(x,t) = (x - x^2)\cos 10.95445t$

第 三 章

3.1 $\psi_1(\bar{x}) = 1 - \dfrac{\bar{x}}{he} \qquad \psi_2(\bar{x}) = \dfrac{\bar{x}}{he}$ （原点在节点1上）

3.2 $\psi_1(\bar{x}) = 1 - 3\dfrac{\bar{x}}{he} + 2\left(\dfrac{\bar{x}}{he}\right)^2 \qquad \psi_2(\bar{x}) = 4\dfrac{\bar{x}}{he}\left(1 - \dfrac{\bar{x}}{he}\right)$

$\psi_3(\bar{x}) = -\dfrac{\bar{x}}{he}\left(1 - 2\dfrac{\bar{x}}{he}\right)$ （原点在节点1上，节点2居中）

3.3 $K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B}\left(a\dfrac{d\psi_i}{dx}\dfrac{d\psi_j}{dx} + b\psi_i\dfrac{d\psi_j}{dx} + c\psi_i\psi_j\right)dx$

$F_i^e = \int_{x_A}^{x_B} f\psi_i dx + p_i$

式中，x_A和x_B为单元的端点。

3.4 对$L = 1$，$a = 1$，$f = \lambda$和$p = 0$，下列单元的系数矩阵，列向量和结果如下：

正方形单元(2)：

$$[K^{(1)}] = [K^{(2)}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix} \qquad \{f^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{24} \end{Bmatrix}$$

$U_1 = 0.0$，$U_2 = 0.1224$，$U_3 = 0.22917$，$U_4 = 0.30469$，$U_5 = 0.3333$。

线性单元(4)：　　$e = 1, 2, 3, 4$

$$[K^{(e)}] = 4\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad \{F^{(1)}\} = \frac{1}{96}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$U_1 = 0.0$，$U_2 = 0.1224$，$U_3 = 0.22917$，$U_4 = 0.30469$，$U_5 = 0.3333$。

3.5 $[K^{(1)}] = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 52 & -55 \\ -55 & 52 \end{bmatrix}$

(a) $U_1 = 0.0, U_2 = -0.029992, U_3 = -0.04257, U_4 = 0.0$;

$-P_1^{(1)} = 0.08998$。

(b) $U_1 = 0.0, U_2 = 0.4134, U_3 = 0.79584, U_4 = 1.142$;　$-P_1^{(1)} = -1.240$。

(c) $U_1 = 0.3451, U_2 = 0.0, U_3 = 0.4382, U_4 = 0.8791$;　$-P_1^{(1)} = 1.035$。

3.6 $u_1^{(1)} = U_1 = 0$，$u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_1^{(3)} = U_2, u_2^{(2)} = U_3 = 0$，

$u_2^{(3)} = U_4 = 0$。

$$P_2{}^{(1)}+P_1{}^{(2)}+P_1{}^{(3)}=100 \quad \text{千磅}$$

$$[K^{(e)}]=\frac{AeEe}{he}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

式中，Ae＝横截面面积，he＝长度，Ee＝弹性模量。

集合矩阵：

$$[K]=\begin{bmatrix}K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0\\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(2)} & K_{12}^{(3)}\\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & 0\\ 0 & K_{21}^{(3)} & 0 & K_{22}^{(3)}\end{bmatrix}$$

结果：

$$(K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)}+K_{11}^{(3)})U_2=100,\ P_1^{(1)}=K_{12}^{(1)}U_2,$$

$$P_2^{(2)}=K_{21}^{(2)}U_2,\ P_2^{(3)}=K_{21}^{(3)}U_2.$$

3.8 典型单元的方程式：

$$\frac{1}{Re}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_1^{(e)}\\ P_2^{(e)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q_1^{(e)}\\ Q_2^{(e)}\end{Bmatrix}$$

聚集的方程组：

$$\frac{1}{12a}\begin{bmatrix}8 & -6 & 0\\ -6 & 16 & -10\\ 0 & -10 & 16\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

结果：

$$P_1=\frac{39}{14}Q_a,\quad P_2=\frac{1}{7}Q_a,\quad P_3=\frac{20}{7}Q_a$$

3.10 $U_1=50$℃，$U_2=27.58$℃，$U_3=5.$[illegible]59℃；

$P_1{}^{(1)}=4.484$ 瓦特/cm²。

3.12 见例3.2。

3.14 $U_1=0.0$，$U_2=15a$，$U_3=46.67a$，

$U_4=550a$，$a=(\pi\times10^6)/4$。

3.15 $$K_{ij}^{(e)}=\int_{r_A}^{r_B}Kr\frac{d\psi_i}{dr}\frac{d\psi_j}{dr}dr+\Big[\beta r\psi_i\psi_j\Big]_{r_A}^{r_B}$$

$$F_i{}^{(e)}=\int_{r_A}^{r_B}rf\psi_i dr+\Big[r\psi_i\beta(u_\infty-q)\Big]_{r_A}^{r_B}$$

3.16 $U_1=45.322$，$U_2=47.232$，$U_3=47.869$，

$U_4=48.505$，$U_5=49.142$，$U_6=49.663$，

$U_7 = 50.5$。精确解如下：

$$u(r) = -\frac{Q}{2\pi K}\log\left(\frac{r}{r_0}\right) + u_0$$

$(Q = 150,\ K = 25,\ u_0 = 50,\ r_0 = L = 200)$

3.17 $\phi_1 = 1.3862$，$\phi_2 = 1.119$，$\phi_3 = 0.8108$，

$\phi_4 = 0.44595$，$\phi_5 = 0.0$。注意：$P_1^{(1)} = 2u_0$。

精确解是$(A_0 = 1)$：

$$\phi_0 = -2u_0 L\log(2 - x/L)$$

3.19 每单位宽度（垂直纸面）的周长：

$$C = 2\sqrt{(0.125)^2 + 3^2}/3$$

面积 $A = (0.25x/3)\,\mathrm{in}^2$。

T_1(顶点) $= 166.188°\mathrm{F}$ $\quad T_2 = 191.1°\mathrm{F}$ $\quad T_3 = 218.87°\mathrm{F}$

3.21 $K_{ij}^{11} = 0 \qquad K_{ij}^{12} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx$

$$F_i^1 = \int_{x_A}^{x_B} f\psi_i dx + Q_1\psi_i(x_A) + Q_2\psi_i(x_B)$$

$$K_{ij}^{21} = K_{ji}^{12} \qquad K_{ij}^{22} = \frac{1}{EI}\int_{x_A}^{x_B}\psi_i\psi_j dx$$

$$F_i^2 = P_1\psi_i(x_A) + P_2\psi_i(x_B)$$

$$Q_1 = -\frac{dM}{dx}\bigg|_{x=x_A} \qquad Q_2 = \frac{dM}{dx}\bigg|_{x=x_B}$$

$$P_1 = -\frac{dw}{dx}\bigg|_{x=x_A} \qquad P_2 = -\frac{dw}{dx}\bigg|_{x=x_B}$$

3.22 $w_1 = 0 \quad w_2 = -\frac{27}{12}\frac{f_0h^4}{EI} \qquad w_3 = -\frac{19}{6}\frac{f_0h^4}{EI}$

$M_1 = 0 \quad M_2 = (3/2)f_0h^2 \quad M_3 = 2f_0h^2$

3.23 $\lambda_1 = 10.387 \quad \lambda_2 = 48.0 \quad \lambda_3 = 126.756$。

亦见例5.2。

3.25 $\lambda_1 = 4.49$，$\lambda_2 = 36.648$。

3.26 $[M^{(e)}]\{\dot{u}\} + [K^{(e)}]\{u\} = \{F^{(e)}\}$，

式中 $\qquad M_{ij}^{(e)} = \int_{x_e}^{x_{e+1}}\psi_i\psi_j dx$，

其他矩阵和矢量由式(3.73)确定。

3.27

$$\frac{h}{6}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\\ \dot{U}_3\end{Bmatrix}+\frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\ P_2^{(1)}+P_1^{(2)}\\ P_2^{(2)}\end{Bmatrix}$$

$$P_2^{(1)}+P_1^{(2)}=0,\quad U_1=0,\quad P_2^{(2)}=\left(a\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=L}=-\beta(U_3-u_\infty),$$

$h=L/2$。

紧缩方程式是：

$$\frac{h}{6}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{U}_3\end{Bmatrix}+\frac{1}{h}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1+\beta h\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_2\\ U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ \beta u_\infty\end{Bmatrix}$$

利用Laplace变换，可得到这些方程式的解，例如$U_2(t)$：

$$U_2(t)=-\frac{5}{28}\left[\frac{d}{ab}+\frac{a^2+ca+d}{a(a-b)}e^{-at}+\frac{b^2+cb+d}{b(b-a)}e^{-bt}\right]$$

式中

$$C=\frac{24}{5h^2}[10+\beta h(5-u_\infty)]\qquad d=-\frac{144}{5h^3}$$

a和b是下面这个方程的根：

$$x^2+\frac{12}{7h^2}(5+2\beta h)x+\frac{36}{7h^4}(1+2\beta h)=0$$

3.28 3单元(均匀)网格：

$U_1=-0.5f_0$, $U_2=-0.4444f_0$, $U_3=-0.2777f_0$, $U_4=0$。

4单元(均匀)网格：

$U_1=-0.5f_0$, $U_2=-0.46875f_0$, $U_3=-0.375f_0$, $U_4=-0.2187f_0$

$U_5=0.0$

3.29 $U_1=0.0$, $U_2=1.84$, $U_3=2.015$, $U_4=1.76$, $U_5=1.0$。

3.31 $T_1=400.0°F$, $T_2=270.27°F$, $T_3=166.49°F$, $T_4=80.0°F$。

3.33 $\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\theta_j+f_i=0\qquad \sum_{j=1}^{n}K_{ji}u_j-\sum_{j=1}^{n}G_{ij}\theta_j=0$

式中 $K_{ij}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{d\psi_i}{dx}\psi_j dx\qquad G_{ij}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{1}{a}\psi_i\psi_j dx$

$$F_i=\int_{x_e}^{x_{e+1}}f\psi_i dx+P_i\qquad P_1^{(e)}=-\sigma(x_e)\qquad P_2^{(e)}=\sigma(x_{e+1})$$

3.34 见第5.2节

3.35 (a) $[K]=\frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ & \text{对称} & 12 & 0 & -6 & -3h \\ & & & 4h^2 & 3h & h^2 \\ & & & & 6 & 3h \\ & & & & & 2h^2 \end{bmatrix}$

$$\{F\}=-\frac{f_0 h}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)} \\ Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \\ Q_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

(b) $U_1=U_2=U_5=U_6=0$

$Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)}=0 \qquad Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)}=0$

(c) $\frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4h^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}=-\frac{f_0 h}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ h \end{Bmatrix}$

或 $\qquad U_3=-\frac{f_0 h^4}{48EI} \qquad\qquad U_4=-\frac{f_0 h^3}{96EI}$

$$Q_1^{(1)}=\frac{f_0 h}{2}-(6U_3+3hU_4)\frac{2EI}{h^3}=\frac{13}{16}f_0 h$$

$$Q_2^{(1)}=-\frac{f_0 h^2}{12}+(3hU_3+h^2U_4)\frac{2EI}{h^3}=-\frac{11}{48}f_0 h^2$$

$$Q_3^{(2)}=\frac{2EI}{h^3}(-6U_3+3hU_4)=\frac{3}{16}f_0 h$$

$$Q_4^{(2)}=\frac{2EI}{h^3}(-3hU_3+h^2U_4)=\frac{5}{48}f_0 h^2$$

$$M'=EI\frac{d^2w}{dx^2}\bigg|_{x=0.6h}=EI\sum_{i=1}^{4}U_i\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\bigg|_{x=0.6h}$$

$$=EI\left(U_3\frac{d^2\phi_3}{dx^2}+U_4\frac{d^2\phi_4}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0.6h}=\frac{f_0 h^2}{24}$$

3.36 $U_4=0.0651$, $U_5=-0.071615\text{m}$ $\quad U_6=0.16927$;

$M'=-20.833 \quad \text{N·m}$

3.37 $[K^{(1)}]=\dfrac{E}{h^3}\log 2\begin{bmatrix} 324 & -180h & -324 & -144h \\ & 100h^2 & 180h & 80h^2 \\ \text{对称} & & 324 & 144h \\ & & & 64h^2 \end{bmatrix}$

$$=\frac{E}{h^3}\begin{bmatrix} 216 & -120h & -216 & -96h \\ & 64h^2 & 120h & 54h^2 \\ & & 216 & 96h \\ & & & 42h^2 \end{bmatrix}$$

$[K^{(2)}]$由式(3.102)给出，其中$b=EI_2$，$U_1=U_2=0$，

$Q_3^{(1)}+Q_1^{(2)}=0$，$Q_4^{(1)}+Q_2^{(2)}=0$，$Q_3^{(2)}=-F_0$，$Q_4^{(2)}=0$

$$M^*=\frac{E}{1.5}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)\bigg|_{x=h/2}$$

3.38 $U_3=-0.1215\text{ft}$，$U_4=0.0315\text{ft}$，$U_5=-0.3321\text{ft}$，

$U_6=0.036$；$M^*=-525\text{lb·ft}$

3.39 $U_3=-0.056588\text{in}$，$U_4=0.005305\text{in}$，$U_5=-0.27447\text{in}$

$U_6=0.015365$，$U_7=-0.80813\text{in}$，

$U_8=0.032342$；$M^*=-265.26\text{lb·in}$

3.41 分布荷载的力矢量如下：

$\{f^{(1)}\}^T=\{-346.67,\ 426.67,\ -186.67,\ -320.0\}$

$\overline{U}_3=-0.74695$，$\overline{U}_4=0.1634$，$\overline{U}_5=-1.8714$，$\overline{U}_6=0.1994$，

式中，$\overline{U}_i=U_i(EI\times10^{-6})$；

$M^*=-22613\text{lb·ft}$

3.43 $U_2=0.000051$，$U_3=-0.00013\text{m}$，$U_4=-0.0000188$，

$U_5=-0.000039\text{m}$，$U_6=-0.000036$，$U_8=0.000033$；$M^*=115.94\text{N·m}$。

3.44 $\overline{U}_2=0.12187$，$\overline{U}_3=-0.4566$，$\overline{U}_4=0.0302$，

$\overline{U}_5=-0.32986$，$\overline{U}_6=-0.05979$，$\overline{U}_8=0.0010417$，$\overline{U}_9=-0.39583$，

$\overline{U}_{10}=0.1052$，这里，$\overline{U}_i=U_i(EI\times10^{-5})$；

$M^*=1833.33\text{lb·ft}$。

3.45 分布荷载的分力矢量如下：

$\{f^{(1)}\}^T=\{-375.0,\ 416.67,\ -875.0,\ -625.0\}$

$\overline{U}_2=0.24826$，$\overline{U}_3=-0.99537$，$U_4=0.111115$，

$\overline{U}_5=-0.9838$，$\overline{U}_6=-0.11806$，$\overline{U}_8=-0.23611$，这里，

$\overline{U}_i=U_i(EI\times10^{-5})$；　$M^*=4583.3\ \text{N·m}$。

3.47 $U_1=\dfrac{3f_0L^4}{8(3EI+KL^3)}$　　$Q_1^{(1)}=$弹簧力$=-KU_1$

3.48 $U_3=\dfrac{-f_0h^4[2.5+(11/12600)(kh^4/KJ)]}{12EJ+[784/(420)^2][kh^4/EI]+455(k^2h^8/EI)}$

注意　由于$K\to 0$，可得，$U_3=-(5f_0L^4/384)$，$(h=L/2)$。

3.49　(b) $K_{ij}^{(e)}=\int_{r_1}^{r_2}\left[D_{11}\frac{d^2\phi_i}{dr^2}\frac{d^2\phi_j}{dr^2}+D_{22}\frac{1}{r^2}\frac{d\phi_i}{dr}\frac{d\phi_j}{dr}\right]rdr$

$$f_i^{(e)}=\int_{r_1}^{r_2}rf\phi_i dr$$

3.50　变分方程式如下：

$$0=\int_{r_i}^{r_0}\left[-r\frac{dv}{dr}\frac{dM_r}{dr}+v(M_r-M_\theta)+rvf\right]dr-Q_1v(r_i)-Q_2v(r_0)$$

$$0=\int_{r_i}^{r_0}\left[-\frac{d}{dr}(r\xi)\frac{dw}{dr}+\xi(\overline{D}_{12}M_\theta-\overline{D}_{22}M_r)r\right]dr-\theta_1\xi(r_i)-\theta_2\xi(r_0)$$

$$0=\int_{r_i}^{r_0}\left[\zeta\frac{dw}{dr}+\zeta(\overline{D}_{12}M_r-\overline{D}_{11}M_\theta)r\right]dr$$

式中，v，ξ和ζ是与w，M_r和M_θ对应的试函数，且：

$$Q_1=r\frac{dM_r}{dr}\bigg|_{r=r_i}\qquad Q_2=-r\frac{dM_r}{dr}\bigg|_{r=r_0}\qquad \theta_1=\frac{dw}{dr}\bigg|_{r=r_i}$$

$$\theta_2=-\frac{dw}{dr}\bigg|_{r=r_0}$$

3.51　2单元（半长度）由下列各式给出：

$U_1=w(0)=0.171455\times10^{-3}$，$U_2=0$，$U_3=0.9627\times10^{-4}$，$U_4=0.255\times10^{-3}$，$U_5=U_6=0.0$。精确解如下：

$$w(r)=\frac{f_0}{64D}(r_0{}^2-r^2)^2\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\gamma^2)}$$

式中，r_0=平板半径，h=平板厚度

3.52　令$w(\overline{X})=\alpha_0+\alpha_1\overline{X}+\alpha_2\overline{X}^2+\alpha_3\overline{X}^3+\alpha_4\overline{X}^4+\alpha_5\overline{X}^5$，式中，$\overline{X}$是原点在结点1的局部坐标。

$$\begin{Bmatrix}w_1\\\theta_1\\k_1\\w_2\\\theta_2\\k_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\1&L&L^2&L^3&L^4&L^5\\0&1&2L&3L^2&4L^3&5L^4\\0&0&2&6L&12L^2&20L^3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{Bmatrix}=\frac{1}{2L^5}\begin{bmatrix}2L^5&0&0&0&0&0\\0&2L^5&0&0&0&0\\0&0&L^5&0&0&0\\-20L^2&-12L^3&-3L^4&-20L^2&8L^3&L^4\\30L&16L^2&3L^3&30L&-14L^2&-2L^3\\-12&-6L&-L^2&-12&6L&L^2\end{bmatrix}$$

$$
\cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ k_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ k_2 \end{Bmatrix}
$$

$$
[K] = \frac{EI}{70L^3}\begin{bmatrix}
1200 & 600L & 30L^2 & -1200 & 600L & -30L^2 \\
 & 384L^2 & 22L^3 & -600L & 216L^2 & -8L^3 \\
 & & 6L^4 & -30L^2 & 8L^3 & L^4 \\
 & & & 1200 & -600L & 30L^2 \\
 & & & & 384L^2 & -22L^3 \\
 & \text{对称} & & & & 6L^4
\end{bmatrix}
$$

3.53 (a) 我们把框架的垂直部分作为单元1，则单元矩阵如下：

$$
[K^{(1)}] = \frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix}
6 & & & & & \text{对称} \\
0 & \mu & & & & \\
-3h & 0 & 2h^2 & & & \\
-6 & 0 & 3h & 6 & & \\
0 & -\mu & 0 & 0 & \mu & \\
-3h & 0 & h^2 & 3h & 0 & 2h^2
\end{bmatrix}
$$

$[K^{(2)}]$与式(3.129) 中$b = EI$时一样。

$$
\{F^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} -F_1^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ -F_3^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ F_4^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad
\{F^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix}
$$

(b) 集合方程：

$$
[K] = \frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix}
6 & 0 & 3h & -6 & 0 & 3h & & & \\
 & \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & & 0 & \\
 & & 2h^2 & -3h & 0 & 2h^2 & & & \\
 & & & 6+\mu & 0 & -3h & -\mu & 0 & 0 \\
 & & & & 6+\mu & -3h & 0 & -6 & -3h \\
 & & & & & 4h^2 & 0 & 3h & h^2 \\
 & & & & & & \mu & 0 & 0 \\
 & \text{对} & \text{称} & & & & & 6 & 3h \\
 & & & & & & & & 2h^2
\end{bmatrix}
$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -F_1^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ -F_3^{(1)} + P_1^{(2)} \\ P_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_4^{(1)} + F_2^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

(c) 边界条件为： $-F_3^{(1)} + P_1^{(2)} = 0$，$P_2^{(1)} + F_1^{(2)} = 0$，$F_4^{(1)} + F_1^{(2)} = 0$，$P_2^{(2)} = P_0$，$F_3^{(2)} = -F_0$，$F_4^{(2)} = 0$；$U_1 = U_2 = U_3 = 0$。

则聚缩方程式由与最后6行和6列相关的6×6矩阵方程得到。

3.56 (a) $[K^{(1)}]$与式（3.130）中$\sin\alpha = (3/5)$ $\cos\alpha = (4/5)$ 时相同。$[K^{(2)}]$与式（3.129）相同。

(c) 聚缩方程式为：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{16\alpha + 54}{25}c_1 + \beta c_2 & \dfrac{12(\alpha - 6)}{25}c_1 & -1080c_1 \\ \dfrac{12(\alpha - 6)}{25}c_1 & \dfrac{8\alpha + 96}{25}c_1 + 6c_2 & 1440c_1 - 1080c_2 \\ -1080c_1 & 1440c_1 - 1080c_2 & 2(600)^2c_1 + 2(360)^2c_2 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

且

$$\alpha = \frac{A}{I}\ \frac{(600)^2}{2} \qquad \beta = \frac{A}{I}\ \frac{(360)^2}{2} \qquad c_1 = \frac{2EI}{(600)^3} \qquad c_2 = \frac{2EI}{(360)^3}$$

$\because EI = 10^7$，$EA = 10^4$，$\therefore$方程式的解是：$U_4 = 2.597\text{in}$，$U_5 = -34.62\text{in}$，$U_6 = -0.0255\text{rad}$

3.57 聚缩的方程组：

$$\frac{EI}{h^3}\cdot\begin{bmatrix}\frac{4h^2}{\sqrt{2}} & & & & \\ \frac{-3h}{\sqrt{2}} & \frac{\mu+6}{2\sqrt{2}}+\mu & & 对称 & \\ \frac{3h}{\sqrt{2}} & \frac{\mu-6}{2\sqrt{2}} & \frac{\mu+6}{2\sqrt{2}}+12 & & \\ \frac{2h^2}{\sqrt{2}} & -\frac{3h}{\sqrt{2}} & \frac{3h}{\sqrt{2}}+6h & \frac{4h^2}{\sqrt{2}}+4h^2 & \\ 0 & 0 & 6h & 2h^2 & 4h^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_3\\ U_4\\ U_5\\ U_6\\ U_9\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -F\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

式中，$\mu=(A/I)h^2$。

3.59 解题步骤与例3.5相同。

3.60

$$\frac{dx}{d\xi}=h(1-2\alpha\xi)$$

$$\frac{du}{d\xi}=\frac{du}{dx}\ \frac{dx}{d\xi}=h(1-2\alpha\xi)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}=h^2(1-2\alpha\xi)^2\frac{d^2u}{dx^2}-2\alpha h\ \frac{du}{dx}\cdots$$

$$u_h(\xi)=\sum_{i=1}^{3}u_i\psi_i(\xi)$$

式中ψ_i＝自然坐标系中二次插值函数。

由Taylor原理：

$$|u-u_h|\leqslant c(\xi)\max\left|\frac{d^3u}{d\xi^3}\right|=c(\xi)0(h^3)$$

由式(a)，能量的范数变为

$$\|u-u_h\|_1\leqslant c\frac{\alpha}{1-2\alpha}h$$

3.61 $[\hat{K}]\{u\}_{n+1}=[\hat{M}]\{u\}_n$。

$[\hat{K}] = [M] + \Delta t\theta [K]$

$[\hat{M}] = [M] - (1-\theta)\Delta t[K]$

解特征值问题：

$|[\hat{M}] - \lambda [\hat{K}]| = 0$

对稳定系统，令$\lambda_{min} = 0$（对稳定振动有：$\lambda_{min} \geq -1$），对$\alpha = \Delta t/h$求解，得$\alpha = -\sqrt{2} + (5/3)$。这个系统对任意的$\alpha$值的振动是稳定的。

3.62 时间$t = 0.08\mu s$在下列各点上轴向位移（$u \times 10^3$）为

x	0.0	300	350	360	370	380	390	400
u	0.0	-1.135×10^{-3}	-1.905×10^{-2}	-0.178	0.03	0.381	0.8 1	1.348
x	410	420	430	440	450	460	480	500
u	1.80	2.346	2.806	3.338	3.815	4.331	5.326	6.32

3.63 精确解为：

$$u(x,\ t) = 1 - x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x e^{-n^2\pi^2 t}}{n}$$

$t = 0.5$的有限元解如下：

网　格	x						
	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875
$4L(\Delta t = 0.05)$	0.8735	0.7470	0.6212	0.4954	0.3712	0.2470	0.1235
$2Q(\Delta t = 0.05)$	0.8729	0.7463	0.6201	0.4944	0.3701	0.2463	0.1229
$8L(\Delta t = 0.025)$	0.8732	0.7465	0.6206	0.4951	0.3706	0.2466	0.1232
$4Q(\Delta t = 0.025)$	0.8731	0.7462	0.6204	0.4947	0.3704	0.2463	0.1231
$4Q(\Delta t = 0.05)$	0.8758	0.7406	0.6214	0.4942	0.3697	0.2461	0.1230
精确解	0.8733	0.7463	0.6208	0.4954	0.3708	0.2468	0.1233

3.64 横梁跨中挠度为：（$-w \times 10^3$）

$t(\mu s)$		1	5	10	20	40	60
精　确　法		0.00053	0.0287	0.1441	0.4984	0.8861	1.024
有限元法	5 单元	0.00012	0.0091	0.0686	0.3640	0.8596	1.0123
	10单元	0.00025	0.0173	0.1672	0.4868	—	—

3.65 全梁中利用8个线性单元得出的横梁挠度为：$(-w\times10^6)$

$t(\mu s)$	1	5	10	20	25	30	40	50
$w\left(\frac{L}{4},\ t\right)$	0.0971	7.319	55.55	302.83	444.81	575.82	799.55	975.56
$w\left(\frac{L}{2},\ t\right)$	−0.0044	−0.332	−2.466	−11.81	−14.90	−14.79	−2.6039	25.613

3.67 悬臂梁的顶端挠度为：$(-w\times10^3)$

$t(\mu s)$	5	10	20	25	30	35	40	45	50
w	0.0371	0.2817	1.5355	2.2534	2.9093	3.4880	3.9779	4.3723	4.6695

3.68 两端固定梁的中心挠度为$(-w\times10^3)$

$t(\mu s)$	5	10	20	25	30	35	40	45	50
w	0.0031	0.3686	0.3640	0.5218	0.6559	0.7671	0.8596	0.9396	1.0124

3.70 由$\alpha_0 M_{33}-\lambda(K_{33}+\alpha_0 M_{33})=0$ 得，

$$\lambda=\frac{1}{(1260/156)a^2+1}$$ 恒大于0。

3.71

$$\psi_1(\xi)=\frac{1}{2s}(1-\xi)(-1+s-\xi)$$

$$\psi_2(\xi)=\frac{1}{s(2-s)}(1-\xi^2)$$

$$\psi_3(\xi)=\frac{1}{2s}(1+\xi)(1+s-\xi)$$

3.72

$$\phi_1(\xi)=\frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3) \qquad \phi_2(\xi)=-\frac{h}{8}(1-\xi)(1-\xi^2)$$

$$\phi_3(\xi)=\frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3) \qquad \phi_4(\xi)=\frac{h}{8}(1+\xi)(1-\xi^2)$$

3.74

$$\psi_1(\xi)=\sin\frac{\pi(\xi+\xi^2)}{4} \qquad \psi_2(\xi)=\sin\frac{\pi(1-\xi^2)}{2}$$

$$\psi_3(\xi)=\sin\frac{\pi(\xi^2-\xi)}{4}$$

3.75 见3.4节

3.76 2点积分得精确值：

$$K_{12} = -\frac{1}{h}\left[1+\frac{1}{2}(x_e+x_{e+1})\right] \qquad G_{12} = \frac{h}{6}\left(1+x_e+\frac{h}{2}\right)$$

3.78 $n=1$：$K_{11}=0.0$，$G_{11}=\frac{h}{4}$

$n=2$：$K_{11}=\frac{12}{h^3}$，$G_{11}=0.398148h$

$n=3$：$K_{11}=\frac{12}{h^3}$，$G_{11}=0.37h$

$n=4$：$K_{11}=\frac{12}{h^3}$，$G_{11}=0.371429\ h\left(=\frac{13h}{35}\right)$ （精确）

3.79 $K_{11}=\frac{120}{7h^3}$，$G_{11}=\frac{181h}{462}$ （对5点积分精确）

3.81 一个单元和两个单元的网格都给出各节点上的精确解。

3.82 (a)

$$\begin{bmatrix} 9.0 & -5.5 & 0.0 & 0.0 \\ -5.5 & 12.0 & -6.5 & 0.0 \\ 0.0 & -6.5 & 14.0 & -7.5 \\ 0.0 & 0.0 & -7.5 & 8.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 1.00 \\ \beta+0.5833 \end{Bmatrix}$$

3.91 见习题3.81和例3.10。

3.92 程序FEM1D的数据输入如下（对于正方形单元的两个单元网格）：

- NPRNT = 1, IELEM = 2, NPE = 3, NDF = 1, NEM = 2, NBDY = 2, NBF = 0, ICONT = 1, ITEM = 0, NTIME = 0
- AL = 1.0, X0 = 0.0
- AX0 = 1.0, AX1 = 1.0, BX0 = BX1 = CX0 = CX1 = 0.0
  F0 = 1.0, F1 = 4.0
- IBDY(1) = 1, IBDY(2) = 5
- VBDY(1) = 0.0, VBDY(2) = 0.0

3.94

- NPRNT = 1, IELEM = 1, NPE = 2, NDF = 1, NEM = 6, NBDY = 1, NBF = 1, ICONT = 0, ITEM = 0, NTIME = 0
- AL = 200.0, X0 = 0.0
- IBDY(1) = 7
- VBDY(1) = 50.0
- IBF(1) = 1
- VBF(1) = -150/2π
- EC(1, 1) = 0.0, EC(1, 2) = 10.0
- COEF(1, 1) = 0.0, COEF(1,2) = 157.08,all other COEF are zero

- EC(2,1) = 10.0 EC(2,2) = 20.0
- COEF(2,1) = 0.0, COEF(2,2) = 157.08, all other COEF are zero
- EC(3,1) = 20.0, EC(3,2) = 40.0
- COEF(3,1) = 0.0, COEF(3, 2) = 157.08, all other COEF are zero
- EC(4,1) = 40.0, EC(4, 2) = 80.0
- COEF(4, 1) = 0.0, COEF(4, 2) = 157.08, all other COEF are zero
- EC(5, 1) = 80.0, EC(5, 2) = 140.0
- COEF(5, 1) = 0.0, COEF(5, 2) = 157.08, all other COEF are zero
- EC(6,1) = 140.0, EC(6,2) = 200.0
- COEF(6,1) = 0.0, COEF(6,2) = 157.08, all other COEF are zero

答案见习题3.16。

习题3.95～3.110的答案见前面相应题的解答。

第 四 章

4.1 $F_1 = f_1^{(1)} = \frac{a_0 h}{2} + \frac{a_1 h^2}{6}$ $\quad F_2 = f_2^{(1)} + f_1^{(2)} = a_0 h + a_1 h^2$

$F_3 = f_2^{(2)} + f_1^{(3)} = a_0 h + 2a_1 h^2 \quad F_4 = f_2^{(3)} = \frac{a_0 h}{2} + \frac{4}{3} a_1 h^2$

4.2 (a) $\psi_1 = c(5.1 - 1.2x - y)$ $\quad \psi_2 = c(-0.7 + 1.7x - y)$

$\psi_3 = c(-1.5 - 0.5x + 2y) \qquad c = 1/2.9$

4.3 梯度 $\quad T = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^{3} (\beta_i T_i \hat{e}_1 + \gamma_i T_i \hat{e}_2) = 10.76\hat{e}_1 - 105.02\hat{e}_2$

式中，$\hat{e}_1$和$\hat{e}_2$是相应于x和y方向的基本单元向量，392K 等温线交于点（3.71315, 1.0）和（3.9734, 1.0266）。

4.4 $[K^1] = [S^{01}]$和$[K^2] = [S^{02}]$，

式中$[S^{01}]$和$[S^{02}]$见表4.7。

4.5 (b) 集合矩阵为10×10阶，其部分系数如下：

$K_{11} = K_{22}^{(2)} \quad K_{22} = K_{33}^{(2)} + K_{22}^{(1)} \quad K_{55} = K_{11}^{(1)} + K_{44}^{(2)} + K_{22}^{(3)} + K_{22}^{(4)}$

$K_{57} = K_{23}^{(3)} + K_{21}^{(4)} \quad K_{15} = K_{24}^{(2)} \quad K_{13} = 0, \cdots$

4.6 (a)
$$\begin{bmatrix} K_{22} & & & & & \\ K_{32} & K_{33} & & \text{对称} & & \\ K_{52} & K_{53} & K_{55} & & & \\ K_{62} & K_{63} & K_{65} & K_{66} & & \\ K_{72} & K_{73} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & \\ K_{82} & K_{83} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix}$$

$$
= \begin{Bmatrix} F_2 - K_{21}U_1 - K_{24}U_4 \\ F_3 - K_{31}U_1 - K_{34}U_4 \\ F_5 - K_{51}U_1 - K_{54}U_4 \\ F_6 - K_{61}U_1 - K_{64}U_4 \\ F_7 - K_{71}U_1 - K_{74}U_4 \\ F_8 - K_{81}U_1 - K_{84}U_4 \end{Bmatrix}
$$

4.7 对于这里给出的单元，式(4.96) 的矩阵为：

$[K]=10[S^{11}]+5[S^{22}]$ $a=3,\ b=2$

$$
[H]=\frac{25}{6}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}
$$

$$
\{P\}=\frac{25}{2}(273+5)\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix}
$$

其中，$[S^{11}]$和$[S^{22}]$由式(4.40)给出。

4.8 $f_1=30.77W$，$f_2=25.64W$，$f_3=43.59W$。

4.9 $f_1=f_4=27.27W$，$f_2=f_3=22.73W$。

4.11

节 点	5	6	8	9	11	12
精确解	0.06796	0.09541	0.18203	0.25	0.43203	0.54053
有限元解*						
三角形单元	0.07143	0.09821	0.18750	0.25	0.42857	0.52679
矩形单元	0.07154	0.10092	0.19286	0.27857	0.50703	0.58479

注 *$u(0,\ 1)=1$

亦见题4.73。

4.12

节 点	5	6	8	9	11	12
精确解	0.05318	0.07522	0.14020	0.19827	0.32010	0.45269
有限元解						
三角形单元	0.05834	0.08252	0.15087	0.21337	0.33178	0.46923
矩形单元	0.04763	0.06736	0.12994	0.18378	0.30683	0.43391

4.13 由不同的矩形网格得$u(0.5, 0.5)$值的比较。

1×2	2×4	4×8	8×16	精确值
0.375	0.27857	0.25597	0.25144	0.2500

4.14

$$K_{ij}=\frac{1}{4A^2}\sum_{k=0}^{3}\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}^{k}[S^{ijk}]+a_{00}^{k}[S^{k}]\right)$$

式中 $S_{mn}^{ijk}=\int_{\Omega^e}x_k\frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_n}{\partial x_j}dx_1dx_2\quad S_{mn}^{k}=\int_{\Omega^e}x_k\psi_m\psi_n dx_1dx_2\quad x_0=1\quad x_1=x$

$x_2=y\quad x_3=xy\quad \frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}=\frac{1}{2A}(\beta_m\delta_{i1}+\gamma_m\delta_{i2})\quad \delta_{ij}=$ Kronecker delta

4.16 三角形元

$$f_i=\frac{1}{2A}[a_0I_{00}\alpha_i+I_{10}(a_1\alpha_i+a_0\beta_i)+I_{01}(a_2\alpha_i+a_0\gamma_i)$$
$$+I_{11}(a_2\beta_i+a_1\gamma_i)+a_1\beta_iI_{20}+a_2\gamma_iI_{02}]$$

4.17 与习题4.14相同，由$a_{ij}^0=a_{ij}^k\alpha_k/2A$，$a_{ij}^1=a_{ij}^k\beta_k/2A$，$a_{ij}^2=a_{ij}^k\gamma_k/2A$，和$a_{ij}^3=0$，得出$a_{ij}^0$，$a_{ij}^1$，$a_{ij}^2$和$a_{ij}^3$，其中，重复的$K$值求和是显而易见的。

4.19 同习题4.16，其中，$a_0=f_k\alpha_k/2A$，$a_1=f_k\beta_k/2A$，$a_2=f_k\gamma_k/2A$，且K值求和是显而易见的（$f_k\alpha_k=f_1\alpha_1+f_2\alpha_2+f_3\alpha_3$）。

4.20 一维和二维的均匀网格的分析都能得出精确解，沿任一垂直线在节点上的值是（0.0，1.16，1.84，2.04，1.76，1.0）。

4.22 对于$2G\theta=10$，有限元解和精确解的对比列于下表（亦见习题4.74）

椭圆横截面 ($a=1$, $b=3/2$)				圆形横截面 ($a=b=1$)			
x	y	精确法	有限元法	x	y	精确法	有限元法
0.0	0.0	3.4615	3.6753	0.0	0.0	2.5000	2.6744
0.5	0.0	3.0769	3.0903	0.5	0.0	1.875	1.8411
1.0	0.0	1.9230	1.8093	0.0	0.5	1.875	1.8411
0.0	0.5528	2.4037	2.3531	0.5	0.5	1.25	1.1848
0.5	0.5528	2.0191	1.9878				
1.0	0.5528	0.8652	0.8436				
0.0	0.7454	1.5382	1.5000				
0.5	0.7454	1.1536	1.1095				

4.23 $a=1$, $2G\theta=10$时结果如下表

$(x,\ y)$	(0.0,0.19245)	(0.0,0.0)	(0.222,0.0)	(0.444,0.0)
精确解	0.2777	0.3704	0.2743	0.0960
有限元解	0.2780	0.3256	0.2897	0.0771

4.24 这个问题的解，是要求对程序FE 2D作少量的修改，对于$a=0.5$，$G_1\theta=2G_2\theta=5$时，(a) 部分的答案为$u(0,\ 0)=1.5536$，$u(0.5,\ 0.0)=1.2054$，$u(0.5,\ 0.5)=0.96429$。

4.25 当角度为5°的扇形和12个线性三角形单元（沿径向6个间隔）时，答案为400.0，331.01，270.13，215.66，166.38，121.39，80.00。与表3.9中所列的解一致（亦见习题4.75）。

4.26 采用6×16的线性矩形单元非均匀网格。单元的长Dx(I)和Dy(I)是：

Dx =(0.2，0.2，0.4，0.4，0.4，0.4)

Dy =(1.2,1.0,0.8,0.8,0.6,0.4,0.4,0.4,0.2,0.2,0.2,0.2,0.6,0.6,0.2,0.2)

坐标系原点在左下角，源125W（每半个域）位于节点71。计算温度为：

$T_{64}=293.38$K，$T_{65}=292.38$K，$T_{66}=390.46$K，$T_{71}=299.87$K，

$T_{72}=292.04$K，$T_{73}=290.29$K，$T_{78}=292.54$K，$T_{79}=291.55$K，

$T_{80}=289.63$K，$T_{113}=280.89$K，$T_{114}=280.87$K，$T_{115}=280.81$K。

4.28 图4.12所示网格，内节点上温度为：

$T_4=345.74$K，$T_5=329.18$K，$T_8=409.51$K，$T_{11}=373.93$K，

$T_{12}=378.46$K。

4.29 坐标系原点位于域的左下角，域分为如下增量的线性矩形单元：

Dx = {2.0,2.0,2.0,1.0,0.6,0.4,0.4,0.6,1.0,2.0,2.0,2.0}

Dy = {1.6,0.4,0.4,0.4,0.4,0.4,0.4,0.4,0.6,1.0}

这个网格包含有102个单元和130个节点；节点（70,71,72,73,74）与节点（78，79，80，81，82）有相同的几何坐标。这两个装置形成板桩的左右两边，沿板桩的速度势的值为：$\phi_{68}=0.97135$，$\phi_{69}=1.0415$，$\phi_{70}=1.2867$，$\phi_{71}=1.4113$，

$\phi_{72}=1.5115$，$\phi_{73}=1.5973$，$\phi_{74}=1.6741$，$\phi_{78}=0.9215$，$\phi_{79}=0.8727$，

$\phi_{80}=0.7071$，$\phi_{81}=0.4077$，$\phi_{82}=0.0$。

4.37 $$[K]=\frac{ab}{24}\begin{bmatrix}5 & 0 & -1 & 0 & -4\\ 0 & 5 & 0 & -1 & -4\\ -1 & 0 & 5 & 0 & -4\\ 0 & -1 & 0 & 5 & -4\\ -4 & -4 & -4 & -4 & 16\end{bmatrix}$$

4.38 $\psi_1=L_1(2L_1-1)$，$\psi_2=L_2(2L_2-1)$，$\psi_3=L_3(2L_3-1)$，

$\psi_4=4L_1L_2$，$\psi_5=4L_2L_3$，$\psi_6=4L_1L_3$。

4.39 3和 $-1/2$

4.40 $\psi_{14}=32L_1L_2L_3(4L_2-1)$

4.43 $\psi_1=\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi)$，$\psi_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$，

$$\psi_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi,\qquad \psi_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi,$$

$$\psi_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)。$$

4.44 ψ_i，$i=1,2,3,4$是四节点矩形单元的线性插值函数；ϕ_i由下式给出：
$\phi_1=(\xi^2-1)$，$\phi_2=(\eta^2-1)$，$\phi_3=(\xi^2-1)\eta$，$\phi_4=\xi(\eta^2-1)$。

4.45 **变分形式**

$$\int_{\Omega^e}(\text{梯度}w\cdot q-wf)dxdy-\oint_{\Gamma^e}wq_n ds=0$$

$$\int_{\Omega^e}V\cdot\left(\text{梯度}u-\frac{1}{K}q\right)dxdy=0\ (2\text{个等式，一个为}v_1\text{一个为}v_2)$$

式中，$V=(v_1,v_2)$和w是试函数（或，分别是q和u的变分），且$q_n=\hat{n}\cdot q$。

有限元矩阵 当u_1，q_1，q_2用同一ψ_i插值时，得：

$$K_{ij}^{11}=0\qquad K_{ij}^{12}=\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\psi_j dxdy\qquad K_{ij}^{13}=\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\psi_j dxdy$$

$$F_i^1=\oint_{\Gamma^e}\psi_i q_n ds,\qquad K_{ij}^{21}=K_{ji}^{12}\qquad K_{ij}^{22}=-\int_{\Omega^e}\frac{1}{k}\psi_i\psi_j dxdy$$

$$K_{ij}^{23}=0\qquad F_i^2=0\qquad K_{ij}^{31}=K_{ji}^{13}\qquad K_{ij}^{32}=0\qquad K_{ij}^{33}=K_{ij}^{22}\qquad F_i^3=0。$$

4.46 (a) 变分方程式：

$$0=\int_{\Omega^e}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}-v_1(D_{22}M_1-D_{12}M_2)\right]dxdy-\oint_{\Gamma^e}v_1t_1ds$$

$$0=\int_{\Omega^e}\left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-v_2(D_{11}M_2-D_{12}M_1)\right]dxdy-\oint_{\Gamma^e}v_2t_2ds$$

$$0=\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial M_2}{\partial y}+2D_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-uq\right)dxdy$$

$$-\oint_{\Gamma^e}\left[t_3u+t_4\left(n_x\frac{\partial u}{\partial y}+n_y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]ds$$

式中，v_1，v_2和u是分别与M_1，M_2和w相应的试函数，且：

$$t_1=\frac{\partial w}{\partial x}n_x\qquad t_2=\frac{\partial w}{\partial y}n_y$$

$$t_3 = \frac{\partial M_1}{\partial x}n_x + \frac{\partial M_2}{\partial y}n_y - D_{33}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}n_x + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}n_y\right)$$

$$t_4 = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad D_{11} = S \quad D_{22} = D_{11} \quad D_{12} = \upsilon D_{11} \quad 2D_{33} = \frac{2}{(1+\upsilon)S}$$

4.47 单元矩阵为

$$[K^{11}] = \frac{2D_{33}}{ab}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^{12}] = \frac{b}{2a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [K^{21}]^T$$

$$[K^{13}] = [K^{31}]^T = \frac{a}{2b}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [K^{22}] = -\frac{D_{22}ab}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K^{23}] = [K^{32}]^T = \frac{D_{12}ab}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [K^{33}] = \frac{D_{11}}{D_{22}}[K^{22}]$$

4.48 $[K^{11}]$同习题4.47，$[K^{12}]=[K^{21}]^T=[S^{11}]$，$[K^{13}]=[K^{31}]^T=[S^{22}]$，$[K^{22}]=-D_{22}[S]$，$[K^{23}]=[K^{32}]^T=D_{12}[S]$，$[K^{33}]=-D_{11}[S]$，式中，$[S^{11}]$，$[S^{22}]$和$[S]$查表4.7。

4.51 $P=M_0/2$，$U_1=0$，$U_6=0$，$V_6=0$，$U_{11}=0$，$F_{x5}=-P$，$F_{x15}=P$，F_{x1}、F_{x6}、F_{y6}和F_{x11}为未知量，其他所有的力都为0。

4.53 $[K]=\frac{(\alpha+\beta)h}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \alpha=\frac{E}{1-\upsilon^2} \quad \beta=\frac{E}{2(1+\upsilon)}$

4.54 $\mu[K]\{u\}-\rho\beta g[G]\{T\}=\{F^1\}$ (i)

$k[K]\{T\}=\{F^2\}$ (ii)

$$K_{ij}=\int_0^h \frac{d\psi_i}{dy}\frac{d\psi_j}{dy}dy \qquad G_{ij}=\int_0^h \psi_i\psi_j dy$$

$$F_i^1 = -\int_0^h \rho\beta g\psi_i dy + P_i \quad P_1 = -\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_0 \quad P_2 = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_h$$

$$F_i^2 = \int_0^h \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \psi_i dy + Q_i \quad Q_1 = -k\left(\frac{dT}{dy}\right)_0 \quad Q_2 = k\left(\frac{dT}{dy}\right)_h$$

解题要点 由边界条件和初始值$u=0$，解符合式(ii)的集合方程式求T，用它代

入将合式（i）的集合方程中求出u，再用修正值 F_i^2（因为已求出一个新的u）解式(ii)。重复这些步骤，直到u和T的两个相邻值的差小于1%。

4.56 有限元模型同式4.195，但F_i^1改为：

$$F_i^1 = \oint_{\Gamma^e} t_s\psi_i ds + \rho g\beta\int_{\Omega^e} T\psi_i dxdy$$

另外，我们把有限元模型与能量方程式联系起来：

$$[K]\{T\} = \{Q\}$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega^e} k\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x} + \frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdy$$

$$Q_i = \oint_{\Gamma^e} k\frac{\partial T}{\partial n}\psi_i ds$$

4.58 $U_1 = U_2 = \cdots = U_9 = U_0$，$V_1 = V_2 = \cdots = V_9 = 0$；$U_{28} = U_{29} = \cdots = U_{36} = V_{28} = V_{29} = \cdots = V_{36} = 0.0$；$F_{10x} = F_{18x} = F_{19x} = F_{27x} = P_0$，$F_{10y} = F_{18y} = F_{19y} = F_{27y} = 0.0$。

4.59 一般地，固定墙上所有速度分量均为0，且沿对称线的剪应力也为0(见正文的讨论)，入口处节点的垂直分速度为0，并有确定的水平速度u_0。

4.60 (a) 在边界节点上：$w = 0.0$；在沿x轴的节点上$S_y = 0.0$；沿y轴的节点上$S_x = 0.0$。见习题4.95。

(b) 在顶边（简支）节点上：$w = S_x = 0.0$；在右边（固定）节点上：$w = S_x = S_y = 0.0$；在沿对称轴的节点上见(a)。

(c) 在沿固定边的节点上$w = S_x = S_y = 0.0$。

4.61 $K_{ij}^{11} = \frac{1}{4A}(D_{44}\beta_i\beta_j + D_{55}\gamma_i\gamma_j)$

$$K_{ij}^{12} = \frac{D_{44}}{4A^2}\beta_i(I_{00}\alpha_j + I_{10}\beta_j + I_{01}\gamma_j)$$

$$K_{ij}^{13} = \frac{D_{55}}{4A^2}\gamma_i(I_{00}\alpha_j + I_{10}\beta_j + I_{01}\gamma_j)$$

$$K_{ij}^{22} = \frac{1}{4A}(D_{11}\beta_i\beta_j + D_{33}\gamma_i\gamma_j) + \frac{D_{44}}{4A^2}[I_{00}\alpha_i\alpha_j + I_{10}(\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i) + I_{01}(\alpha_i\gamma_j + \alpha_j\gamma_i) + I_{20}\beta_i\beta_j + I_{11}(\beta_i\gamma_j + \beta_j\gamma_i) + I_{02}\gamma_i\gamma_j]\cdots$$

4.63 最小特征值：

1×1矩形网格（四分之一）：$\lambda_1 = 24.0$

2×2矩形网格：$\lambda_1 = 20.77$

1×1三角形网格：$\lambda_1 = 24.0$

2×2矩形网格：$\lambda_1 = 21.66$

4.65 $\left(a + \frac{2}{3}\Delta t b\right)u_{n+1} = \left(a - \frac{1}{3}\Delta t b\right)u_n + \Delta t\left(\frac{1}{3}f_n + \frac{2}{3}f_{n+1}\right)$

式中，$u_{n+1}=u(t_{n+1})$，这个方案是θ族，当$\theta=2/3$的近似值的一个特殊情况。

4.66 $[K]\{u\}=\{F\}$ $\quad K_{ij}=\int_0^{\Delta t}\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left(c\psi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial t}+a\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\right)dxdt$

$$F_i=\int_0^{\Delta t}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\psi_i\right)\Bigg|_{x=x_e}^{x=x_{e+1}}dt+\int_{x_e}^{x_{e+1}}\int_0^{\Delta t}f\psi_i dxdt$$

当a和c是常数，且ψ_i是一（时空）矩形单元的线性插值函数时，得，

$$[K]=\frac{h}{12}\begin{bmatrix}-2c+4a\alpha & -c-4a\alpha & c-2a\alpha & 2(c+a\alpha)\\ -c-4a\alpha & -2c+4a\alpha & 2(c+a\alpha) & c-2a\alpha\\ -c-2a\alpha & -2c-2a\alpha & 2c+4a\alpha & c-4a\alpha\\ 2(c+a\alpha) & -c-2a\alpha & -c-4a\alpha & c+4a\alpha\end{bmatrix}$$

式中，$\alpha=\Delta t/h^2$。

4.67 (b) $x=\frac{1}{4}(1+\xi)(11.5+1.5\eta)$， $\quad y=\frac{1}{4}(1+\eta)(12+2\xi)$，

$J=\frac{1}{8}(67.5+7.5\eta+10\xi)>0$。

4.68 $f_0(7.7083,8.5417,9.1667,8.3333)$。

4.71 $J=1+\eta(a-2)+\xi(b-2)$，$J>0$得$a>\frac{3}{2}, b>\frac{3}{2}$，和$a+b>\frac{7}{2}$。注意$\xi=\eta=2$在主单元的节点3上。

4.72 $\frac{\partial\hat{\psi}_3}{\partial x}=\frac{5(1+\eta)}{8J}$ $\qquad \frac{\partial\hat{\psi}_3}{\partial y}=\frac{5(1+\xi)}{8J}$ $\qquad J=\frac{135+15\eta+20\xi}{16}$

4.73～4.105 部分习题按照程序FEM2D的输入数据和经过编辑的计算机输出如下(见下页)。

PROBLEM 4.73: DATA AND PARTAL SOLUTION TO PROBLEM 4.11 (TRIANGULAR ELEMENTS)

```
 0    3    -1    0    1    0    0
 2    4
0.25    0.25
0.25    0.25    0.25    0.25
1.0     1.0     0.0     0.0     0.0
 9
 1    2    3    4    7    10    13    14    15
0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    1.0    1.0
1.0
 0
```

SOLUTION VECTOR (VALUES OF U AT THE NODES);

```
0.0            0.0            0.0             0.0    0.71429D-01    0.98214D-01
0.0            0.18750D+00    0.25000D+00     0.0    0.42857D+00    0.52679D+00
0.10000D+01    0.10000D+01    0.010000D+01
```

PROBLEM 4.73: DATA AND PARTIAL SOLUTION TO PROBLEM 4.11 (RECTANGULAR ELEMENTS)

```
 1    4    -1    0    1    0
 2    4
0.25    0.25
0.25    0.25    0.25    0.25
```

```
1.0    1.0    0.0   0.0   0.0
 9
 1    2    3    4    7    10    13    14    15
0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   0.0   1.0   1.0
1.0
 0
SOLUTION VECTOR (VALUES OF U AT THE NODES):
   0.0            0.0            0.0            0.0   0.71544D-01   0.10092D+00
   0.0            0.19286D+00    0.27857D+00    0.0   0.50703D+00   0.58479D+00
   0.10000D+01    0.10000D+01    0.10000D+01
.................................................................................
PROBLEM 4.74:DATA AND PARTIAL OUTPUT FOR PROBLEM 4.22 (ELLIPTIC SECTION)
   0     3    -1     0     0     0     0
  14    13
   1     2     6
   1     6     5
   2     3     7
   2     7     6
   3     4     8
   3     8     7
   5     6    10
```

```
 5     10     9
 6      7    11
 6     11    10
 7      8    11
 9     10    12
 9     12    13
10     11    12
0.0   0.0     0.5    0.0     1.0    0.0     1.5    0.0
0.0   0.5528  0.50   0.5528  1.0    0.5528  1.25   0.5528
0.0   0.7454  0.5    0.7454  1.0    0.7454  0.5    0.9428
0.0   1.0
1.0   1.0     0.0    0.0    10.0
 5
 4    8   11   12   13
0.0
 0
```

SOLUTION VECTOR (STRESS FUNCTION VALUE AT THE NODES):

```
0.33753D+01   0.30903D+01   0.18093D+01   0.0           0.23531D+01   0.19878D+01
0.84335D+00   0.0           0.15000D+01   0.11095D+01   0.0           0.0
0.0
```

ELE.NO.	X-COMPONENT (-TAUYZ)	Y-COMPONENT (TAUXZ)	MAGNITUDE	ANGLE
1	−0.116995D+01	−0.199444D+01	0.231227D+01	−0.120396D+03
2	−0.730596D+00	−0.239184D+01	0.250093D+01	−0.106985D+03
3	−0.256206D+01	−0.174685D+01	0.310091D+01	−0.145713D+03
4	−0.228832D+01	−0.199744D+01	0.303549D+01	−0.138925D+03
5	−0.361862D+01	−0.163650D+01	0.397147D+01	−0.155665D+03
6	−0.337461D+01	−0.174685D+01	0.379993D+01	−0.152632D+03
7	−0.730596D+00	−0.456032D+01	0.461847D+01	−0.991018D+02
8	−0.781053D+00	−0.442933D+01	0.449767D+01	−0.100001D+03
9	−0.228832D+01	−0.438033D+01	0.494203D+01	−0.117583D+03
10	−0.221898D+01	−0.456032D+01	0.507153D+01	−0.115947D+03
11	−0.337161D+01	−0.438033D+01	0.552949D+01	−0.127611D+03
12	−0.781053D+00	−0.562053D+01	0.567454D+01	−0.979114D+02
13	−0.674007D+00	−0.589167D+01	0.593010D+01	−0.965262D+02
14	−0.221898D+01	−0.562053D+01	0.604270D+01	−0.111541D+03

PROBLEM 4.75: DATA AND PARTIAL SOLUTION FOR PROBLEM 4.25 (TRIANGLES; 5 DEG. SECTOR)

0 3 −1 0 0 0 0

```
  12    14
   1     2      9
   1     9      8
   2     3     10
   2    10      9
   3     4     11
   3    11     10
   4     5     12
   4    12     11
   5     6     13
   5    13     12
   6     7     14
   6    14     13
1.75        0.0        2.0      0.0      2.25     0.0       2.5       0.0
2.75        0.0        3.0      0.0      3.25     0.0       1.74334   0.1525225
1.99239     0.1743     2.24144  0.1961   2.49047  0.217889  2.739535  0.2397
2.9886      0.26147    3.2376   2.283256
1.0         1.0        0.0      0.0      0.0
   4
   1     8   7         14
400.0       400.0      80.0     80.0
```

```
6
SOLUTION  VECTOR (TEMPERATURE. IN DEG  F. AT THE NODES);
   0.40000D+03   0.32328D+03   0.25559D+03   0.19503D+03   0.14026D+03   0.90357D+02
   0.80000D+02   0.40000D+03   0.32328D+03   0.25559D+03   0.19502D+03   0.14020D+03
   0.90037D+02   0.80000D+02
```

```
PROBLEM  4.76, DATA AND PARTIAL SOLUTION OF PROBLEM  4.26 (RECTANGLES)
   1    4   -1    1    1    0    0
   6   16
 0.2     0.2     0.4     0.4     0.4     0.4
 1.2     1.0     0.8     0.8     0.6     0.4     0.4     0.4
 0.2     0.2     0.2     0.2     0.6     0.6     0.2     0.2
 0.0
 10.0    15.0    5.0     268.0   0.0
   6   91 92             93      94      95      96
   4    3  4              3       4       3       4       3    4    3    4    8
   0
   1
  71
 125.0
SOLUTION (TEMPERATURE, IN DEG K, AT THE NODES; SOURCE  125W  IS  AT  NODE  71),
```

0.28883D+03	0.28883D+03	0.28883D+03	0.28883D+03	0.28883D+03	0.28883D+03
0.28883D+03	0.28884D+03	0.28884D+03	0.28884D+03	0.28883D+03	0.28883D+03
0.28883D+03	0.28883D+03	0.28885D+03	0.28885D+03	0.28885D+03	0.28884D+03
0.28883D+03	0.28882D+03	0.28881D+03	0.28889D+03	0.28889D+03	0.28888D+03
0.28885D+03	0.28881D+03	0.28878D+03	0.28877D+03	0.28902D+03	0.28901D+03
0.28898D+03	0.28889D+03	0.28877D+03	0.28869D+03	0.28865D+03	0.28926D+03
0.28923D+03	0.28917D+03	0.28894D+03	0.28869D+03	0.28851D+03	0.28844D+03
0.28958D+03	0.28954D+03	0.28940D+03	0.28899D+03	0.28857D+03	0.28829D+03
0.28820D+03	0.29021D+03	0.29010D+03	0.28981D+03	0.28900D+03	0.28834D+03
0.28795D+03	0.28782D+03	0.29168D+03	0.29128D+03	0.29038D+03	0.28882D+03
0.28792D+03	0.28784D+03	0.28728D+03	0.29338D+03	0.29238D+03	0.29046D+03
0.28860D+03	0.28761D+03	0.28710D+03	0.28694D+03	0.29987D+03	0.29204D+03
0.29029D+03	0.28824D+03	0.28724D+03	0.28671D+03	0.28655D+03	0.29254D+03
0.29155D+03	0.28963D+03	0.28777D+03	0.28678D+03	0.28627D+03	0.28610D+03
0.28999D+03	0.28960D+03	0.28873D+03	0.28717D+03	0.28625D+03	0.28576D+03
0.28561D+03	0.28566D+03	0.28561D+03	0.28545D+03	0.28487D+03	0.28430D+03
0.28395D+03	0.28383D+03	0.28267D+03	0.28264D+03	0.28256D+03	0.28230D+03
0.28200D+03	0.28178D+03	0.28170D+03	0.28176D+03	0.28174D+03	0.28167D+03
0.28145D+03	0.28119D+03	0.28100D+03	0.28093D+03	0.28089D+03	0.28087D+03
0.28081D+03	0.28061D+03	0.28037D+03	0.28019D+03	0.28013D+03	

```
PROBLEM 4.79: CONVERGENCE STUDY OF THE VISCOUS FLOW PROBLEM IN FIG. P.459C
  1    4    2    0    1    0    0
  5    5
2.0    4.0    4.0    4.0    6.0
0.2    0.2    0.2    0.2    0.2
1.0    1.0
  27
  1   2   4   6   8   10   12   13   14   25   26   37   38   49   50   61
 62  63  64  65  66   67   68   69   70   71   72
1.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    1.0
0.0    1.0    0.0    1.0    0.0    1.0    0.0    0.0
0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0
0.0    0.0    0.0
  0
SOLUTION (VELOCITIES AT SELECTED NODES; PENALTY PARAMETER = 1.0D8).
SOLUTION FOR 5×5 MESH.
   1    0.10000D+01   0.0               2    0.12932D+01    0.0
   3    0.14302D+01   0.0               4    0.13140D+01    0.0
   5    0.13922D+01   0.0               6    0.13407D+01    0.0
   7    0.10000D+01   0.0               8    0.12585D+01   -0.55169D-01
  11    0.13317D+01   0.25894D0-1      12    0.12908D+01   -0.22613D-01
```

13	0.10000D+01	0.0	14	0.11476D+01	-0.95780D-01
17	0.11511D+01	0.51809D-01	18	0.11407D+01	-0.47018D-01
19	0.10000D+01	0.0	20	0.93127D+00	-0.10367D+00
23	0.85558D+00	0.68971D-01	24	0.88642D+00	-0.64859D-01
25	0.10000D+01	0.0	26	0.51602D+00	-0.48398D-01
29	0.46544D+00	0.36681D-01	30	0.51170D+00	-0.35139D-01

SOLUTION FOR 7×5 MESH (INPUT DATA NOT GIVEN HERE):

1	0.10000D+01	0.0	2	0.12380D+01	0.0
3	0.14309D+01	0.0	4	0.13410D+01	0.0
5	0.13760D+01	0.0	6	0.13530D+01	0.0
7	0.13749D+01	0.0	8	0.13528D+01	0.0
9	0.10000D+01	0.0	10	0.12109D+01	-0.89791D-01
15	0.13182D+01	-0.40565D-02	16	0.13004D+01	0.60522D-02
17	0.10000D+01	0.0	18	0.11034D+01	-0.15267D+00
23	0.11490D+01	-0.71132D-02	24	0.11421D+01	0.10342D-01
25	0.10000D+01	0.0	26	0.94666D+00	-0.16269D+00
31	0.86719D+00	0.51296D-02	32	0.87802D+00	-0.20979D-02
33	0.10000D+01	0.0	34	0.61995D+00	-0.76011D-01
39	0.47819D+00	0.10176D-01	40	0.50309D+00	-0.89307D-02

SOLUTION FOR 11×5 MESH (INPUT DATA NOT GIVEN HERE):

1	0.10000D+01	0.0	2	0.10619D+01	0.0

3	0.11892D+01	0.0	4	0.13411D+01	0.0
5	0.13731D+01	0.0	6	0.13594D+01	0.0
7	0.13674D+01	0.0	8	0.13586D+01	0.0
9	0.13695D+01	0.0	10	0.13567D+01	0.0
11	0.13729D+01	0.0	12	0.13546D+01	0.0
13	0.10000D+01	0.0	14	0.10604D+01	-0.10029D+00
23	0.13162D+01	-0.67214D-02	24	0.13021D+01	0.10343D-01
25	0.10000D+01	0.0	26	0.10558D+01	-0.19324D+00
35	0.11470D+01	-0.14692D-01	36	0.11439D+01	0.17175D-01
37	0.10000D+01	0.0	38	0.10204D+01	-0.25420D+00
47	0.86770D+00	-0.16533D-01	48	0.87762D+00	0.18675D-01
49	0.10000D+01	0.0	50	0.83090D+00	-0.13528D+00
59	0.48260D+00	-0.10151D-01	60	0.49906D+00	0.10974D-01

PROBLEM 4.82 FLOW IN WALL—DRIVEN SQUARE CAVITY (BY THE PENALTY FEM MODEL)

1 4 2 0 1 0 0

8 8

0.1 0.125 0.125 0.15 0.15 0.125 0.125 0.1

0.0

0.15 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.1

0.0

1.0 100.0

64

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	35	36	37	38	53	54	55	56	71	72	73	74
89	90	91	92	107	108	109	110	125	126	127	128	143	144	146	148
150	152	154	156	158	160	162	145	147	149	151	153	155	157	159	161

**** INCLUDE SEVEN ROWS OF ZEROS ****

1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 0.0

0

SOLUTION (VELOCITES AT SELECTED NODES FOR TWO SETS OF BOUNDARY CONDITIONS).

NODE	U=0 AT BOTH SINCULAR POINTS $U_{73}=U_{81}=0.0$		U=1 AT BOTH SINGULAR POINTS $U_{73}=U_{81}=1.0$	
	U	V	U	V
14	−0.64176D−01	0.26762D−07	−0.69202D−01	0.12581D−07
23	−0.16789D+00	0.67272D−08	−0.11107D+00	0.58670D−08
32	−0.13663D+00	0.94054D−08	−0.14636D+00	−0.12640D−07
41	−0.29892D+00	−0.26532D−07	−0.16206D+00	−0.71277D−07
50	−0.12927D+00	−0.86178D−07	−0.95458D−01	−0.10898D−06

```
59   -0.39691D-01   -0.12529D-06   0.11133D+00   -0.13989D-06
68    0.49221D+00   -0.82541D-07   0.53305D+00   -0.84628D-07
.....................................................................
.........................................................................
PROBLEM 4.87; ANNULAR DISK WITH INTERNAL PRESSURE, QO=100 (FIG, P4, 498)
 1     4     1     0     0     0     0
12    20
 1     2     6     5
 2     3     7     6
 3     4     8     7
 5     6    10     9
 6     7    11    10
 7     8    12    11
 9    10    14    13
10    11    15    14
11    12    16    15
13    14    18    17
14    15    19    18
15    16    20    19
2.0     0.0      4.0     0.0      6.0     0.0     8.0     0.0
1.848   0.765    3.696   1.531    5.543   2.296   7.391   3.061
```

```
1.414      1.414      2.828      2.828      4.243      4.243      5.657      5.657
0.765      1.848      1.531      3.696      2.296      5.543      3.061      7.391
0.0        2.0        0.0        4.0        0.0        6.0        0.0        8.0
30000000.  30000000.  0.3        11538462.  1.0
   8
   2     4     6     8     33     35     37     39
0.0
   8
   1     9     10     17     18     25     26     34
 39.27      72.56      30.056      55.536      55.536      30.056      72.50      39.27
SOLUTION (DISPLACEMENTS INXAND Y DIRECTIONS AT THE FIRST FOUR NODES),
   1     0.86387D-05     0.0         2     0.47413D-05     0.0
   3     0.35437D-05     0.0         4     0.30489D-05     0.0
         ..........................................................................
         ELE.NO.   STRESS, SXX          STRESS, SYY          STRESS, SXY
         ..........................................................................
            1      -0.364341D+02        0.526484D+02        -0.184509D+02
            2      -0.858335D+01        0.218416D+02        -0.830355D+01
            3      -0.120962D+01        0.141050D+02        -0.31715[illegible]D+01
         ..........................................................................
..........................................................................................
```

```
PROBLEM 4.88: PLANE ELASTICITY PROBLEM OF FIGURE P4.88
    1      4      0      0      1      0      0
    6      3
  2.0      2.0      2.0      2.0      2.0      2.0      2.0
  1.0      1.0      1.0      1.0
30000000.      30000000.  0.3      11538462.  0.5
  11
  2   4   6   8   10   12   14   1   15      29      43
 0.0
 0.0
  2
 13    55
100.0      -100.0
SOLUTION (DISPLACEMENTS AT SELECTED NODES):
  7    0.22089D-04    0.0             8    0.0             0.17038D-07
 14    0.60676D-05    0.54905D-05    15    0.0             0.25494D-07
 21   -0.40879D-05    0.05755D-05    22    0.0             0.27810D-07
 27   -0.61619D-05   -0.38926D-05    28   -0.26049D-04     0.13109D-04
 ...................................................................
   ELE. NO.   STRESS, SXX      STRESS, SYY      STRESS, SXY
 ...................................................................
```

1	-0.139286D+00	0.322345D+00	0.663894D-01
6	0.759464D+02	0.401529D+02	-0.381496D+02
7	0.879431D-02	0.196623D+00	0.152073D+00
12	0.422825D+01	0.228827D+02	-0.165697D+02
13	0.130491D+00	0.290535D-01	0.938342D-01
18	-0.801746D+02	0.608983D+01	-0.303963D+02

PROBLEM 4.89: CANTILEVERED BEAM BY PLANE STRESS ELEMENTS (FIG.P.4.89)

```
  2     .8   0    0    1    0    0
  3     1
 2.0    2.0    2.0    2.0    2.0    2.0
 1.0    1.0
20000000.  20000000.  0.3     7692308.  0.5
  6
  1     2   15   16   23   24
0.0      0.0    0.0    0.0    0.0    0.0
  1
  36
-100.0
```

SOLUTION (DISPLACEMENTS AT SELECTED NODES):

```
 5   -0.94189D-03   -0.44053D-02      7   -0.10593D-02   -0.85146D-02
11    0.36346D-06   -0.85206D-02     18    0.10667D-02   -0.85340D-02
```

ELE.NO.	STRESS, SXX	STRESS, SYY	STRESS, SXY
1	-0.726235D-01	0.182124D+00	-0.221517D+02
2	0.132818D+01	0.539333D+00	-0.230334D+02
3	0.327726D+01	0.113591D+02	-0.227092D+02

PROBLEM 4.93: BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED PLATE UNDER UNIFORM LOAD (FIG.4.45)

```
  1     4    1     0     0     0     0     0
  4     4
0.1    0.1    0.2535    0.2535    0.2535
0.1    0.1    0.15      0.15      0.15
  25.0E6   1.0E6   0.5E6   0.5E6   0.2E6   0.25E0   0.0E0 0.20000E0
0.00
 27
  2    3    6    9   12   13   15   17   28   30   32   43   45   47   58   60
 61   62   64   65   67   68   70   71   73   74   75
0.0
```

0.0

0.0

0.0

9

1 4 7 16 19 22 31 34 37

0.025 0.05 0.025 0.05 0.1 0.05 0.025 0.05

0.025

TRANSVERSE DEFLECTION AT THE NODES (LOAD, PO=10 PSI):

0.16335D-04 0.15630D-04 0.13687D-04 0.69013D-05 0.0 0.15193D-04 0.14621D-04 0.12760D-04

0.64698D-05 0.0 0.11816D-04 0.11374D-04 0.10115D-04 0.53652D-05 0.0 0.55145D-05

0.53698D-05 0.49607D-05 0.29166D-05 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

0.0

PROBLEM 4.95: STATIC BENDING OF A SIMPLY SUPPORTED CIRCULAR PLATE UNDER UDL

2 8 0 0 0 0 0 0

4 21

1 3 11 9 2 7 10 6

3 5 13 11 4 8 12 7

9 11 19 17 10 15 18 14

11 13 21 19 12 16 20 15

5.0 0.0 6.25 0.0 7.5 0.0 8.75 0.0

10.0 0.0 4.6194 1.9134 6.9291 2.8701 9.2388 3.8268

```
3.5355    3.5355    4.4194    4.4194    5.3033    5.3033    6.1872    6.1872
7.071     7.071     1.9134    4.6194    2.8701    6.9291    3.8268    9.2388
0.0       5.0       0.0       6.25      0.0       7.5       0.0       8.75
0.0       10.0
   30.0E6    30.0E6   11.6279E6   11.6279E6   11.6279E6   0.29E0   0.0E0   1.0E0
10.0
 15
 3    6    9    12    13    15    22    37    46    61    50    53    56    59    62
0.0
0.0
  0
```

TRANSVERSE DEFLECTION AT THE NODES (LOAD PO=10 PSI):

```
0.22831D-02  0.16990D-02  0.11296D-02  0.56082D-03  0.0  0.22809D-02  0.11257D-02  0.0
0.22831D-02  0.16990D-02  0.11296D-02  0.56079D-03  0.0  0.22809D-02  0.11257D-02  0.0
0.22831D-02  0.16990D-02  0.11296D-02  0.56082D-03  0.0
```

PROBLEM 4.98: TRANSIENT ANALYSIS OF THE EQUATION IN PROBLEM 4.11 OR 4.71

```
   0      3    -1    0    1 . 1    0
   2      4
0.25      0.25
 0.25       0.25      0.25      0.25
 1.0        1.0       0.0       0.0       0.0
```

```
9
1    2    3    4    7   10   13   14   15
0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      1.0      1.0
1.0
  0
0.05     0.5     1.0
0.0
0.0
```

SOLUTION (U AT THE NODES OF THE TRIANGULAR-ELEMENT MESH):

TIME = 0.050

```
0.0            0.0            0.0            0.0    0.24682D-02    0.62607D-02
0.0            0.19734D-01    0.36582D-01    0.0    0.14397D+00    0.19816D+00
0.10000D+01    0.10000D+01    0.10000D+01
```

TIME = 0.500

```
0.0            0.0            0.0            0.0    0.71851D-01    0.97631D-01
0.0            0.18633D+00    0.25127D+00    0.0    0.42988D+00    0.52564D+00
0.10000D+01    0.10000D+01    0.10000D+01
```

TIME = 0.750

```
0.0            0.0            0.0            0.0    0.71311D-01    0.98480D-01
0.0            0.18780D+00    0.24956D+00    0.0    0.42828D+00    0.52710D+00
0.10000D+01    0.10000D+01    0.10000D+01
```

```
TIME=1.000
   0.0           0.0           0.0           0.0        0.71465D-01   0.98129D-01
   0.0           0.18742D+00   0.25013D+00   0.0        0.42865D+00   0.52670D+00
   0.10000D+01   0.10000D+01   0.10000D+01
SOLUTION (U AT THE NODES OF THE RECTANGULAR-ELEMENT MESH; INPUT DATA NOT GIVEN).
 TIME=0.050
   0.0           0.0           0.0           0.0        0.20104D-02   0.24122D-02
   0.0           0.14181D-01   0.25287D-01   0.0        0.15876D+00   0.16143D+00
   0.10000D+01   0.10000D+01   0.10000D+01
 TIME=0.500
   0.0           0.0           0.0           0.0        0.71890D-01   0.10086D+00
   0.0           0.19217D+00   0.27890D+00   0.0        0.50774D+00   0.58421D+00
   0.10000D+01   0.10000D+01   0.10000D+01
 TIME=0.750
   0.0           0.0           0.0           0.0        0.71481D-01   0.10099D+00
   0.0           0.19297D+00   0.27845D+00   0.0        0.50693D+00   0.58491D+00
   0.10000D+01   0.10000D+01   0.10000D+01
 TIME=1.000
   0.0           0.0           0.0           0.0        0.71557D-01   0.10090D+00
   0.0           0.19284D+00   0.27860D+00   0.0        0.50704D+00   0.58477D+00
   0.10000D+01   0.10000D+01   0.10000D+01
.................................................................................
```

PROBLEM 4.100: TRANSIENT ANALYSIS OF THE WALL-DRIVEN SQUARE CAVITY (PROB.4.82)

```
  1     4     2     0     1     1     0
  8     8
0.1    0.125  0.125  0.15   0.15   0.125  0.125  0.1
0.0
0.15   0.125  0.125  0.125  0.125  0.125  0.125  0.1
0.0
1.0    100.0  0.0    0.0    0.0
 64
  1    2    3    4    5    6    7    8    9   10   11   12   13   14   15   16
 17   18   19   20   35   36   37   38   53   54   55   56   71   72   73   74
 89   90   91   92  125  126  127  128  143  144  145  146  148  150  152  154
156  158  160  161  162  107  108  109  110  147  149  151  153  155  157  159
**** SEVEN ROWS OF ZEROS GO HERE ****
0.0     1.0     1.0     1.0     1.0     1.0     1.0     1.0
  0
0.05    0.5     1.00
**** TWENTY TWO ROWS OF ZEROS GO HERE ****
```

VELOCITIES AT SELECTED NODES FOR VARIOUS TIMES:

	NODE	U	V	NODE	U	V
T = .05	14	−0.34104D−01	−0.53545D−08	50	−0.11693D+00	0.22379D−07
	23	−0.11353D+00	0.10310D−07	59	−0.13027D+00	0.14882D−07
	32	−0.66084D−01	0.22431D−08	68	0.33218D+00	−0.20727D−08
	41	−0.23463D+00	−0.78096D−08	77	0.10000D+01	0.0
T = .5	14	−0.64281D−01	−0.31532D−07	50	−0.12825D+00	−0.49570D−07
	23	−0.16829D+00	−0.24267D−07	59	−0.45167D−01	0.17425D−07
	32	−0.13697D+00	0.46672D−07	68	0.49755D+00	0.63478D−07
	41	−0.29853D+00	0.46453D−07	77	0.10000D+01	0.0
T = 1.	14	−0.64209D−01	0.67872D−09	50	−0.12856D+00	0.10767D−07
	23	−0.16787D+00	−0.50488D−08	59	−0.40853D−01	−0.72040D−07
	32	−0.13663D+00	−0.71011D−07	68	0.45145D+00	0.23391D−07
	41	−0.29925D+00	0.28405D 07	77	0.10000D+01	0.0

PROBLEM 4.103: DYNAMIC ANALYSIS OF A SIMPLY SUPPORTED CIRCULAR PLATE UNDER UDL

```
2    8    0    0    1    10   10   0
4    21
1    3    11   9    2    7    10   6
3    5    13   11   4    8    12   7
9    11   19   17   10   15   18   14
11   13.  21   19   12   16   20   15
5.0    0.0    6.25    0.0    7.5    0.0    8.75    0.0
```

```
10.0      0.0       4.6194    1.9134    6.9291    2.8701    9.2388    3.8268
3.5355    3.5355    4.4194    4.4194    5.3033    5.3033    6.1872    6.1872
7.071     7.071     1.9134    4.6194    2.8701    6.9291    3.8268    9.2388
0.0       5.0       0.0       6.25      0.0       7.5       0.0       8.75
0.0       10.0
  30.0E6    30.0E6  11.6279E6  11.6279E6  11.6279E6   0.29E0   1.0E0   1.0E0
10.0
 15
  3    6    9   12   15   13   22   37   46   61   50   53   56   59   62
0.0
0.0
  0
0.1       0.5
TRANSVERSE DEFLECTION AT THE NODES (LOAD PO=10 PSI) :
TIME=0.100D+00
0.21585D-02  0.16065D-02  0.10684D-02  0.53058D-03  0.0  0.21564D-02  0.10647D-02  0.0
0.21585D-02  0.16065D-02  0.10684D-02  0.53054D-03  0.0  0.21564D-02  0.10647D-02  0.0
0.21585D-02  0.16065D-02  0.10684D-02  0.53058D-03  0.0
TIME=0.500D+00
0.13268D-02  0.13604D-02  0.90513D-03  0.45990D-03  0.0  0.13250D-02  0.90231D-03  0.0
0.13268D-02  0.13604D-02  0.90542D-03  0.44997D-03  0.0  0.13250D-02  0.90231D-03  0.0
```

0.18268D-02 0.13604D-02 0.90543D-03 0.45000D-03 0.0

TIME=0.100D+01

-0.39423D-03 -0.29245D-03 -0.19357D-03 -0.95684D-04 0.0 -0.39385D-03 -0.19291D-03 0.0

-0.39424D 03 -0.29245D-03 -0.19357D-03 -0.95678D-04 0.0 -0.39385D-03 -0.19291D-03 0.0

-0.39423D-03 -0.29245D-03 -0.19357D-03 -0.95684D-04 0.0

第 五 章

5.1 符合式（5.5）的有限元方程式为：

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1^e\\ \sigma_2^e\end{Bmatrix}=\frac{f_e h_e}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^e\\ P_2^e\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^e\\ u_2^e\end{Bmatrix}-\frac{h_e}{6a_3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1^e\\ \sigma_2^e\end{Bmatrix}$$

5.2 当式(5.5)中第二式作为约束条件，下列有限元方程式可通过一个单元推导出来：

$$[K^e]\{u^e\}-[G^e]\{\sigma^e\}=\{F^e\} \qquad [G^e]^T\{u^e\}-[H^e]\{\sigma^e\}=\{0\}$$

$$K_{ij}^e=\int_{x_e}^{x_{e+1}}(a_e+\gamma_e)\frac{d\psi_i^e}{dx}\frac{d\psi_j^e}{dx}dx \quad G_{ij}^e=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{\gamma_e}{a_e}\frac{d\psi_i^e}{dx}\phi_j dx$$

$$H_{ij}^e=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{\gamma_e}{a_e^2}\phi_i^e\phi_j^e dx \qquad F_i^e=\int_{x_e}^{x_{e+1}}f\psi_i^e dx+P_i^e$$

式中，ψ_i^e和ϕ_i^e是分别用于求u和σ近似值的插值函数。

5.3 符合式(5.30)中罚函数的有限元模型如下：

$$\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}]\\ [K^{12}]^T & [K^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{w\}\\ \{\theta\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\end{Bmatrix}$$

式中，

$$K_{ij}^{11}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\gamma\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}dx \qquad K_{ij}^{12}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\gamma\frac{d\psi_i}{dx}\phi_j dx=K_{ji}^{21}$$

$$K_{ij}^{22}=\int_{x_e}^{x_{e+1}}\left[b\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx+\gamma\phi_i\phi_j\right]dx$$

$$F_i^1=-\int_{x_e}^{x_{e+1}}\psi_i f dx+Q_1\psi_i(x_e)+Q_3\psi_i(x_{e+1})$$

$$F_i^2=Q_2\phi_i(x_e)+Q_4\phi_i(x_{e+1})$$

5.5 对于4个单元的网格，特征值是$\lambda_1=4.2048$，$\lambda_2=27.336$，$\lambda_3=85.776$，和$\lambda_4=177.6$。精确解是方程式$\lambda+\mathrm{tg}\lambda=0$的根。

5.6 图4.8和图4.9所示三角形和矩形单元的粗网格，第一特征值如下：$\lambda_{11}=5.415$（三角形元），$\lambda_{11}=5.193$（矩形元）。精确解为：

$$\lambda_{mn}=[(m/a)^2+(n/a)^2]\pi^2 \qquad (a=2)。$$

当 $i,j=1,2$；$I,J=1,2,3,4$时，

5.8 $\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\Delta^1\} \\ \{\Delta^2\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{F^1\} \\ \{F^2\}\end{Bmatrix}$ $\quad \{\Delta^1\} = \begin{Bmatrix}u_1 \\ u_2\end{Bmatrix} \quad \{\Delta^2\} = \begin{Bmatrix}w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2\end{Bmatrix}$

$$K_{ij}^{11} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} EA \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx$$

$$K_{IJ}^{12} = \frac{1}{2}\int_{x_e}^{x_{e+1}} EA\left(\frac{dw}{dx}\right)\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\phi_J}{dx} dx$$

$$K_{IJ}^{21} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} EA\left(\frac{dw}{dx}\right)\frac{d\phi_I}{dx}\frac{d\psi_J}{dx} dx$$

$$K_{IJ}^{22} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} EI \frac{d^2\phi_I}{dx^2}\frac{d^2\phi_J}{dx^2} dx$$

$$F_i^1 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} f\psi_i dx + P_i \qquad F_I^2 = \int_{x_e}^{x_{e+1}} q\phi_I dx + Q_I$$

式中，f是轴向力，q是横向力。

5.9 $[K^{11}] = \frac{EA}{h}\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$$[K^{12}] = \frac{1}{2}[K^{21}] = \frac{EAN}{h}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$[K^{22}]$由式(3.102)给出，$N = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)$

5.10 $[K(\bar{u})]\{u\} = \{F\} \qquad K_{ij} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \bar{u}\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx} dx$

$$F_i = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i dx + P_i$$

式中，$\bar{u}$是前面一次迭代得到的解（开始迭代时，$\bar{u} = 0$）

5.11 $\psi_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \qquad \psi_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$

$$\psi_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

5.12 $[K^e + H^e]\{T^e\} = \{F^e\}$

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e}\left(k_x\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x} + k_y\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y} + k_z\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$H_{ij}^{e}=\beta\int_{S^e}\psi_i\psi_j ds \qquad F_i^{e}=\int_{\Omega^e} q\psi_i dxdydz+\beta T_\infty\int_{\Gamma^e}\psi_i ds$$

5.13
$$\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}]\\ [K^{12}]^T & [K^{22}] & [K^{23}]\\ [K^{13}]^T & [K^{23}]^T & [K^{33}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u\}\\ \{v\}\\ \{w\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\\ \{F^3\}\end{Bmatrix}$$

式中，系数矩阵K_{ij}^{IJ}和F_i^I ($i,j=1,2,\cdots,n;\ I,J=1,2,3$) 如下式

$$K_{ij}^{11}=\int_{\Omega^e}\left[\mu\left(2\frac{\partial\psi_i}{dx}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial y}+\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+\gamma\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial x}\right]dxdydz$$

$$K_{ij}^{12}=\int_{\Omega^e}\left(\mu\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\gamma\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right)dxdydz=K_{ji}^{21}$$

$$K_{ij}^{13}=\int_{\Omega^e}\left(\mu\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\gamma\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)dxdydz=K_{ji}^{31}$$

$$K_{ij}^{22}=\int_{\Omega^e}\left[\mu\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial x}+2\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial y}+\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+\gamma\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial y}\right]dxdydz$$

$$K_{ij}^{23}=\int_{\Omega^e}\left(\mu\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)dxdydz=K_{ji}^{32}$$

$$K_{ij}^{33}=\int_{\Omega^e}\left[u\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial y}+2\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+\gamma\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\ \frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right]dxdydz$$

$$F_i^1=\int_{\Omega^e} f_x\psi_i dxdydz+\oint_{\Gamma^e} t_x\psi_i ds$$

$$F_i^2=\int_{\Omega^e} f_y\psi_i dxdydz+\oint_{\Gamma^e} t_y\psi_i ds$$

$$F_i^3=\int_{\Omega^e} f_z\psi_i dxdydz+\oint_{\Gamma^e} t_z\psi_i ds$$

5.15 当$i=1,2,\cdots,8$时，$f_i^e=1$ $Q_i^e=1$

英汉名词对照表

Accuracy of the solution 解答的准确性
Admissible functions (*See also* Approximation functions, Interpolation functions) 容许函数（亦见近似函数，插值函数）
Alternative formulations 变换公式
Alternative procedure 变换步骤
Analytical solutions(*see* Exact solutions) 解析解（见精确解）
Approximation error 近似性误差
Approximation functions 近似函数
properties of (*See* also Interpolation functions) ～的性质（亦见插值函数）
Approxiamtions, 近似值：
temporal(time) 瞬时值(时间)
for first-order time derivatives 一次时间导数
for second-order time derivatives 二次时间导数
constant-average-acceleration method 匀平均加速方法
linear acceleration method 线加速方法
Newmark direct integration method Newmark 直接积分法
for two-dimensional problems 二维问题
theta family of ～的θ族
backward-difference 向后差分
Crank-Nicolson Crank-Nicolson法
forward-difference 向前差分
Calerkin Galerkin法
variational methods ～的变分法
semidiscrete (*see* Semidiscrete approximation) 半离散（见半连续近似值）
Aquifer 含水层
Area coordinates 面积坐标
Assembly, 集合：
in banded matrix form 带状

transformation of ～的变换
Couette flow Couette流
Coupled problems 耦合问题
Cramer's rule Cramer法则
Crank-Nicolson scheme Crank-Nicolson图表
Cubic elements 立方体单元
Cylinder, flow about a 圆柱体，圆柱体流
Data: 数据：
discontinuous 不连续的～
generation of ～的产生
input 输入
computer program FEM1D 计算机程序FEM1D
computer program FEM2D 计算机程序FEM2D
computer program PLATE 计算机程序PLATE
smooth 消除
Degrees of freedom: 自由度：
global 总的
local 局部的
primary(*see* Primary variables) 初始的（见初始变量）
secondary (*see* Secondary variables) 次的（见次变量）
Dependent variables 因变量
Differential aquations: 微分方程：
coupled 共轭的
fourth-order 四次的
homogeneous 齐次的
partial 偏～
second-order 二次的
Direct approach 直接法
Direction cosines 方向余弦
Dirichlet boundary conditions Dirichlet 边界条件
Discretization of domain 域的离散性
Discretization error 离散误差
Displacement model 位移模型
Displacements, generalized (*see* Generalized displacemems) 位移，广义的～（见广义位移）
Divergence theorem 发散定理
Domain: 域：
convex 凸边形～
discretization of (*see* Discretization of domain) ～的离散性（见域离散性）
multiply connected 多连通的～
simply connected 简单连接的～
Eigenvalue problem 特征值问题
Eigenvalues 特征值
Eigenvector 特征矢量
Elasticity 弹性
Electrostatics 静电学
Element calculations 单元计算
Element coordinates (*see* Local coordinates) 单元坐标（见局部坐标）

Homogeneous initial conditions 齐次初始条件

Homogeneous natural boundary conditions 齐次自然边界条件

Ideal fluid 理想液体

Ill-conditioned matrices 病态矩阵

Impermeable boundary 封闭边界

Incompressible fluid 不可压缩的液体

Inconsistent mass matrix 不相容质量矩阵

Independent variable, fixed value of 自变量，定值

Initial conditions 初始条件

Initial-value problems 初值问题

Insulated boundary 隔离的边界

Integral form 积分

Integration: 积分：

error in ～误差

exact 精确～

full 全～

Gauss-Legendre Gauss-Legendre～

mixed 混合～

Newton-Cotes Newton-Cotes～

numerical 数值～

over a master rectangular element 在主矩形单元上的～

over a master triangular element 在主三角形单元上的～

by parts 部分～

points (*see* Integration points) 点～(见积分点)

reduced 降阶～

Integration points: 积分点：

for Gauss quadrature Gauss积分～

for Newton-Cotes quadrature Newton-Cotes 积分～

Interelement boundary 单元间边界

Interelement continuity 单元间的连续性

Internal forces, equilibrium of 内力，～的平衡

Interpolation functions 插值函数

derivation of ～的导数

for four-node rectangular element 四节点矩形单元的～

global 总的～

Hermite Hermite～

Lagrange family of ～的Lagrange族

for line elements 线性单元的～

properties of ～性质

for three-node triangular element 三节点三角形单元的

~

Transformation matrix 转换矩阵

Transition element 转换单元

Transverse shear strain 横向剪应变

Trapezoidal rule 梯形法则

Triangular elements 三角形单元：

element matrices of ～的单元矩阵

four-node 四节点～

higher-order 高次～

mesh of ～的网格

quadrature points for ～的积分点

three-node 三节点～

Triangular finite element 三角形有限单元

Truss element (*see* Frame element) 桁架单元（见框架单元）

Unconditionally stable methods 无条件稳定法

Undetermined parameters 待定参数

Uniform mesh 规则网格

Unit normal 单位范数

Unit vector 单位矢量

Variables: 变量：

dependent 因～

primary (*see* Primary variables) 初始～（见初始变量）

secondary (*see* Secondary variables) 次～（见次生变量）

Variation: 变分：

calculus of ～的计算

first 一阶～

of a functional 泛函的～

laws of ～的法则

Variational approximation over an element 单元的变分近似

Variational calculus 变分计算

Variational equation 变分方程式

Variational formulation 变分公式：

of boundary-value problems 边值问题的～

over an element 单元的～

of equations over an element 单元公式的～

of heat transfer through and anisotropic 贯通和各向异性介质热传导的～

Of incompressible fluid flow 不可压缩液流～

mixed 混合～

of penalty finite-element model 罚有限元模型的～

of shear deformable theory of plates 平板剪切变形理论的～

Variational methods: 变分法：

of approximations 近似性的～

经典的～

comments on 对～的评论
Variational operator 变分运算
Variational solution 变分解
Variational symbol (operator) 变分符号（运算）
Velocity potential 速度势
Velocity potential formulation 速度势方程式
Vibration, natural 振动，固有～
Viscous flow 粘性流
Vorticity 旋度
Wave equation 波动方程
Wave propagation problems 波传播问题
Weak formulation (*see* Variational formulation) 弱（变分）方程式（见变分方程）
加权函数
Weighted-residual method 加权残数法
Weighting coefficients 加权系数
for Gauss-Legendre quadrature Gauss-Legendre积分法的～
for Newton-Cotes quadrature Newton-Cotes积分法的～
for rectangular element 矩形单元的～
for triangular element 三角形单元的～
Weights of the quadrature formula 积分方程式的权